

UNIVERSITÉ PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

Présentée

pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY**

PAR

Dominique Aubert

**Sujet: Mesure et implications dynamiques des flux de
matière noire à la surface du viriel des halos de galaxies**

Soutenue le 18 Mai 2005 devant la Commission d'examen

M. Jean-Loup Puget	Président
M. Francis Bernardeau	Rapporteur
M. Edmund Bertschinger	Rapporteur
M. François Bouchet	Examineur
Mme. Françoise Combes	Examinatrice
M. Romain Teyssier	Examineur
M. Christophe Pichon	Directeur de Thèse

Table des Matières

1	Introduction	13
1.1	Formation cosmologique des galaxies et de leurs halos	20
1.2	De la Cosmologie au Halos de matière noire	25
1.3	Une approche hybride pour une étude statistique	27
1.4	Des travaux présentés dans ce manuscrit	31
2	Réponse linéaire et non linéaire du halo	33
2.1	Le Halo Cubique	34
2.1.1	Réponse linéaire à un champ de marée extérieur	34
2.1.2	Réponse linéaire d'un halo cubique "ouvert"	40
2.1.3	Vers un modèle de halo sphérique	43
2.2	Réponse linéaire du halo sphérique "fermé"	44
2.2.1	Variables angle-action	44
2.2.2	Calcul de la réponse	45
2.3	Réponse linéaire du halo sphérique "ouvert"	47
2.4	Réponse non linéaire du halo sphérique	51
2.5	Evolution séculaire du halo	57
2.6	Applications Futures	60
2.7	Conclusions	64
3	Dynamical Flows Through Dark Matter Haloes III : Inner perturbative dy-	
	namics, secular evolution and applications	67
4	Implémentation du modèle linéaire du halo sphérique	99
4.1	Détail du calcul de la réponse du halo	100
4.1.1	Calculs en variables angle-actions	104
4.1.2	Bases biorthogonales	104
4.2	Aspects numériques de l'implémentation	105
4.2.1	Intégration du noyau	105
4.2.2	Calcul de la réponse	107
4.3	Tests de l'implémentation	108
4.3.1	Champ de force homogène	108
4.3.2	Croissance adiabatique d'une sphère	110
4.4	Conclusions	112
5	Simulations de matière noire	115
5.1	Chaîne de production des simulations	116
5.1.1	Génération des conditions initiales par GRAFIC1	116

5.1.2	Intégration cosmologique avec GADGET	118
5.1.3	Détection des halos par HOP	120
5.2	Spécificités liées aux séries de simulations	122
5.3	Mesures statistiques dans les simulations	125
5.3.1	Evolution du spectre de Puissance	125
5.3.2	Fonction de Masse des halos	126
5.3.3	Distribution du paramètre de Spin	127
5.3.4	Rayon de Viriel des halos	129
5.4	Résumé et objectifs	130
6	Accrétion anisotrope par les halos	133
6.1	Approche fluide	137
6.1.1	Corrélation Spin du halo - Moment angulaire advecté	138
6.1.2	Un excès d'accrétion équatoriale	139
6.1.3	Profil d'anisotropie	140
6.2	L'accrétion anisotrope de sous-structures	141
6.2.1	Un arbre de sous-structures	141
6.2.2	Corrélation spin du noyau - moment orbital des satellites	143
6.2.3	Un flux filamentaire ?	145
6.3	Anisotropie projetée et corrélations intrinsèques	147
6.3.1	Un effet anti-Holmberg ?	147
6.3.2	Orientation des satellites et corrélations intrinsèques.	147
6.4	Conclusion	150
7	The origin and implications of dark matter anisotropic cosmic infall on $\sim L^*$ haloes. MNRAS, 2004, 352, 376-398.	153
8	Statistique des environnements : Méthodologie	181
8.1	Une description de l'environnement en termes de champs	183
8.2	Des simulations à une mesure de l'environnement	185
8.2.1	Terme source	186
8.2.2	Potentiel extérieur	187
8.3	Projections de la source et du potentiel	190
8.4	Glossaire sphérique	193
9	Statistique des environnements : Mesures dans les simulations	197
9.1	Critères de sélection des halos.	200
9.2	Mesures statistiques sur le potentiel extérieur	201
9.2.1	Corrélations angulaires	203
9.2.2	Corrélations angulo-temporelles	204
9.3	Statistiques à 1 point de la source	207
9.3.1	Flux de masse moyen	208
9.3.2	Distribution des vitesses	209
9.3.3	Distribution des paramètres d'impacts	215
9.4	Statistiques à 2 points de la source	218
9.4.1	spectre de puissance angulaire de la densité de flux de masse	218
9.5	Discussion	222
9.6	Conclusion	224

10 Dynamical Flows Through Dark Matter Haloes I : One and Two point statistics at the Virial Radius	227
11 Distribution des métaux dans le milieu intergalactique	261
11.1 Contraintes observationnelles	261
11.2 Un modèle simple de la distribution des métaux	262
11.2.1 Une simulation haute résolution	262
11.2.2 Contraintes sur les sources de métaux	265
12 The clustering of intergalactic metals. ApJL, 2003, 597, L87-L100.	267
13 Conclusions	273

Résumé

Les succès remportés par le modèle cosmologique de concordance peinent à être transposés aux échelles galactiques (profils de matière noire piqués ou surproduction de petites structures par exemple). Par conséquent, la dynamique des objets formés au sein de ce modèle se doit d'être étudiée en détail. Toutefois, une étude fine et quantitative de la dynamique interne des galaxies (via des simulations à haute résolution par exemple) reste difficile à concilier avec une description représentative des environnements.

Pour résoudre cette apparente contradiction, cette thèse propose d'aborder de façon statistique la dynamique des systèmes galactiques. Cette démarche vise à relier les distributions des propriétés de ces objets aux caractéristiques statistiques des interactions qu'elles subissent. Elle doit également permettre d'explorer la question de l'inné ou de l'acquis des spécificités de ces objets. Ces objectifs nécessitent à la fois une description correcte des processus dynamiques internes et une bonne connaissance des propriétés des environnements dans lesquels baignent les galaxies. Afin de répondre à cette double exigence, le cadre proposé ici repose sur une approche hybride où les processus internes sont abordés via les outils analytiques de la dynamique galactique, tandis que les caractéristiques des interactions sont extraites de simulations à grande échelle.

Les travaux présentés se limitent à l'étude des interactions des halos de matière noire avec leur environnement. Les échanges (accrétion et champ de marée) entre ces objets et le milieu extérieur sont décrits en termes de flux de matière au travers de la sphère de viriel et de potentiel projetés. Par cette description, la connaissance des interactions se ramène à la caractérisation statistique d'une condition limite. Cette vision "halocentrique" permet en outre de conserver l'information angulaire et cinématique nécessaire au calcul de la réponse dynamique des halos.

La dynamique est abordée dans le régime des faibles interactions via une description perturbative non linéaire de la réponse d'un système non collisionnel ouvert. Cette théorie doit permettre de décrire des phénomènes tels que la friction dynamique ou l'effeuillage par effet de marée. A partir d'une extension de la "méthode matricielle" décrivant la dynamique dans l'espace des angles-actions, il est démontré comment cette technique analytique exprime directement les caractéristiques statistiques de la réponse des halos en fonction des propriétés de leur environnement. Cette "propagation statistique" ne fait pas appel aux réalisations individuelles de systèmes en interaction, mais nécessite une connaissance complète des propriétés de l'accrétion et du champ de marée, ainsi que leurs interdépendances statistiques (par la connaissance de corrélations croisées). L'évolution séculaire du halo dans le régime des interactions récurrentes est également décrite dans un formalisme quasi-linéaire. L'évolution de la fonction de distribution du halo y est décrite comme une diffusion au long cours des orbites du système, induite par la présence de perturbations externes. Les propriétés de l'accrétion et du champ de marée sont extraites d'un ensemble de simulations cosmologiques permettant de réduire les effets de variance cosmique. Cette mesure permet une description quantitative des interactions et représentative de la diversité des cas de figure. Ces études sur simulations sont limitées au régime de faibles interactions pour des redshifts inférieurs à 1. La distribution du flux de masse au rayon de viriel a permis de contraindre quantitativement le degré d'anisotropie de l'accrétion de matière par les halos. Cette mesure en terme de flux est complétée par une étude détaillée de la distribution des satellites qui confirme un excès d'accrétion équatoriale de l'ordre de $\sim 15\%$ et qui est interprétée en termes de

flux filamentaire. Les propriétés de l'accrétion et du potentiel sont abordées de façon plus exhaustive via une description adaptée à la propagation statistique. Les propriétés cinématiques de la matière passant au travers du rayon viriel mettent en évidence le caractère distinct de la matière nouvellement accrétée de celle ayant déjà interagit avec le halo. Cette différence se manifeste dans la trajectoire des flux de masse impliqués ou dans leurs vitesses caractéristiques. Les mesures de corrélations angulo-temporelles du potentiel au rayon de viriel indiquent un champ de marée stationnaire et hautement quadrupolaire, traçant la distribution de matière dans les régions périphériques du halo. Les mêmes corrélations sont mesurées pour le flux de masse, montrant en particulier l'invariance au cours du temps du spectre de puissance de la matière noire au rayon de viriel. De premiers effets de résolution sont détectés lors de cette mesure et sont discutés.

Une courte étude sur la distribution des métaux liés aux sous-structures illustre comment les études observationnelles peuvent fournir des contraintes statistiques sur la distribution de matière au sein des halos.

De façon générale, l'établissement d'un lien entre propriétés statistiques de l'environnement et distribution des réponses dynamiques des halos permettent d'envisager un large champ d'applications. D'une part la connaissance des flux doivent permettre de prédire les propriétés statistiques de la répartition de la matière noire au sein des halos. A l'inverse, les traceurs observationnels de la distribution de matière (émission X, effet SZ, lentilles gravitationnelles, systèmes absorbants) fournissent des contraintes sur les propriétés réelles des flux, ainsi que sur les modèles sous-jacents de halos (profil de masse par exemple) et sur les biais associés aux traceurs utilisés (rapports M/L par exemple). Enfin, une validation à terme de la propagation statistique permet d'entrevoir la mise en place de l'inversion dynamique qui permet de remonter l'histoire d'interaction d'un halo à partir de son état actuel.

Summary

The success of the concordant cosmological model seem to be difficult to extend to galactic scales (*e.g.* the cusp of dark matter profile, or the overproduction of small structures). It is therefore of prime importance to focus on the dynamics of objects formed within this paradigm and study them accurately. Yet a quantitative and detailed accounting of the inner dynamics of galaxies (through high resolution simulation for instance) seems to be difficult to carry while remaining representative of their cosmic environment.

In order to address this apparent difficulty, the goal of this PhD is to study statistically the dynamics of galactic systems. This approach aims at relating the observed distribution of the dynamical properties of galaxies to the characteristics of environments. This task requires both an accurate description of the inner dynamical processes, and a good knowledge of the properties of the environment in which these galaxies are embedded. In order to fulfill these two constraints, this work relies on a hybrid approach in which the inner processes are described via the classical analytical tools of galactic dynamics, while the characteristics of the interaction are extracted from large scale simulations.

This PhD restricts itself to the interaction of dark matter halos with their environment. The exchanges (both accretion and tidal fields) between these objects with the outer medium are described via the flux of matter through the virial sphere and

the projected tidal field. Through this description, the statistical characterization of a boundary condition is sufficient to characterize the interaction. This halocentric view allows in particular to retain the angular and kinetic information required to compute the inner dynamical response of halos.

The inner dynamics is described in the regime of weak interaction through a non linear perturbative description of the response of an open non collisional system. This theory should account for a proper description of phenomena such as dynamical friction of tidal stripping. Through an extension of the standard “matrix method” which describes the dynamics in angle-action space, this technique translates directly the statistical features of the boundary into the core of the halo. This “statistical propagation” does not rely on the knowledge of the individual realizations of interacting systems, but dynamical consistency requires a full knowledge of the statistical properties of accretion, and its tidal field, together with their cross dependence (through the knowledge of temporal cross correlations). The secular evolution of the halo in the regime of recurrent interactions is also described via a quasilinear formalism. The secular evolution of the distribution function of the halo is investigated as a slow diffusion of the underlying orbits induced by the presence of the accreted material.

The properties of accretion and the tidal field are derived from a large set of cosmological simulations in order to reduce the effect of cosmic variance. These measurements yield a quantitative description of the interactions which is consistent with the diversity of configuration space. These simulations only explore the regime of weak interaction at redshifts below one. A detailed measurement of the mass flux density at the virial radius has led to a quantitative description of the level of anisotropy of accretion towards dark halos. This flux measurement was also completed by a thorough description of the satellite distribution around halos, which confirmed the excess of equatorial accretion at a level of $\sim 15\%$. It was interpreted as filamentary flows on the scales of halos. The properties of the flux densities of accreted dark matter were then investigated in more detail through a description customized to statistical propagation. The kinematic properties of particles crossing the virial radius show a clear cut between the newly accreted material and that which had already crossed the sphere at earlier time and had already interacted with the halo. This difference can be traced through their trajectories or their characteristic velocities. The angular temporal correlation of the tidal potential at the virial radius suggests that the tidal field is stationary and strongly quadrupolar, tracing the dark matter distribution in the peripheral regions of the halo. The corresponding correlations for the mass flux density show in particular time invariance of the dark matter power spectrum at the virial radius.

A short study of the distribution of metals within substructures shows how observational measurements constrain the statistical distribution of matter within the halo.

Generally, linking the statistical properties of the environment and the variety of dynamical responses should open a large field of possible applications. First the statistical distribution of dark matter within halos can be predicted through the knowledge of these fluxes. Conversely, the observational tracers of matter (X ray emission, SZ, gravitational lensing, absorption lines in QSO) provide constraints on the properties of these fluxes, but also on the underlying dark matter halo model (e.g. mass profile) and on the biases corresponding to each tracer (M/L ratios for instance). Finally, once the statistical propagation has been validated, it should be possible to dynamically invert for the past accretion history of a given halo from its current state.

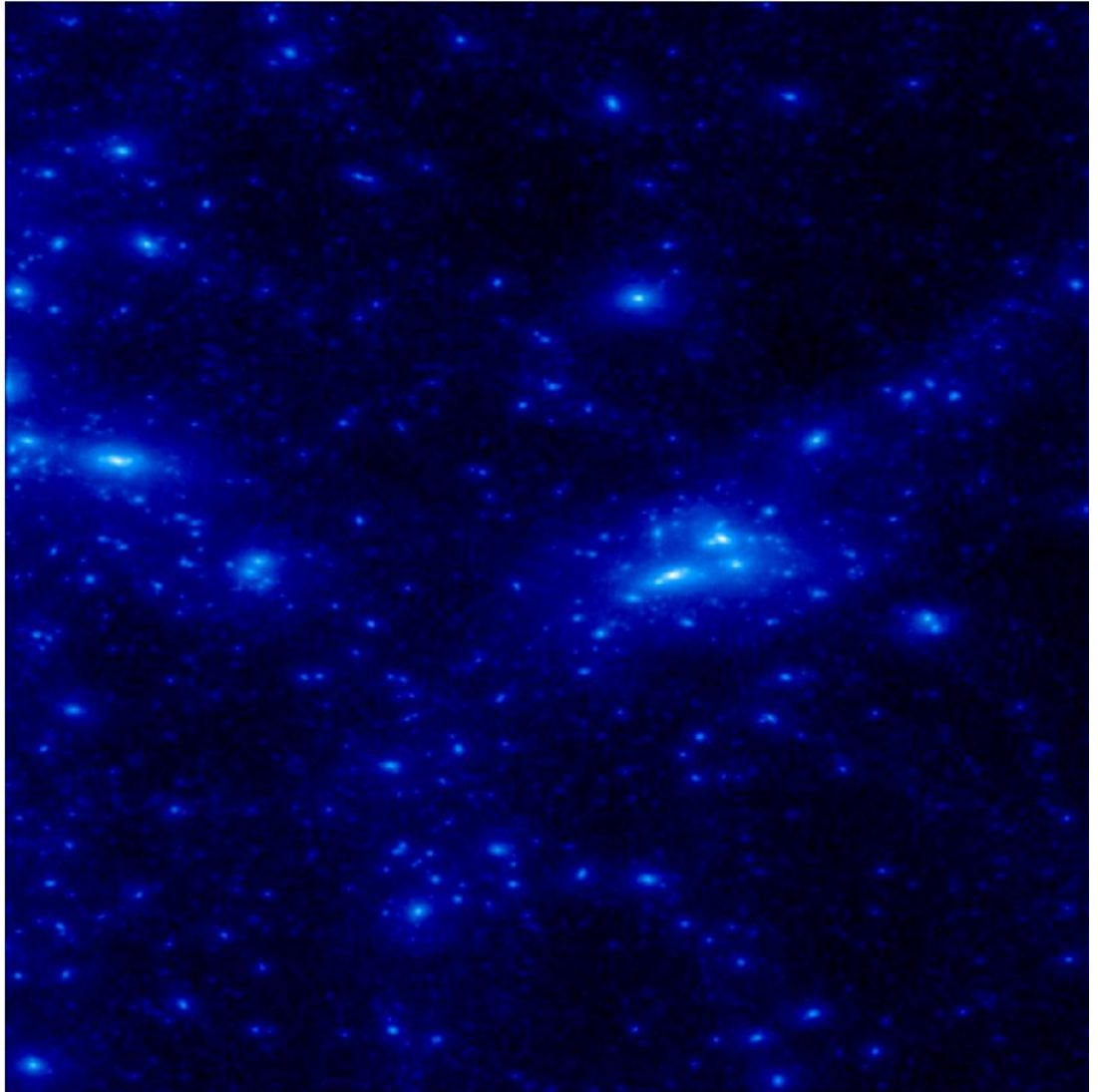


Figure 1: Halos de matière noire baignant dans des flots de sous-structures. Extrait d'une simulation 512^3 de 50 Mpc^3 produite au CINES.

1

Introduction

Le monde est plein d'engrenages qui manquent. [...] mais il me semble à moi, au moins pour ce qui en est de notre globe, que la seule chose qui le fasse tourner sans accroc, c'est le fait qu'ici et là manquent des engrenages.

Yukio Mishima.

L'astronomie a pour vertu de rester une science porteuse de sens pour chacun d'entre nous car elle reste accessible par un simple regard vers la voûte céleste. On y verra des Dragons et des Lions, Persée libérant Andromède, et l'on y rencontrera des noms aux consonances lointaines et anciennes tels des Betelgeuse, Aldebarran ou autre Altaïr. Les galaxies ne font pas exception avec des objets tels que les Antennes, les Chiens de Chasse, la Roue de Chariot, ou plus proches de nous les galaxies du Sagittaire ou du Grand Chien. Si ces noms pourront nourrir l'imagination des artistes, ils auront à l'oreille de l'astronome une signification particulière puisqu'ils désignent des *galaxies en interaction*.

Il existe de nombreux exemples de tels objets (pour une revue se reporter à Barnes & Hernquist (1992) et Irwin (1995)). Les Antennes et la Roue de Chariot apparaissent clairement comme les restes de collisions passées entre objets. Les galaxies naines du Sagittaire (Ibata et al. (1994)) et du Grand chien (Martin et al. (2004)) constituent les reliques du cannibalisme de notre Galaxie. La galaxie principale des Chiens de Chasse présente une spectaculaire réponse spirale dont l'origine peut être expliquée par la présence de son compagnon (voir par exemple Toomre & Toomre (1972) ou Howard & Byrd (1990)). Hormis ces exemples les plus marquants, il existe également toute une catégorie de traceurs plus fins d'interactions entre galaxies et environnements. La galaxie d'Andromède présente un courant d'étoile géant imputable à un de ses compagnons (Ibata et al. (2001)). Le probabilité d'un gauchissement (warp en anglais) du disque est également corrélée avec la présence de satellites ou d'autres galaxies dans son proche environnement (Reshetnikov & Combes (1998)). A l'inverse, l'absence de caractères exceptionnels de certaines galaxies est une source d'informations sur la nature

des interactions qu’elles ont pu subir par le passé (voir notamment la mise de contrainte sur l’accrétion des disques posée par l’étude de Toth & Ostriker (1992)).

Cette richesse des situations sied à la nature complexe des galaxies. Ces dernières sont mentionnées par Binney & Tremaine (1987) comme *les briques fondamentales de l’Univers* et tirent leur complexité de leur situation particulière dans la hiérarchie d’échelles qui interviennent en astronomie. Les propriétés des galaxies sont modelées dans le détail par la présence de noyaux actifs, les propriétés du gaz qu’elles contiennent, l’évolution de leurs populations stellaires, l’apparition de supernovae, l’existence d’un champ magnétique, etc... Ces phénomènes sont pour une large part *intrinsèques* aux galaxies et font appel à une physique complexe des “petites” échelles. D’autre part, les galaxies ne sont pas isolées dans leur environnement, tel qu’il a déjà été exposé. Celles-ci sont soumises à des processus *extrinsèques*, tels l’accrétion et les fusions entre objets, dont la fréquence est gouvernée par la distribution à grande échelle de la matière dans l’Univers. Etant à la fois les briques élémentaires de la physique des grandes structures, mais suffisamment complexes pour évoluer intrinsèquement, les galaxies tiennent lieu d’échelle de transition entre la physique dominée par la dynamique non-collisionnelle et la physique dominée par les baryons. Ce caractère “mésoscopique” de la physique des galaxies amène naturellement à s’interroger sur la nature “innée” ou “acquise” de leurs propriétés.

Du caractère capricieux des disques

La question de la contribution *extrinsèque* des galaxies se pose particulièrement dans le cas de leurs comportements dynamiques. Ainsi, bien que les halos de matière noire et la composante stellaire des galaxies peuvent être considérés comme des systèmes non collisionnels, l’absence d’interactions avec l’environnement ne constitue en aucun cas la garantie d’un comportement stationnaire. Par exemple, le système stellaire le plus simple que l’on puisse imaginer, le milieu homogène infini, s’avère être instable à certains types de fluctuations. Pour de tels systèmes idéalisés, toute fluctuation de taille supérieure à la longueur de Jeans λ_J croît de façon exponentielle, λ_J étant définie par

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi \sigma^2}{G \rho_0}}, \quad (1.1)$$

où ρ_0 et σ désignent la densité moyenne et la dispersion de vitesse du milieu. A ce titre, un système gravitationnel “paye” la nature purement attractive de l’interaction gravitationnelle, qui empêche la définition d’un équivalent à la longueur de Debye intervenant en physique des plasma. Bien qu’un tel système soit évidemment une vue de l’esprit, il illustre le fait que l’existence d’un état d’équilibre stable n’est en rien une évidence pour tout système gravitationnel.

L’un des exemples les plus fameux de systèmes instables est celui des disques de galaxies. Dès Hohl (1971), le caractère hautement instable fut mis en évidence pour les disques froids qui tendent à développer de fortes barres (voir aussi la figure 1.2). De même, les motifs spiraux peuvent être décrits comme des instabilités intrinsèques du disque stellaire (Kalnajs (1971)). La raison d’être d’une telle instabilité est de permettre au disque d’évacuer son moment cinétique vers les régions externes : ce flux “sortant” de moment angulaire permet au système d’atteindre des états d’entropie maximale et d’énergie minimale (Lynden-Bell & Kalnajs (1972)). Une spirale apparaît comme une

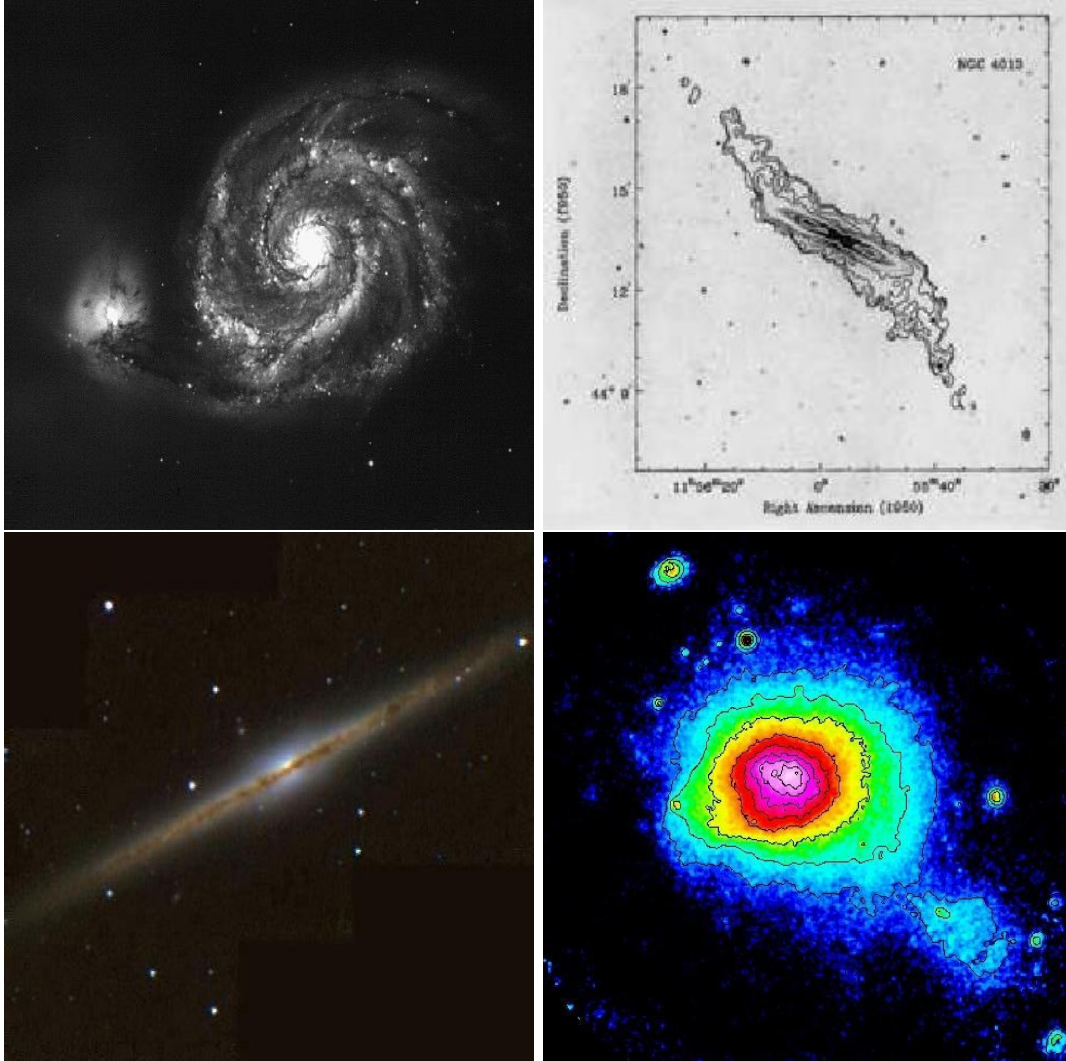


Figure 1.1: Illustration de l'importance des interactions pour les galaxies et leur halos.

En haut, à gauche : les chiens de chasses, dont le motif spiral pourrait être induit par le compagnon. *En haut, à droite* : exemple de warp (observé en HI). Les warps seraient des traceurs d'accrétion antérieures. *En bas à gauche* : à l'inverse la présence un disque mince met de fortes contraintes sur l'histoire d'accrétion. *En bas, à droite* : carte X de l'amas de Coma. La présence de sous-structures trace les processus de formation des amas et de leurs halos.

étape naturelle et inévitable du disque des galaxies. Néanmoins, certains exemples de spirales font clairement état d’interactions en cours ou passées, suggérant une contribution extérieure au développement de cette instabilité. Il a déjà été fait mention au “spirales de marées” (telle M51) qui apparaîtraient sous l’influence d’un compagnon. La présence de barres peut également conduire à l’apparition de telles structures dans les disques gazeux (Huntley et al. (1978)). Cette diversité des origines possibles des motifs spiraux place ces derniers au sein de la question de l’inné et de l’acquis des caractères des galaxies.

Quantitativement, les ondes de densité dans un disque de gaz uniforme en rotation différentielle satisfont la relation de dispersion¹ (par ex. Binney & Tremaine (1987)) :

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi\Sigma|k| + k^2c^2, \quad (1.2)$$

où Ω est la fréquence angulaire du disque, m le nombre d’onde azimuthal considéré, k le nombre d’onde radial, Σ sa densité de surface, κ la fréquence épicyclique et c la vitesse du son dans le disque. Un mode instable correspond à $(\omega - m\Omega)^2 < 0$, c’est à dire à un régime où le terme d’autogravité, $2\pi\Sigma|k|$, l’emporte sur la pression du fluide k^2c^2 et sur la force de Coriolis κ^2 . Toutefois, ces deux composantes inertielles peuvent s’opposer au développement de l’amplification collective de la perturbation sous l’effet de la force de gravitation. Même si les caractéristiques physiques du disque sont telles que celui-ci est stable, i.e. $Q \equiv \kappa c / \Sigma / \pi > 1$, il va néanmoins répondre plus ou moins violemment à une perturbation donnée, suivant ses propriétés intrinsèques (nombre de Toomre Q , forme du profil de densité, conditions aux limites etc ...), à l’amplitude ou la cadence des perturbations et la mise en jeu de résonances. Cette compétition entre différents effets implique que l’évolution des disques est difficile à prévoir sans connaître à la fois le détail de leurs caractéristiques propres mais aussi celles de l’environnement dans lequel ils sont intégrés.

L’existence d’un disque épais formé de populations stellaires âgées dans notre Galaxie soulève également de nombreuses questions quant à sa formation (cf. Gilmore & Wyse (2001) pour une revue). Burkert et al. (1992) expliquent l’existence de cette composante au travers de l’effondrement du nuage protogalactique, via des modèles chimico-dynamiques. Kroupa (2002) invoque comme possibilité le processus de formation d’étoiles qui induiraient des dispersion de vitesses susceptibles de conduire à l’apparition de ce disque épais. A ces hypothèses de nature intrinsèque s’ajoute la possibilité d’un chauffage du disque (i.e. un apport d’énergie) par accréation de satellites (par ex. Huang & Carlberg (1997), Velazquez & White (1999)). A nouveau, cette foison de modèles ne permet pas de trancher sur l’origine de cette caractéristique de notre disque.

A l’opposé, le gauchissement (ou warp en anglais), qui marque le départ à la coplanarité des disques, constitue un exemple de réponse dynamique dont la nature acquise est clairement établie. Hunter & Toomre (1969) étudièrent la possibilité pour un disque de développer intrinsèquement des modes de gauchissement. Ils mirent en évidence l’absence de modes discrets et l’existence d’un continuum de modes dispersifs, pour peu que la densité décroisse suffisamment lentement aux bords du disque. Sparke & Casertano (1988) développèrent ce concept de modes intrinsèques en prenant en compte la présence d’un halo oblat. Dans cette configuration, le non-alignement entre le plan du disque et la distribution de matière du halo autorise l’apparition de modes de gauchissement discrets et persistants. Toutefois, Binney et al. (1998) démontra que le temps

¹Une relation similaire existe pour les disques stellaires (Toomre (1964))

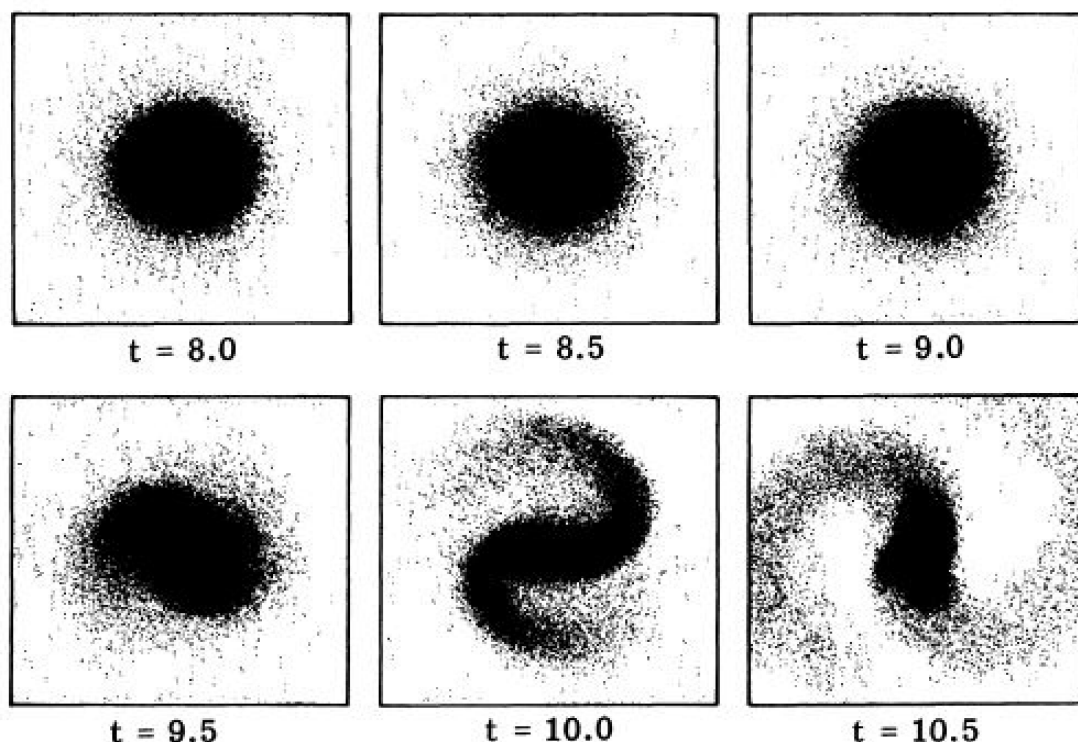


Figure 1.2: Un exemple d'instabilité violente apparaissant dans le cas d'un disque froid.
Figure extraite de Hohl (1971).

caractéristique de réalignement des halos est suffisamment court pour permettre un amortissement rapide du mode induit par le non alignement antécédent. Reste la possibilité d'un warp induit par l'accrétion de matière dont le moment angulaire n'est pas aligné avec celui du disque. Étudiée par différents auteurs (Jiang & Binney (1999), Ostriker & Binney (1989), López-Corredoira et al. (2002)), cette hypothèse ferait des warps des traceurs particulièrement important de l'accrétion de masse par les galaxies.

Une étude classique des relations entre les caractéristiques des disques et leurs environnements est celle de Toth & Ostriker (1992). Dans ces travaux, les auteurs développent des arguments assez simples sur l'impact énergétique de l'accrétion de matière par un disque. En particulier, l'accrétion de masse injecte de l'énergie dans le système et affecte la dispersion de vitesse verticale et coplanaire du disque. Ces deux effets conduisent respectivement à un épaississement du disque et à une augmentation du paramètre de stabilité Q . En se basant sur l'observation du disque de notre Galaxie, les auteurs placent une limite supérieure $\Delta M/M \sim 4\%$ sur la quantité de masse accrétée durant les 5 derniers milliard d'années. Il s'avère que cette quantité de masse est très inférieure à l'accrétion typique d'une galaxie déduite des modèles cosmologiques dont la densité est égale à la densité critique ($\Omega = 1$) et qui étaient favorisés à cette époque. Par conséquent la fréquence observée de disques spiraux minces ne pouvait être expliquée. Les auteurs remarquèrent également qu'un univers moins dense aurait en revanche satisfait les limites imposées par l'observation de notre disque. Au vu du modèle de concordance actuel,

cette conclusion de Toth & Ostriker (1992) illustre les possibilités ouvertes par la confrontation de modèles de dynamiques galactiques et conditions aux bords cosmologiques.

Une description statistique des propriétés dynamiques ?

Dans un esprit similaire à Toth & Ostriker (1992), cette thèse est dédiée à l'exploration statistique des relations entre la dynamique des systèmes galactiques et leurs environnements. Sans nier le caractère spécifique de "l'histoire dynamique" de chaque galaxie, l'idée qui sous-tend les travaux présents est que les interactions entre galaxies et environnements sont caractérisables statistiquement (en termes d'amplitude, de fréquence, de configuration spatiale), permettant de prédire quelles vont être *les distributions* des marqueurs de ces interactions sur la dynamique des objets.

La démarche est classique : quel va être l'évolution d'un système soumis à certaines conditions aux bords ? Un exemple astrophysique de cette démarche est l'évolution des surdensités initiales de l'Univers sous l'action de la gravitation. Les conditions limites sont décrites par un champ de fluctuation primordial, tandis que les équations d'évolution d'un tel champ sont connues dans certains régimes (cf. par exemple Peebles (1980), Peacock (1999), Bernardeau et al. (2002)). La connaissance de ces deux "concepts" (conditions aux bords et équations d'évolution) permet de décrire complètement l'évolution du système de façon déterministe. Toutefois, cet exemple possède une spécificité liée au fait que c'est l'évolution d'une propriété *statistique*, le spectre de puissance $P(k)$, qui est généralement étudiée.

Est-il possible de transposer cette méthode aux propriétés dynamiques des galaxies ? En d'autres termes :

- *Quelles sont les conditions aux bords qui façonnent les propriétés dynamiques d'une galaxie et comment les contraindre statistiquement ?*
- *Comment les équations de la dynamique peuvent-elles être utilisées pour prédire les distributions statistiques de certaines propriétés des galaxies ?*

Ces deux interrogations ont pour objectif de vérifier si notre compréhension de la dynamique et des environnements permet de retrouver les distributions des caractéristiques dynamiques des objets observés. A l'inverse elle permettront de voir si cette même compréhension permet de mettre des contraintes sur l'environnement à partir de ces observations.

L'analogie avec le cas cosmologique reste néanmoins une analogie de principe et le cas "galactique" se situe à un niveau de complexité différent. Les halos ne peuvent pas par exemple être assimilés à des milieux uniformes, froids et isotropes. Les conditions aux bords ne sont pas de type "initiales" mais plutôt des conditions aux frontières, dont les propriétés évoluent au cours du temps. De plus ces conditions aux bords dépendent du système qui est étudié et un amas n'aura pas le même environnement qu'une galaxie de champ. Enfin la dynamique d'un système galactique est très différente de celle d'une boîte d'univers puisque les trajectoires ne peuvent jamais y être considérées comme balistiques et que les phénomènes résonants entre orbites y sont prépondérants.

Conscient de toutes ces difficultés, l'ambition de cette thèse est néanmoins d'explorer les voies qui permettent d'avoir une approche *représentative* et *cohérente* de la dynamique des galaxies, façonnées par leurs interactions avec leur environnement. La

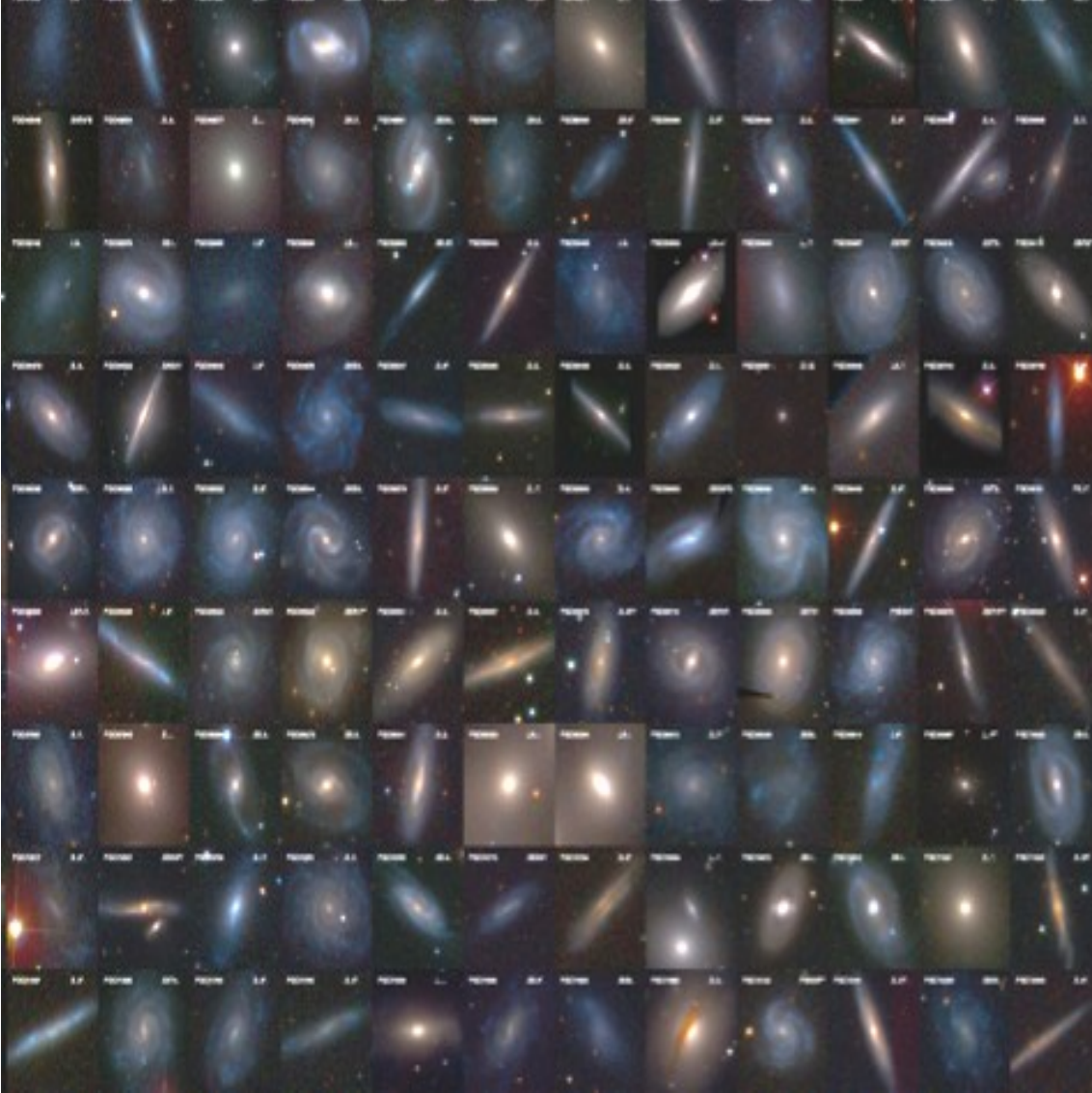


Figure 1.3: Illustration de la diversité des propriétés des galaxies issues du SDSS. Chaque une de ces images ont été remises à l'échelle avec une même valeur du profil de brillance en bord de vignette. Le traitement des couleurs est identique pour toutes les galaxies présentées ici. Figure reproduite avec la permission de E. Bertin.

cohérence exige que cette même approche puisse décrire correctement les processus dynamiques complexes qui interviennent au sein des systèmes galactiques. La représentativité sous-entend qu’une “bonne” approche doit être en mesure d’explorer efficacement l’ensemble des configurations de ces interactions. A ce titre, elle doit pouvoir fournir des distributions de caractéristiques dynamiques des systèmes soumis à ces environnements. L’une des tentatives les plus “spectaculaire” de réponse à cette double exigence est la description cosmologique de la formation des galaxies via des simulations numériques. Cette approche est décrite dans la section suivante.

1.1 Formation cosmologique des galaxies et de leurs halos

Il est tentant d’énoncer que la cosmologie dicte les conditions aux bords auxquelles sont soumises les galaxies. Le gauchissement du disque (*warp* en anglais), les spirales, l’épaississement du disque, l’orientation ou l’élongation du halo sont autant de caractéristiques qui peuvent être reliés d’une façon ou d’une autre à la distribution à grande échelle de la matière. En effet les grandes structures façonnent d’une façon ou d’une autre la taille des objets, leur fréquence de fusion ou leur propriétés cinématiques qui influent sur les propriétés finales des galaxies. Pour cette raison, les systèmes galactiques sont considérés dans cette thèse plongés dans un *contexte cosmologique*.

Les quelques dernières années ont vu l’émergence du modèle cosmologique dit de “concordance”. Que ce soit par la mesure des distances de supernovae (Perlmutter et al. (1999) par exemple), la détermination des effets d’astigmatisme cosmique à grande échelle (Van Waerbeke et al. (2002) par exemple) ou les mesures récentes des fluctuations du fond diffus cosmologique (par exemple Bennett et al. (2003), Spergel et al. (2003)), les observables tendent à privilégier le modèle dit Λ CDM, dominé par la matière noire froide et dont la dynamique fait intervenir une constante cosmologique non nulle. De prime abord, les échelles concernées par ce type de modèles sont bien supérieures à celle qui interviennent dans les processus de formations des galaxies et de leurs halos. Néanmoins, les processus de formation des structures font que la dynamique de croissance des perturbations propage les caractéristiques du modèle cosmologique jusqu’aux plus petites échelles. Le modèle de matière noire chaude, longtemps envisagé comme une possibilité, a été par exemple écarté notamment pour son incapacité à fournir suffisamment de puissance aux petites échelles.

L’une des spécificités du modèle dominé par de la matière noire froide est de conduire à une formation hiérarchique des petits objets vers les grands objets. Les halos de matières noires s’y forment par assimilation progressive d’objets moins massifs; l’apparition de ces derniers précède au cours du temps celle des objets plus importants (White & Rees (1978)). De ce fait, ces modèles placent les interactions au coeur du processus de formation des galaxies.

Modèles hiérarchiques

Une fraction importante des résultats obtenus sur ces processus hiérarchiques ont impliqué la mise en place de simulations cosmologiques (voir par exemple les revues Bertschinger (1998), White (1994)). Historiquement, ces études se concentrèrent en premier lieu sur la dynamique de la matière sombre et abordèrent la dynamique des

galaxies via l'étude des propriétés de leur halos. Parmi les résultats remarquables obtenus par ces méthodes, l'un d'entre eux fut l'émergence de modèles "universels" pour les caractéristiques de ces objets. Le plus connu d'entre eux est le profil de densité universel, dit "Navarro, Frenk & White" (NFW) proposé par Navarro et al. (1996) et Navarro et al. (1997) :

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (1.3)$$

où ρ_c désigne la densité critique, r_s un rayon de transition et δ_c une densité caractéristique qui est fonction de r_s . Pour une masse de halo donnée, ce profil ne dépend que d'un seul paramètre, la concentration $c = R_{200}/r_s$, reflétant la densité à l'époque de formation du halo. D'autres profils piqués ont également été suggérés par d'autres auteurs mais toujours en prétendant à un caractère d'universalité (par ex. Moore et al. (1998), Fukushige & Makino (1997)). Cette "constance" s'étend à d'autres propriétés des halos telles que le profil de moment angulaire au sein des halos (Bullock et al. (2001)) ou l'histoire d'accrétion de masse (van den Bosch (2002), Wechsler et al. (2002)), dont les formes fonctionnelles dépendent peu du halo considéré. La distribution préférentiellement triaxiale de matière au sein des halos constitue également un caractère récurrent observé dans les objets formés dans de telles simulations (par ex. Frenk et al. (1988)). Ces caractéristiques "constantes" observées pour les halos sont expliquées en partie par leurs interactions avec l'environnement. Ainsi, le profil universel de moment angulaire peut s'exprimer en terme de couples exercés sur le halo au moment de sa plus grande expansion avant effondrement (White (1984)) et en terme de moment angulaire déposé par des satellites accrétés (Maller et al. (2002)). De même, la triaxialité des halos est corrélée avec la distribution environnante de satellites (par ex. Tormen (1997)). Enfin, le profil piqué des halos peut s'interpréter comme le résultat d'accrétion de satellites (par ex. Fukushige & Makino (2001)) tandis que le facteur de concentration reflète la densité critique au moment de la formation du halo (Wechsler et al. (2002), Navarro et al. (1997)). En résumé, les principales caractéristiques des halos de matière noire simulés peuvent s'expliquer au vu de l'histoire hiérarchique de leurs interactions.

Pour simplifier, la formation cosmologique de galaxies au sein de ces halos est étudiée essentiellement suivant deux approches. La première consiste à modéliser directement le comportement de la matière baryonique couplée à la matière noire au sein des simulations. Parmi les codes disponibles, citons par exemple ENZO (Bryan & Norman (1997)), RAMSES (Teyssier (2002)) ou GADGET2 (Springel et al. (2001)). De telles simulations sont actuellement capables d'inclure la formation d'étoile, le rayonnement UV, les effets de rétroaction imputables aux supernovae et permettent d'étudier directement les influences réciproques de la matière baryonique et non baryonique. Les capacités de calculs et les résolutions atteintes actuellement sont telles que les codes les plus performants parviennent à modéliser directement des disques au sein des halos de matière noire.

La seconde approche est similaire dans l'esprit à celle qui va être développée dans cette thèse pour la dynamique des halos de galaxies. Elle est dite "analytique" et est basée sur la connaissance de l'histoire de formation et de fusion des halos de matière noire. Cette information amène à déduire les propriétés des galaxies qui s'y trouvent à partir de modèles simples. Ainsi, la distribution des galaxies et leur propriétés peuvent être *prédites*, en couplant ces histoires de formations avec des prescriptions sur la quantité de gaz emportée par ces halos, son refroidissement, le transfert de moment

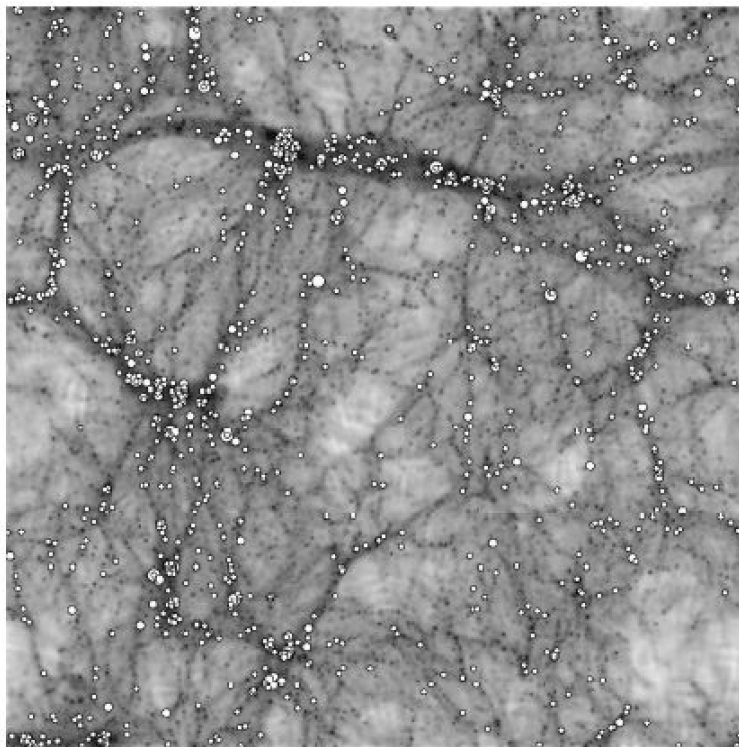


Figure 1.4: Distribution des galaxies IR dans une simulation de matière noire. Les cercles désignent les positions des galaxies qui ont été modélisée avec le code semi-analytique GALICS. Figure extraite de Hatton et al. (2003).

angulaire du gaz lors de la formation du disque et la formation d'étoiles (par ex. Cole et al. (1994)). Les fusions successives subies par les halos sont susceptibles d'enrichir les disques formés en gaz ou de les détruire en cas de trop fortes interactions, amenant à la formations d'elliptiques. L'histoire de formation des halos y est modélisée par un *arbre de fusion* (par ex. Roukema et al. (1997), Kauffmann & White (1993), Somerville & Kolatt (1999)). Cet arbre de fusion peut être obtenu analytiquement via le formalisme de Press-Schechter étendu (Bond et al. (1991), Lacey & Cole (1993)), dans lequel est prédite la probabilité $P(m_1, z_1 | m_2, z_2)$ de trouver une particules dans un halo de masse m_1 à un redshift z_1 sachant qu'elle se trouvait dans un halo de masse m_2 à z_2 . Une alternative consiste à remplacer ces arbres de fusion analytiques par l'histoire de formation de halos issus directement de simulations cosmologiques, tout en leur appliquant les mêmes recettes simples qui permettaient de peupler de galaxies les halos "analytiques" (par ex. Kauffmann et al. (1999), Benson et al. (2001), Hatton et al. (2003)). De tels modèles "semi-analytiques" sont en mesure de prédire les distributions statistiques (via le grand nombre d'histoires de formations) et spatiales (via la génération de cartes synthétiques) des propriétés observées des galaxies (voir aussi la figure 1.4). La prise en compte des phénomènes stellaires dans ces modèles les destine par exemple à la prédiction de fonctions de luminosité et aux études de corrélations et de biais en fonction du type de galaxie.

Des difficultés rencontrées aux petites échelles

Toutefois, il s'avère que certaines propriétés des disques et halos simulés ne sont pas conformes à celles observées dans le ciel. Parmi celles-ci, on peut mentionner le problème du “refroidissement catastrophique” du gaz dans les halos (par ex. Navarro et al. (1995), Navarro & Steinmetz (1997)). Le temps caractéristique de refroidissement du gaz est d'autant plus court que celui-ci est dense et par extension l'efficacité de ce processus est plus importante à haut redshift au sein de halos (et d'un univers) plus denses. Il apparaît que ce refroidissement est si efficace que tout le gaz doit invariablement finir emprisonné au fond du puits de potentiel des halos. Les densités atteintes seraient suffisantes pour permettre une conversion totale du gaz en étoiles et empêcher ainsi la formation de disques gazeux. De plus, une fraction importante du moment angulaire des baryons est cédée au halo, compte tenu du niveau élevé des densités de gaz en jeu. Par conséquent, le moment angulaire des disques susceptibles de se former à partir de ce matériau est particulièrement faible, conduisant à des disques trop petits par rapport aux disques observés. Cette difficulté est contournée en invoquant des processus de rétroactions tels que les vents stellaires ou les supernovae, dont l'énergie libérée est suffisante pour chauffer le gaz et empêcher cet effondrement catastrophique. Cette problématique illustre clairement les difficultés rencontrées lors de la modélisation de galaxies en formation et résulte plus d'une connaissance imparfaite des processus de formations stellaires ou de la physique du gaz que d'une remise en cause du modèle d'émergence des structures.

Il existe cependant toute une classe de problèmes toujours non résolus et dont la nature est davantage reliée au modèle cosmologique sous jacent. L'une des particularités du modèle de matière noire froide est sa capacité à fournir un grand nombre de structures à petites échelles. De fait, les simulations de halos comparables à celui de notre Galaxie font apparaître un nombre de satellites de l'ordre de plusieurs centaines (Moore et al. (1999), Klypin et al. (1999)), bien supérieur aux quelques galaxies satellites qui peuvent être observées localement (voir aussi la figure 1.5). A nouveau, les processus de rétroaction peuvent être invoqués pour supprimer la formation d'étoiles dans les satellites les moins massifs (Stoehr et al. (2002)), mais le type d'objets concernés reste discuté (Kazantzidis et al. (2004)). Si les courbes de rotations des galaxies à faible brillance de surface (LSB) sont compatibles avec les modèles NFW (Hayashi et al. (2004)), celles des galaxies spirales naines indiquent la présence d'un profil de matière noire de type isotherme à “cœur constant” (par ex. Flores & Primack (1994), Moore (1994)), et non un profil piqué comme mesuré dans les simulations. Ce paradoxe pourrait être à nouveau réglé par des processus de rétroaction violents éjectant de la masse hors de l'objet et conduisant à une réorganisation de la matière interne (par ex. Navarro et al. (1996)). Au vu de ces quelques exemples, il apparaît clairement que les succès remportés par le modèle Λ CDM aux très grandes échelles ne se transposent pas aisément aux échelles des halos et des galaxies. Dans la mesure où ces échelles font intervenir à la fois des phénomènes baryoniques mal contraints et des processus non collisionnels aux limites de la résolution actuelle des simulations, l'apparition de quelques difficultés n'est ainsi pas surprenante. Dans ce contexte, le lien entre les phénomènes “galactiques” et les contraintes aux bords “cosmologiques” n'est pas complètement établi au sein des simulations.



Figure 1.5: Simulations (matière noire pure) d'un halo de galaxie et d'un halo d'amas. Plusieurs centaines de sous-structures sont détectables dans les deux cas. Cette différence entre les simulations et le nombre de galaxies satellites effectivement observé reste à être complètement expliqué. Figure extraite de Moore et al. (1999).

1.2 De la Cosmologie au Halos de matière noire

Les simulations cosmologiques sont capables de fournir un grand ensemble de configurations d'interactions. Ces configurations sont par essence conformes au processus de formations des grandes structures et reflètent les distributions d'orientations, d'échelles et de temps caractéristiques impliquées. A ce titre la description des environnements des systèmes galactiques via des simulations répond au critère de représentativité. Toutefois, les difficultés rencontrées aux plus petites échelles par ces modèles ouvrent la possibilité d'explorer par d'autres voies la dynamique interne des objets. C'est pourquoi cette thèse propose de combiner une description cosmologique des conditions aux bords à une description analytique de la dynamique interne des systèmes galactiques.

Dans une approche combinée “simulations cosmologiques” - “dynamique galactique”, l'échelle spatiale qui émerge naturellement est l'échelle du halo de matière noire. La galaxie qui est enfouie au sein du halo ne percevra des perturbations (un champ de marée ou une accréation) que si celles-ci ont pu se propager au travers du halo. A supposer qu'une perturbation “cosmologique” parvienne au disque, ses propriétés auront été passées au filtre de l'action du halo, via des processus de polarisation ou de friction dynamique par exemple. De ce fait, le halo domine la dynamique lors de la transition entre les échelles cosmologiques (~ 10 Mpc) et les échelles des disques de galaxies (~ 10 kpc). Pour cette raison, ce manuscrit se focalisera essentiellement sur la dynamique du halo de matière noire, que ce soit en tant que composante des systèmes galactiques modelée par l'environnement ou en tant que propagateur des propriétés à grande échelles jusqu'aux échelles des galaxies. Enfin, compte tenu que la dynamique du halo à ces échelles est dominée par la matière noire, la dynamique du gaz n'entrera pas en compte dans le cadre de ce manuscrit².

L'objectif à terme est de parvenir à reproduire les distributions des propriétés des galaxies visibles, avec une emphase sur les caractéristiques dynamiques *fin*es. Ces dernières sont définies dans ce manuscrit comme des départs de faible amplitude au comportement à l'équilibre d'objets déjà formés. En revanche, il ne s'agit pas de reproduire des caractéristiques tels que la masse totale du disque ou la nature “disque” ou “elliptique” d'une galaxie. En d'autres termes, cette démarche se situe en fin du processus de formation hiérarchique des halos, et est motivée par la volonté de répondre à la question de la nature *innée* ou *acquise* des caractéristiques des galaxies qu'ils englobent.

Ainsi, nombres de phénomènes observés n'offrent toujours pas de réponse claire à cette question et ceux-ci appartiennent à la classe des propriétés fines des galaxies. A contrario, il est clair aujourd'hui que les caractéristiques globales telles que la masse ou le caractère elliptique d'une galaxie sont de l'ordre de l'acquis. De plus, un autre des objectifs est de pouvoir remonter à l'histoire d'une galaxie ou de son environnement via l'observation détaillée de ses caractéristiques actuelles. Il est clair que les interactions violentes avec l'environnement empêchent une telle démarche car elles sont susceptibles d'effacer toute trace d'évolution antérieure et tout caractère fin des objets considérés. Pour ces raisons, les recherches présentées ici se placent d'emblée dans le cadre d'objets déjà formés et ne subissant plus de fortes interactions.

² hormis le dernier chapitre portant sur la distribution des métaux dans le milieu inter galactique, ce chapitre se situant “à part” dans le fil conducteur de cette thèse.

Dynamique à l'échelle des halos

Les recherches présentées dans cette thèse se limitent aux interactions entre l'environnement et le halo, sans considérer pour l'instant les autres composantes des galaxies. Il n'en reste pas moins que l'influence des halos de matière noire est primordiale dans le comportement dynamique des disques, que ce soit sur leur dynamique propre ou sur leur capacité à véhiculer les perturbations extérieures. Par exemple, un halo massif participe à la stabilisation d'un disque (voir par exemple Ostriker & Peebles (1973)) tandis que les transferts d'énergie entre le halo et le disque favorisent l'amortissement des effets de gauchissement (Nelson & Tremaine (1995)). De plus, le halo fait office de milieu transmetteur entre le disque et l'environnement des systèmes galactiques : toute accréation par le disque doit porter les traces de son passage au travers du halo. Pour ces raisons, l'étude de sa réponse et de son influence sur la transmission au disque de perturbations extérieures est indispensable et se doit d'être abordée avant d'entamer l'étude plus complexe de la dynamique du disque.

Les études de stabilité des halos remontent à Antonov (1960), qui démontra la stabilité à tout type de perturbations pour une certaine classe de systèmes stellaires sphériques à dispersion de vitesses isotropes³. Une large fraction des études portant sur la stabilité linéaire des halos s'est faite en utilisant la "méthode matricielle", basée sur la projection des équations de la dynamique sur une base appropriée et décrite en détail dans ce manuscrit. Développée à l'origine pour l'étude de la stabilité des disques par Kalnajs (1977a), l'extension de cette méthode aux systèmes sphériques (originellement par Polyachenko & Shukhman (1981)) s'est révélée riche en résultats sur la compréhension des interactions entre un halo et son environnement. Les instabilités qui apparaissent par exemple pour les systèmes à dispersion de vitesse anisotrope ont été étudiées via cette méthode par Palmer & Papaloizou (1987), Saha (1991) et Weinberg (1991) entre autres. Parmi ces études de stabilité, il convient de mentionner les travaux de Weinberg (1994) et Murali (1999) qui mettent en évidence l'existence de modes "faiblement" amortis dont le temps de persistance est long en regard des temps caractéristiques du système. L'existence de tels modes implique que les systèmes à priori stables sont également en mesure de transmettre les perturbations dues aux environnements jusqu'aux disques centraux. Enfin, il faut noter que ces modes sont susceptibles d'être excités de façon récurrente par le "bruit" induit par le passage ou la chute de satellites. Compte tenu de leur caractère faiblement amorti, de tels modes sont susceptibles de faire tendre asymptotiquement le halo vers une forme "universelle", dépendant uniquement du comportement de ces modes (Weinberg (2001a), Weinberg (2001b)) et non de la nature des interactions. Ce type d'étude apporte un éclairage nouveau sur l'existence de profils universels des halos dans les simulations cosmologiques.

Dans cette thèse, les calculs de la réponse du halo sont basés sur cette méthode matricielle. Le choix d'utiliser une méthode analytique pour aborder la dynamique du halo n'est pas dicté par une volonté d'éviter à tout prix l'utilisation de simulations numériques de galaxies ou des resimulations. Il s'avère que les méthodes de propagation linéaire sont aussi performantes que les simulations dans certains contextes (cf. par exemple le chapitre sur la croissance adiabatique du disque), notamment avec les moyens de calculs actuels. Ceci est dû au fait que les méthodes analytiques s'adaptent à la problématique qui est abordée, e.g. via un choix de modèle à l'équilibre du halo, de base

³Caractérisés par une fonction de distribution ne dépendant que de l'énergie $F(E)$ et $dF/dE < 0$

de projection ou d'échantillonnage temporel. Le prix à payer est une certaine rigidité de la méthode comparée à la souplesse des simulations numériques, car elle nécessite que le cadre dynamique de l'étude soit bien fixé. Si c'est le cas, les méthodes de stabilité sont plus rapides, plus simples et peuvent atteindre des résolutions spatiales équivalentes à bon nombre de simulations.

Friction dynamique et non linéarité

Le rôle du halo est également fondamental dans le processus d'accrétion des objets par les galaxies, au cours duquel le halo réagit et influe sur le comportement de cet apport de matière. Hormis le mélange de phase qui intervient même en l'absence de traitement auto-gravitant du halo, le processus clé est celui de la friction dynamique, établi pour la première fois par Chandrasekhar (1943), pour un milieu stellaire homogène et isotrope. Dans cette description, une "étoile" se déplaçant dans ce milieu doit subir une décélération due à la déflexion des étoiles du milieu environnant dans le sillage de l'étoile en mouvement. Cette polarisation du milieu derrière le corps en mouvement induit une force de rappel dont l'intensité dépend de la vitesse de ce corps. Cet effet peut être étudié dans des géométries plus complexes que ce soit via des méthodes analytiques (par exemple Tremaine & Weinberg (1984), Seguin & Dupraz (1994)) ou par des simulations numériques (par exemple Jiang & Binney (2000))). Les effets de la friction dynamique sur un objet entrant dans un halo sphérique impliquent une perte de masse du satellite et une "chute" de ce dernier au fond du puit de potentiel du halo (voir aussi la figure 1.6). En revanche, il a souvent été fait mention d'un effet circularisant de la friction dynamique sur l'orbite du satellite (par ex. Ibata & Lewis (1998)) or ce phénomène a été remis en cause récemment par le biais de méthodes numériques (Hashimoto et al. (2003)) et semi-analytique (Colpi et al. (1999)), dans lesquelles aucune circularisation notable des trajectoires n'a pu être détectée.

On rappelle l'exigence initiale de cohérence de la description dynamique interne. Au vu de l'importance des phénomènes de friction, une telle description doit pouvoir être en mesure de reproduire ces effets complexes. Or, les études théoriques mentionnées précédemment n'ont abordé cette problématique que sous son aspect "linéaire" en obtenant uniquement l'expression de la force de rappel sur la perturbation et non son effet sur la perturbation. La prise en compte de cette rétroaction implique une description dynamique *non-linéaire*. Cette extension du régime d'utilisation de la méthode matricielle est obtenue en appliquant une description perturbative des équations de la dynamique. Si la méthode linéaire est plus simple et plus directe, seule la dynamique non linéaire satisfait la condition de cohérence.

1.3 Une approche hybride pour une étude statistique

Les recherches présentées dans cette thèse ont pour objectif de fournir un cadre théorique global à l'étude des systèmes galactiques en interaction avec leurs environnements. L'objectif est de pouvoir relier les distributions statistiques des propriétés dynamiques du halo aux propriétés statistiques des environnements. Une telle approche devra permettre de prédire les caractéristiques dynamiques des systèmes dynamiques, connaissant les environnements auxquels ils sont soumis. A l'inverse, elle doit également permettre de remonter aux propriétés des environnements à partir de certaines car-

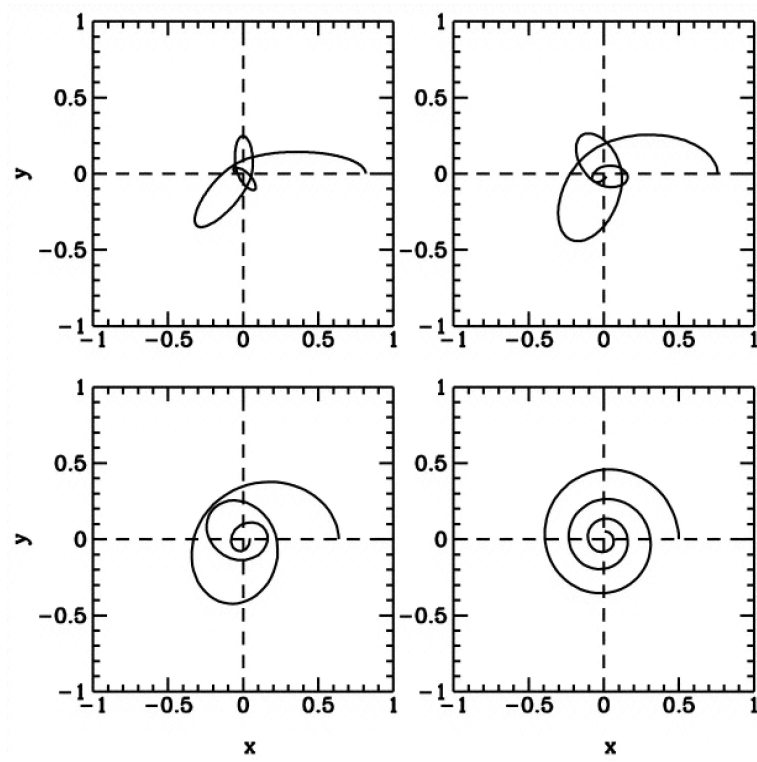


Figure 1.6: Trajectoires de satellites subissant la friction dynamique au sein d'un halo de matière noire, pour différents jeu de conditions initiales. Sous l'effet de la friction, les satellites "tombent" au fond du puit de potentiel du halo. Figure extraite de Colpi et al. (1999)

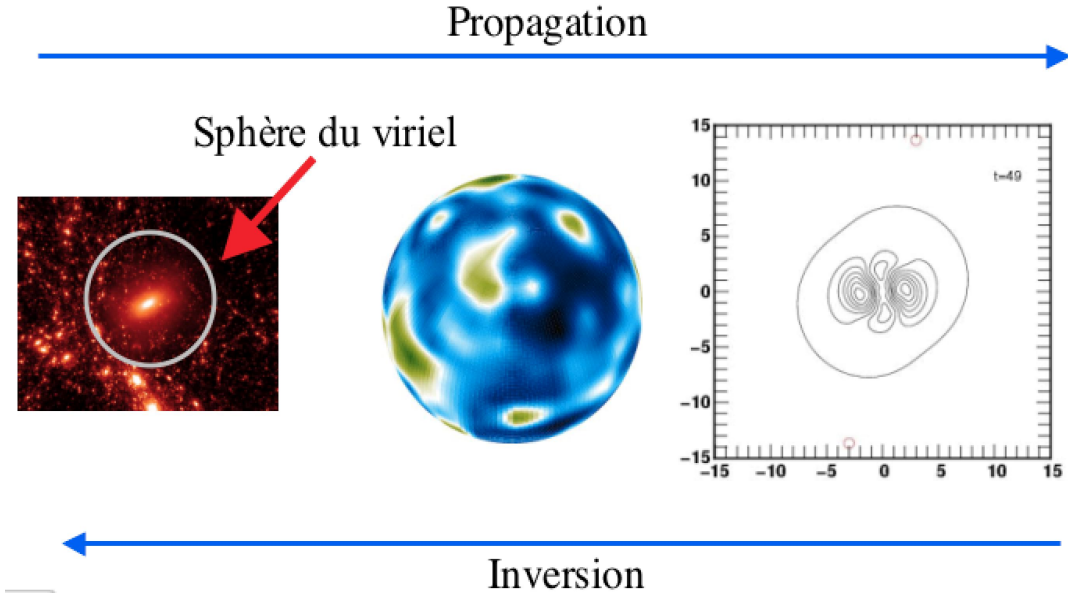


Figure 1.7: Principe schématique de l'approche hybride explorée dans ce manuscrit. Cette approche est constituée de trois étapes : génération d'environnements de halos à partir de simulations, mesure des flux à la sphère de viriel et calcul de la réponse du halo en théorie perturbative. La propagation consiste à déduire les propriétés des halos connaissant les environnements. Cette propagation peut se faire de façon statistique, sans passer par les réponses individuelles des halos. Les caractéristiques statistiques des halos se déduisent directement de ces mêmes caractéristiques pour les environnements. La déduction des propriétés environnementales à partir de l'état du halo est également possible en principe, via l'inversion dynamique.

actéristiques dynamiques observées. La mise en place de ce cadre repose sur trois axes de recherches qui devront permettre à terme d'aborder cette problématique de façon globale (voir aussi le schéma 1.7) :

- Génération d'environnements “cosmologiques” de halos à partir de simulations à grande échelle,
- mesure des interactions entre halos et environnements via une description statistique des *flux* au travers de la sphère de Viriel,
- description analytique de la dynamique des halos devant permettre de relier la distribution des propriétés des halos aux propriétés statistique des flux.

Simulations et Environnements

Le premier axe repose sur le fait que le halo est considéré comme baignant dans un environnement cosmologique. Pour les travaux de cette thèse, ce contexte est fourni par des simulations numériques à grande échelles, de matière noire pure, au sein desquelles apparaissent des halos. Le proche environnement simulé de ces objets fournit des réalisations

réalistes des propriétés du champ de marée et de l'accrétion par les halos. Le fait d'utiliser les simulations comme entrées de modèles analytiques n'est pas une nouveauté en soi puisqu'il est à la base des modèles semi-analytiques de formations des galaxies. L'originalité de l'approche développée ici réside dans le fait que l'information spatiale de l'environnement est consignée puisque indispensable à la résolution de la dynamique du halo. Une fois contraint le contexte cosmologique des halos, celui-ci pourra être utilisé comme entrée du modèle de réponse du système.

Interactions et flux

La mise en commun d'une description analytique de la dynamique interne avec une description cosmologique de l'environnement conduit à une approche hybride qui amène naturellement à définir les concepts d'un "intérieur" et d'un "extérieur". L'intérieur est défini par la région à laquelle s'applique la description analytique tandis que l'extérieur désigne la région décrite par la "cosmologie". Cette distinction conduit à imaginer une interface au travers duquel s'opèrent les échanges entre environnements et systèmes galactiques. Conceptuellement, cette dichotomie peut paraître artificielle : par exemple, où placer cette interface symbolisant les limites du halo ? Ce choix relève d'un certain arbitraire et celui qui a été fait dans cette thèse est de placer cette frontière au rayon de Viriel du halo. Néanmoins, la définition d'une interface est essentielle dans la démarche présentée ici car elle permet de réduire l'étude des interactions à un problème contraint par des conditions limites. Compte tenu du choix de la frontière au rayon de Viriel, la géométrie des flux est *sphérique* et conduit à une vision *halocentrique* des environnements.

L'existence d'une telle frontière conduit à définir deux types d'interactions. D'une part les halos interagissent "à distance" via le champ de marée créé par la distribution de matière "extérieure" au bords du halo (passage de satellites à distance, grandes structures). Ce type d'interaction est celui traité originellement par la méthode matricielle, où une perturbation n'est visible qu'au travers du potentiel gravitationnel qu'elle génère. L'autre type d'interaction est celui induit par l'accrétion de matière par le halo, au travers de l'interface d'échange. Au sein des simulations, l'accrétion est généralement décrite en terme de satellites assimilés par le halo (par ex. Knebe et al. (2004), Gill et al. (2004)). Certaines études se sont également attachées à étudier les spécificités de la composante dite "diffuse" composée d'objet non virielisée (par ex. Katz et al. (2003), Murali et al. (2002)). Dans cette thèse, l'accrétion par les halos est décrite par un "fluide de matière noire", défini dans l'espace des phases. D'un point de vue pratique, cette approche permet de formaliser l'accrétion de façon globale : les accrétion diffuses et virielisée ne se distinguent que comme deux "phases" différentes de ce fluide.

Cette description fluide de l'accrétion s'adapte naturellement à une description sous forme de champs sphériques définis à l'interface délimitant le halo. L'accrétion est décrite en termes d'un flux de matière au travers de cette surface, advectant de la masse, de l'énergie ou du moment angulaire. Ces flux conduisent à l'expression d'un terme *source* qui intervient directement dans le calcul de la réponse du halo ouvert et décrivant l'accrétion dans l'espace des phases. Dans le même temps, le potentiel "extérieur" mentionné précédemment peut être entièrement défini sous la forme d'un champ mesuré à cette même interface. Par conséquent, un halo ne perçoit son environnement qu'au travers des propriétés de ces champs sphériques, de nature sensiblement

complexe et décrivant à la fois les interactions directes et à distance. Cette description “halocentrique” permet de limiter la connaissance des propriétés des environnements aux flux qu’ils induisent au travers des limites du halo. La statistique de ces champs doit permettre de prédire les distributions des propriétés des halos soumis.

Propagation statistique

Le troisième des objectifs consiste à établir un formalisme de la dynamique non linéaire du halo qui permette la propagation statistique des conditions aux bords façonnées par l’environnement. Il sera démontré dans ce manuscrit que le modèle linéaire et non linéaire est capable de prédire non seulement le comportement dynamique d’un halo donné à un environnement donné mais également de prédire des distributions de propriétés des halos. En d’autres termes, les grandeurs statistiques caractéristiques de la réponse du halo s’exprime en fonction de celle des flux auxquels ils sont soumis. A ce titre, cette méthode dispense une approche *représentative* de la dynamique des halos.

De plus, elle fait du halo un véritable milieu transmetteur, au travers duquel le champ de marée externe et l’accrétion limitrophe sont communiqués aux régions les plus internes. Ainsi, les conditions limites auxquels les disques sont soumis peuvent être reconstruites jusqu’à un horizon temporel, qui reste certes à définir. Cette chaîne de transmission du “bruit cosmologique” aux disques de galaxies devrait permettre à terme de retrouver ou de prédire les distributions observées de certaines propriétés dynamiques des galaxies.

1.4 Des travaux présentés dans ce manuscrit

Les travaux décrits dans les chapitres suivants visent à explorer les différents aspects de la mise en place de l’approche hybride décrite dans cette introduction. Le manuscrit s’articule autour de deux parties d’importances inégales, reflétant la nature des travaux réalisés durant cette thèse.

La première partie de ce manuscrit porte sur l’extension des modèles analytiques de réponse des halos au régime non linéaire et ouvert. Les détails de la théorie ainsi que le détail de la propagation statistique y sont résumés. Le régime d’évolution séculaire du halo est également abordé via un formalisme quasi-linéaire. Le principe de l’implémentation du modèle linéaire est exposé dans le chapitre suivant.

La deuxième partie expose les mesures dans les simulations. Un premier chapitre décrit le jeu de simulations produit pour contraindre le terme source et qui aura nécessité la mise en place d’une chaîne de production automatique de simulations. Une première étude sur l’accrétion anisotrope est ensuite détaillée dans le chapitre suivant. Combinées à une description en termes de sous-structures, les propriétés directionnelles de l’accrétion sont reliées à la distribution de matière aux grandes échelles. Le chapitre suivant expose le principe de mesure des flux, adapté au modèle de réponse théorique développé précédemment. Cette procédure est mise en application dans l’avant-dernier chapitre où sont décrits les premiers résultats statistiques sur le flux de masse et le champ de marée entourant les halos.

Enfin, une courte étude sur la distribution des métaux dans le milieu intergalactique est décrite dans le dernier chapitre. Cette étude aura utilisé une simulation haute résolution issue de la même procédure de production que celle du jeu précédent.

Ce manuscrit se conclut sur une discussion de l'ensemble des travaux, sur les tâches qui restent à accomplir pour une mise en place pratique de l'ensemble du projet et sur les perspectives.

Le manuscrit propose un double niveau de lecture. D'une part, des textes d'introduction qui exposent et expliquent simplement les différents concepts et les résultats obtenus. Le lecteur y trouvera également un descriptif des "astuces" et difficultés qui auront été rencontrées. D'autre part, des articles, rédigés en anglais, qui présentent rigoureusement et de façon plus quantitative les résultats obtenus. Le lecteur soucieux de connaître le détail de ces résultats est invité à se reporter à ces articles. Quatre articles sont ainsi joint au corps de ce manuscrit. Deux d'entre eux ont déjà été publiés *The Clustering of Intergalactic Metals* (Pichon et al. (2003)) et *The origin of anisotropic accretion by L_* haloes* (Aubert et al. (2004)). Les deux autres, *Dynamical flows through Dark Matter Haloes I & III* furent rédigés durant la thèse et sont destinés à être soumis après celle-ci.

2

Réponse linéaire et non linéaire du halo

L'objectif de ce chapitre est de décrire la démarche visant à calculer statistiquement la réponse d'un halo *sphérique* à des perturbations du champ de marée et à l'injection de matière. L'ambition est d'appliquer un tel formalisme aux halos "plongés" dans les simulations. Cette démarche est exposée en détail dans l'article ci-joint *Dynamical Flows through Dark Matter haloes III : Inner Dynamics, secular evolution and applications*. Ce chapitre vise à extraire de cet article les résultats marquants, sans s'attarder sur le détail des calculs.

L'approche adoptée consiste à décrire le halo comme un système sphérique soumis à des interactions de faibles amplitudes. Ce problème peut être traité analytiquement suivant l'approche perturbative et a déjà fait l'objet d'études dans le passé par entre autres Tremaine & Weinberg (1984), Weinberg (1989), Murali (1999) ou Seguin & Dupraz (1994). Toutefois, ces études étaient limitées aux interactions de marée pure (i.e. sans injection de matière) et abordaient des problématiques très précises telle l'action d'une barre ou d'un satellite placé sur une trajectoire ad hoc. Dans cet article, il est montré comment ce formalisme peut être étendu à la prise en compte de sources de matière définies en bordure du halo : de "fermé" le halo devient un système "ouvert" à un continuum d'accrétion. D'autre part, il est exposé comment ce formalisme peut émettre des prédictions *statistiques* sur la réponse des halos à partir des caractéristiques des environnements, sans avoir recours aux réalisations individuelles d'accrétions ou de champs de marée. Cette approche perturbative peut être étendue à l'étude des effets non linéaires. Ces derniers ne peuvent être mis de côtés, en particulier à cause de l'impact prédominant qu'ils peuvent avoir sur l'évolution de la matière accrétée (via la friction dynamique par exemple ou le déséquilibre entre les effets de marées et la gravité propre des objets rentrant).

Ce chapitre est organisé comme suit. La première section porte sur le halo "cubique" uniforme, dont l'étude est similaire au cas sphérique sans la complexité induite par sa géométrie. Cette partie constitue une introduction aux concepts nécessaires à l'obtention de la réponse du halo sphérique, tels le terme source ou la propagation statistique. Dans le cas sphérique, la géométrie particulière du système implique d'introduire des outils

spécifiques, tels les variables angle-action et les bases biorthogonales. Ces concepts sont introduits dans la deuxième partie, décrivant en détail le calcul de la réponse linéaire du halo sphérique “fermé”. La section suivante reprendra les principaux résultats du formalisme décrit dans l’article, explicitant notamment le passage aux systèmes ouverts via la prise en compte de termes source, ainsi que le principe de la propagation statistique. La quatrième partie exposera l’approche non linéaire et son impact en terme de propagation statistique. Une cinquième partie décrit l’évolution *séculaire* du halo soumis à l’action récurrente de l’environnement, via une description quasi-linéaire de sa dynamique. La dernière section portera sur le champ d’applications possibles ouvert par les outils théoriques développés dans ce chapitre.

2.1 Le Halo Cubique

Cette section est dédiée à la dynamique non collisionnelle d’un milieu multi-périodique, dit aussi *halo cubique*. L’objet de ce chapitre est de fournir une illustration de la démarche qui sera adoptée dans les sections suivantes pour le cas du halo sphérique. Cette démarche permet usuellement d’aborder la dynamique de systèmes multipériodiques sans nécessiter une trop grande complexité mathématique (par ex. Weinberg (1993), Barnes et al. (1986)). Le halo cubique n’a pas vocation à être réaliste, mais l’étude d’un tel système requiert les mêmes étapes de raisonnement que celles invoquées pour des géométries plus complexes. L’objectif est formellement le même que pour le cas sphérique, i.e. chercher à caractériser la réponse auto-consistante d’un tel milieu soumis à un potentiel de faible amplitude et à l’injection d’un petit nombre de particules.

2.1.1 Réponse linéaire à un champ de marée extérieur

Approche “temporelle”

L’état d’équilibre du halo cubique est invariant par translation, de période L et caractérisé par la fonction de distribution $F(\mathbf{v})$. Le halo est décrit comme un système non-collisionnel interagissant uniquement par le biais de l’interaction gravitationnelle. De fait, l’évolution de sa fonction de distribution $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est régie par l’équation de Boltzmann sans collision et l’équation de Poisson (par ex. Goldstein (1950)):

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \int d\mathbf{v} \mathcal{F}. \quad (2.2)$$

L’espace des phases est décrit par le couple de variables positions-vitesses (\mathbf{r}, \mathbf{v}) tandis que le potentiel $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi^0 + \psi^e(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)$ est constitué du potentiel à l’équilibre du système, du potentiel extérieur et de la réponse en potentiel du halo. Compte tenu du caractère multi-périodique du système abordé ici, le potentiel “extérieur” constitue une vue de l’esprit et doit être considéré comme un simple terme de forçage d’origine extérieure. On notera que l’équation de Poisson ne tient pas compte du potentiel à l’équilibre mais fait intervenir uniquement le départ au potentiel moyen. Cette omission peut se justifier si l’on considère des phénomènes à des échelles inférieures aux échelles associées au gradient du potentiel moyen. Mais cette modification ad hoc de l’équation de Poisson reste injustifiée dans le cas général : on parle alors “d’arnaque de Jeans”.

Dans l'hypothèse d'un potentiel extérieur de faible amplitude, la réponse $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ du système reste faible et les équations 2.1 et 2.2 peuvent être linéarisées sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \int d\mathbf{v} f, \quad (2.4)$$

où $\mathcal{F} = F + f$, $F(v)$ étant la distribution à l'équilibre du système et ne dépend que du module de la vitesse. Compte tenue de la géométrie périodique du problème, la réponse linéaire de la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, du potentiel $\psi(\mathbf{r}, t)$ ainsi que le potentiel extérieur peuvent s'exprimer sous la forme de séries de Fourier :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.5)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.6)$$

$$\psi^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^e(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.7)$$

où $\mathbf{k} = 2\pi \mathbf{n}/L$, avec \mathbf{n} étant un triplet d'entiers. Les équations 2.3 et 2.4 peuvent alors s'écrire mode \mathbf{k} à mode \mathbf{k} :

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} (\psi_{\mathbf{k}} + \psi_{\mathbf{k}}^e) = 0, \quad (2.8)$$

$$\psi_{\mathbf{k}} = -\frac{4\pi G}{k^2} \int d\mathbf{v} f_{\mathbf{k}}. \quad (2.9)$$

A partir de l'équation 2.8, l'on obtient :

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\tau-t)} i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} (\psi_{\mathbf{k}}(\tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\tau)), \quad (2.10)$$

en supposant une perturbation nulle pour des temps infiniment lointains. En intégrant l'équation 2.10 sur les vitesses \mathbf{v} et en désignant par $\rho_{\mathbf{k}}$ le mode de Fourier \mathbf{k} de la réponse en densité $\rho(\mathbf{r}, t)$, la réponse en densité du milieu soumis à un potentiel extérieur est donnée par :

$$\rho_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{4\pi G}{k^2} \int \int_{-\infty}^t d\tau d\mathbf{v} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\tau-t)} i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} (\rho_{\mathbf{k}}(\tau) + \rho_{\mathbf{k}}^e(\tau)). \quad (2.11)$$

En définissant le noyau $\mathbf{K}(t)$ par :

$$K_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{4\pi G}{k^2} \int d\mathbf{v} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t)} i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}, \quad (2.12)$$

l'équation 2.11 s'écrit simplement sous la forme suivante, donnant la réponse en densité ρ induite par la présence de matière extérieure au système décrite par ρ^e :

$$\rho_{\mathbf{k}}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau K_{\mathbf{k}}(\tau-t) (\rho_{\mathbf{k}}(\tau) + \rho_{\mathbf{k}}^e(\tau)). \quad (2.13)$$

Approche “fréquentielle”

La même démarche peut être conduite dans l'espace des fréquences temporelles ω , formellement équivalente, mais permettant une approche se prêtant plus simplement au calcul des corrélations statistiques dans le cas stationnaire. A cette fin, l'équation 2.8 est modifiée par transformée de Laplace, dont l'application sur f est définie par (cf. par exemple Fitzpatrick (1998)):

$$\tilde{f}_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = \mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{i\omega t} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) dt, \quad (2.14)$$

où ω désigne une fréquence *complexe*, répondant à la condition :

$$\text{Im}(\omega) > \mu. \quad (2.15)$$

La quantité μ est une quantité positive suffisamment importante garantissant la convergence de l'équation (2.14). La transformée de Laplace des potentiels auto-consistant $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}$ et extérieur $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^e$ sont définis de façon équivalente. La transformée inverse est définie par :

$$f_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} \tilde{f}_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.16)$$

avec $y > \mu$. Enfin, la transformée de Laplace de la dérivée temporelle est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t}\right] = -i\omega \tilde{f}_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) - f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0). \quad (2.17)$$

Munis de ces définitions, l'équation 2.8 et 2.10 peut être réécrite sous la forme :

$$-i\omega \tilde{f}_{\mathbf{k}} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \tilde{f}_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} (\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} + \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^e) = f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0), \quad (2.18)$$

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} = -\frac{4\pi G}{k^2} \int d\mathbf{v} \tilde{f}_{\mathbf{k}}. \quad (2.19)$$

En injectant l'équation (2.19) dans l'équation (2.18), la solution en potentiel est donnée par :

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)}{1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)} \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^e(\omega) + \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^0(\omega), \quad (2.20)$$

où l'opérateur $\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)$ est défini par :

$$\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega) = -\frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial F / \partial \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v}, \quad (2.21)$$

et où :

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^0(\omega) = -\frac{4i\pi G}{k^2(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega))} \int \frac{f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0)}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v}. \quad (2.22)$$

La fréquence ω ayant une partie imaginaire non nulle, ces deux intégrales restent bien définies.

Stabilité du halo cubique

L'évolution temporelle de la réponse du système est fournie par la transformée de Laplace inverse de l'équation (2.20). Pour un mode \mathbf{k} donné, celle ci est donnée par (cf. par exemple Arfken & Weber (1995)):

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} d\omega \frac{\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)}{1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)} \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^e(\omega) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} d\omega \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^0(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (2.23)$$

où y est suffisamment grand pour que tous les pôles des intégrants aient des parties imaginaires inférieures à y . On rappelle que la fréquence ω a été définie à l'origine telle que $\text{Im}(\omega) > \mu$. Néanmoins, $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}(\omega)$ peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe, auquel cas les intégrales de l'équation (2.23) doivent suivre le contour donné dans la figure 2.1, contournant les pôles ω_p de $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}(\omega)$ (cf. par exemple Binney & Tremaine (1987), décrit pour la première fois par Landau (1946)). Ces pôles vont conditionner le comportement de la réponse qui sera de type :

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) \sim \exp(-i\omega_p t), \quad (2.24)$$

pour chacun des pôles en vertu du théorème des résidus. Au vu de l'équation (2.22) ces pôles sont issus des zéros de la relation de dispersion, i.e. :

$$1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega_p) = 0. \quad (2.25)$$

Cette recherche des pôles ne peut se faire que si ce prolongement analytique est correctement fait. En particulier, cela implique que les intégrales

$$\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega) = -\frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial F / \partial \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v}, \quad (2.26)$$

soient pratiquées sur les contours donnés par la figure 2.2. Si $\text{Im}(\omega) > 0$ (modes instables), alors l'intégrale (2.26) devient :

$$\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega) = \mathcal{W}(\omega) = -\frac{4\pi G}{k^2} \mathcal{P} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial F / \partial \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v}, \quad (2.27)$$

où \mathcal{P} désigne la valeur principale de Cauchy. Pour respectivement $\text{Im}(\omega) = 0$ (modes stables) et $\text{Im}(\omega) < 0$ (modes amortis), les intégrales se modifient respectivement en $\mathcal{W}(\omega) + i\pi R$ et $\mathcal{W}(\omega) + 2i\pi R$, où R désigne le résidu dû au pôle placé sur l'axe réel. L'existence (ou non) de zéros de la relation de dispersion dans ces trois cas va conditionner la stabilité du système.

Dans le cas d'un système stable, il est possible "d'envoyer" la fluctuation initiale $f(\mathbf{v}, t = 0)$ en moins l'infini, auquel cas les fluctuations transitoires induites par cette condition initiales sont complètement amorties pour des temps suffisamment grand : le second terme de l'équation (2.23) peut être négligé. Par conséquent la transformée de Laplace (équation (2.14)) devient

$$\tilde{f}_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) dt, \quad (2.28)$$

formellement équivalente à une transformée de Fourier. Sous ces hypothèses (impulsion initiale à l'infini et amortissement des modes transitoires) l'ensemble du raisonnement

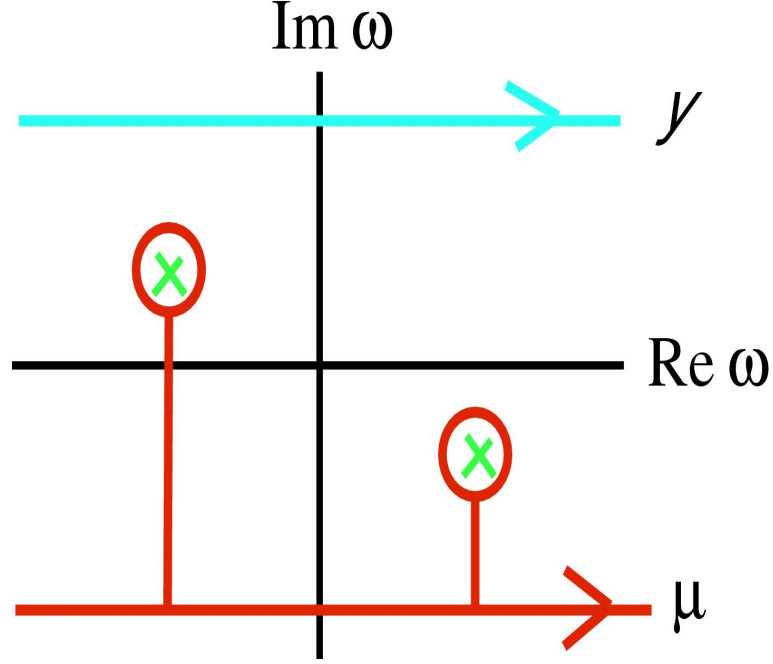


Figure 2.1: En bleu, les contours de l'intégration de Laplace inverse de la réponse du halo. En rouge, le même contour déformé autour des pôles en cas de prolongement analytique des intégrands de l'équation (2.23). Figures inspirées de Binney & Tremaine (1987).

précédent peut être traité de façon équivalente par transformée de Fourier. Néanmoins le traitement de la relation de dispersion, et par conséquent la transformée de Fourier inverse vers l'espace temporel, doit prendre en compte les effets de prolongement analytique exposé dans cette section.

Statistique à deux points de la réponse

Le calcul précédent de la réponse en potentiel conduit simplement à l'expression de la fonction de corrélation à deux points de $\psi(\mathbf{r}, t)$ en fonction de la corrélation à deux points du potentiel extérieur $\psi^e(\mathbf{r}, t)$. Par définition, la fonction de corrélation à deux points de la réponse en potentiel s'écrit :

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}' \cdot \Delta \mathbf{r}} \langle \psi_{\mathbf{k}}(t) \psi_{\mathbf{k}'}^*(t + \Delta t) \rangle. \quad (2.29)$$

L'étude d'une telle fonction doit permettre d'extraire les échelles caractéristiques associées à $\psi(\mathbf{r}, t)$: taille caractéristique des fluctuations, temps de cohérence typique et les interdépendances entre ces deux types de quantités (temps de cohérence échelle par échelle par exemple). Dans le formalisme développé ici, ces échelles caractéristiques sont liées aux caractéristiques des perturbations, faisant le lien entre environnement et dynamique.

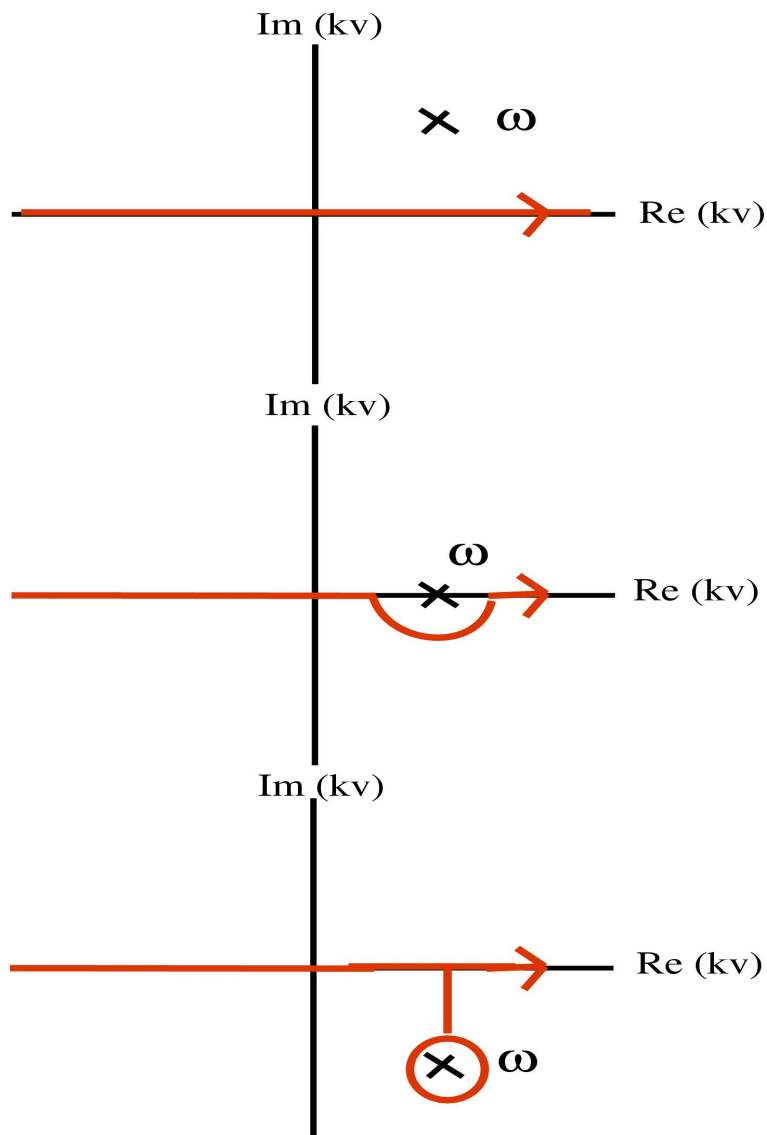


Figure 2.2: Contour d'intégrations dans le plan des vitesses pour la recherche des zéros de l'équation de dispersion (2.25). Figures inspirées de Binney & Tremaine (1987).

Ce lien est établi en explicitant les transformations de Laplace de l'équation 2.29 :

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int d\omega d\omega' e^{i(\omega' - \omega)t} e^{i\omega' \Delta t} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k}' \cdot \Delta \mathbf{r}} \langle \psi_{\mathbf{k}}(\omega) \psi_{\mathbf{k}'}^*(\omega') \rangle \quad (2.30)$$

En combinant les équations (2.20) et (2.30), la fonction de corrélation de la réponse s'exprime sous la forme :

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle = \int d\omega d\omega' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t, \Delta t, \omega, \omega', \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) \langle \psi_{\mathbf{k}}^e(\omega) \psi_{\mathbf{k}'}^{e*}(\omega') \rangle, \quad (2.31)$$

où l'opérateur \mathbf{M} est donné par :

$$M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t, \Delta t, \omega, \omega', \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) = e^{i(\omega' - \omega)t} e^{i\omega' \Delta t} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k}' \cdot \Delta \mathbf{r}} \frac{\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega) \tilde{K}_{\mathbf{k}'}^*(\omega')}{(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega))(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}'}^*(\omega'))} \quad (2.32)$$

Si la réponse est stationnaire en espace et en temps, la fonction de corrélation ne dépend plus que de $\Delta \mathbf{r}$ et Δt , d'où :

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle \equiv C(\Delta \mathbf{r}, \Delta t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3 \Delta T} \int_{-\Delta T}^{\Delta T} dt \int d\mathbf{r} \langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle. \quad (2.33)$$

L'expression de la corrélation s'en trouve modifiée et devient :

$$\langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int d\omega e^{i\omega \Delta t} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r}} \langle \psi_{\mathbf{k}}(\omega) \psi_{\mathbf{k}'}^*(\omega) \rangle. \quad (2.34)$$

A partir de l'équation (2.20), la statistique à deux points de la réponse peut alors s'exprimer en fonction de celle du potentiel extérieur :

$$C(\Delta \mathbf{r}, \Delta t) = \int d\omega \sum_{\mathbf{k}} e^{i\omega \Delta t - i\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r}} M_{\mathbf{k}}^s(\Delta t, \omega, \Delta \mathbf{r}) \langle \psi_{\mathbf{k}}^e(\omega) \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\omega) \rangle \quad (2.35)$$

où l'opérateur de réponse stationnaire est donné par :

$$M_{\mathbf{k}}^s(\Delta t, \omega, \Delta \mathbf{r}) = \frac{|\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)|^2}{|1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)|^2} \quad (2.36)$$

L'équation (2.35) décrit une *propagation statistique*, où la fonction de corrélation à deux points de la réponse du halo cubique s'exprime en fonction de la statistique à deux points du potentiel extérieur.

2.1.2 Réponse linéaire d'un halo cubique "ouvert"

Terme source

L'objet de cette section est d'étendre la formulation précédente à l'injection de matière dans le halo cubique. Celui-ci devient "ouvert". Soit un terme *source* $S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ décrivant l'entrée de particules au travers d'une paroi délimitant les faces du cube. La

mise en place de ce terme source s'effectue en considérant l'équation de Boltzmann sans collision:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (2.37)$$

Cette équation constitue une équation de continuité du flot de points dans l'espace des phases. Ainsi si l'on définit la coordonnée $\mathbf{w} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, l'équation de Boltzmann se réécrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0, \quad (2.38)$$

avec $\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{v}, -\nabla \psi)$. Le premier terme de l'équation (2.38) apparaît comme la variation de la densité de points à l'intérieur d'un certain volume de l'espace des phases tandis que le deuxième terme représente le flux de "particules" quittant ce volume. La prise en compte d'une source se traduit donc par la prise en compte d'un terme supplémentaire dans cette équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = S. \quad (2.39)$$

A nouveau, la source décrit l'injection de particules supplémentaires dans le système. A ce titre, elle est de nature similaire au second terme de l'équation (2.38) et doit être décrite comme un *flux* de fonction de distribution extérieure $f^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$S = \nabla_{\mathbf{w}}(f^e \dot{\mathbf{w}}) = \nabla_{\mathbf{r}}(f^e \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}}(f^e \dot{\mathbf{v}}). \quad (2.40)$$

Le deuxième terme de l'équation (2.40) est à relier à un flux de particules au travers de surfaces de l'espace des *vitesse*s. Par essence, les moments successifs en vitesse du terme source doivent aboutir à des flux de masse (ρv_r), flux de moment ($\rho v_r \mathbf{v}$) et flux d'énergie ($\rho v_r \mathbf{v} \mathbf{v}$). Le second terme de l'équation (2.40) ne contribue pas à ces moments du fait de l'absence de vitesses infinies dans la distribution f^e et peut être négligé. L'expression du terme source peut alors se réduire à :

$$S = \nabla_{\mathbf{r}}(f^e \mathbf{v}). \quad (2.41)$$

Enfin, compte tenu du caractère discontinu de f^e à la frontière du halo, le terme source peut s'écrire (voir par ex. Appel (2002)):

$$S = -\delta_{\text{surf}} f^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.42)$$

où δ_{surf} décrit l'interface d'échange entre le halo, et \mathbf{n} la normale à la surface (comptée positive vers l'extérieur).

Pour le halo cubique (situé entre $x = 0$ et $x = L$) soumis à un flux entrant de matière au travers de la face $x = L$, le terme source s'écrit :

$$S = -\delta_D(x - L) v_x f^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (2.43)$$

Si le flux entrant se limite à une seule particule, celui-ci peut être décrit par la fonction de distribution f_p^e :

$$f_p^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)) \delta_D(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t)), \quad (2.44)$$

et le terme source associé devient :

$$S = \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_L) \delta_D(\mathbf{v} - \mathbf{v}_L) \delta_D(t - t_L), \quad (2.45)$$

ou t_L désigne l'instant de passage au travers de la paroi de coordonnée $x = L$, avec une vitesse \mathbf{v}_L et à la position \mathbf{r}_L . Le passage de $\delta_D(x - L)v_x \rightarrow \delta_D(t - t_L)$ s'effectue en considérant $v_x = \dot{x}$. Ceci traduit l'idée selon laquelle le flux crée par une particule ponctuelle, $\delta(x - L)v_x$ mesuré au travers d'une surface est "infiniment" grand pendant un laps de temps "infiniment" court.

Réponse et corrélation

Le terme source étant défini, l'étape suivante consiste à calculer la réponse induite par ce nouveau type de perturbation. L'amplitude de cet apport de matière est supposé faible comparé à la masse du système. L'équation de Boltzmann linéarisée se trouve modifiée de la façon suivante :

$$-i\omega \tilde{f}_{\mathbf{k}} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \tilde{f}_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} (\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} + \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^e) = \tilde{S}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}). \quad (2.46)$$

En suivant la procédure de calcul décrite précédemment, la réponse en potentiel du système, soumis à la fois à un champ de marée externe et au terme source, devient :

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)}{1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)} \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^e(\omega) + \frac{1}{1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)} \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^s(\omega), \quad (2.47)$$

où le potentiel $\psi^s(\mathbf{r}, t)$ associé à la source a pour transformée de Fourier-Laplace :

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}^s(\omega) = \frac{4i\pi G}{k^2} \int d\mathbf{v} \frac{\tilde{S}_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \omega)}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega}. \quad (2.48)$$

L'introduction d'un nouveau terme à l'équation de Boltzmann conduit à une expression modifiée du terme $\langle \psi_{\mathbf{k}}(\omega) \psi_{\mathbf{k}}^*(\omega) \rangle$, intervenant dans le calcul de la corrélation à deux points de la réponse :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\mathbf{k}}(\omega) \psi_{\mathbf{k}}^*(\omega) \rangle &= \frac{\tilde{K}_{\mathbf{k}}^2(\omega)}{(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega))^2} \langle \psi_{\mathbf{k}}^e(\omega) \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\omega) \rangle + \frac{1}{(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega))^2} \langle \psi_{\mathbf{k}}^s(\omega) \psi_{\mathbf{k}}^{s*}(\omega) \rangle \\ &+ 2\text{Re} \left[\frac{\tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega)}{(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega))^2} \langle \psi_{\mathbf{k}}^e(\omega) \psi_{\mathbf{k}}^{s*}(\omega) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Pour un système ouvert, la corrélation à deux points de la réponse fait intervenir les auto-corrélations du potentiel extérieur et du "potentiel source", mais également les corrélations croisées entre ces deux composantes, via le dernier terme de l'équation (2.49). Ce calcul met en lumière l'importance d'une description cohérente de l'environnement qui implique de connaître le degré de corrélation entre potentiel et source. Cette notion de cohérence de la statistique des interactions sera discutée en détail dans la description sphérique.

Fonction de Green

A titre d'illustration, considérons une source composée d'une seule particule pénétrant le cube en \mathbf{r}_0 , à l'instant t_0 , avec une vitesse v_0 . Le terme source associé et sa transformée de Laplace-Fourier sont donnés par :

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta_D(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta_D(t - t_0) \quad (2.50)$$

$$\tilde{S}_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} e^{i\omega t_0} \delta_D(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \quad (2.51)$$

Soit $g(r, v, t)$ la *fonction de Green* du système, définie par sa réponse au terme source ponctuel et impulsif. La fonction de Green obéit à l'équation 2.46 :

$$-i\omega\tilde{g}_{\mathbf{k}} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}\tilde{g}_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} e^{i\omega t_0} \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), \quad (2.52)$$

qui peut être résolue en étant combinée à l'équation 2.47, pour donner :

$$\tilde{g}_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = \left(\frac{4i\pi G}{k^2} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial F / \partial \mathbf{v}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 - \omega)(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega))} - \frac{i\delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \right) \exp(i(\omega t_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)). \quad (2.53)$$

La reprojction de l'équation 2.53 dans l'espace des positions et temps permet de réécrire la fonction de green sous la forme :

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \int d\omega e^{i\omega(t-t_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} U_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, \omega) \quad (2.54)$$

où le *propagateur* $U_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, \omega)$ est défini par :

$$U_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, \omega) \equiv \frac{4i\pi G}{k^2} \frac{\mathbf{k} \cdot \partial F / \partial \mathbf{v}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 - \omega)(1 - \tilde{K}_{\mathbf{k}}(\omega))} - \frac{i\delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega}. \quad (2.55)$$

Le deuxième terme décrit une propagation libre balistique de la particule au travers du halo cubique. Le premier terme apparaît du fait du traitement auto-consistant de la réponse et traduit l'habillage de la particule induit par la réponse du halo. Connaissant la fonction de Green du système, la perturbation de la fonction de distribution du système à t , \mathbf{v} et \mathbf{r} peut se déduire de la perturbation à t_0 , \mathbf{v}_0 et \mathbf{r}_0 :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int \int \int dt_0 d\mathbf{r}_0 d\mathbf{v}_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0) f(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0). \quad (2.56)$$

L'approche en terme de propagateur¹ est formellement équivalente à l'approche décrite précédemment, où potentiels extérieurs et termes sources sont décrits séparément. En revanche, la notion même de conditions aux frontières disparaît et cette description nécessite de connaître à priori les positions et vitesses de toutes les "particules", qu'elles soient proches ou lointaines et qu'elles soient susceptibles ou non d'être accrétées. En d'autres termes, le "halo" devient une sous-région d'un espace des phases "plus grand". Or, les informations requises sont inaccessibles dans les faits et finalement peu intéressantes puisqu'il est clair que toutes les particules n'auront pas à tous les instants le même degré de pertinence pour le devenir du halo. A l'inverse, la description source+potentiel place le halo au coeur de l'étude en définissant clairement ses limites et réduit, de fait, l'information pertinente à une connaissance des conditions aux bords.

2.1.3 Vers un modèle de halo sphérique

L'objectif de cette section était de fournir les clés de raisonnement et les méthodes liées au calcul de la réponse d'un milieu homogène à des perturbations du champ de marée ou à une injection de matière dans le système. Cet objectif est atteint en résolvant simultanément les équations de Boltzmann et Poisson, via une projection sur une base

¹à ne pas confondre avec l'opération de propagation statistique décrite par ailleurs.

de Fourier. L'évolution temporelle de la réponse du système est obtenue directement par intégration des équations d'évolution ou indirectement dans l'espace des fréquences. Ce formalisme permet de propager les fonctions de corrélations des perturbations aux corrélations de la réponse, sans faire intervenir les réalisations individuelles des perturbations.

L'ensemble de ces résultats peuvent être transposés qualitativement au cas du halo sphérique. En particulier, les propriétés de propagation des statistiques restent globalement inchangées. Le traitement du cas cubique se trouve grandement simplifié par l'utilisation d'une même base (la base de Fourier) "diagonalisant" les équations de Boltzmann et de Poisson. Cette propriété n'est plus valable dans le cas sphérique. L'équation de Poisson y est certes toujours projetée dans l'espace des positions, via les harmoniques sphériques et une base radiale appropriée. En revanche, l'équation de Boltzmann ne peut être linéarisée que dans une représentation en *Angles-Actions*, nécessitant des transformations permettant de passer d'un jeu de variables à l'autre. Bien que l'approche de ces deux types de halos reste formellement la même, cette différence dans la description de l'espace des phases enlève au cas sphérique une part de sa simplicité et du côté intuitif qui faisait l'attrait du modèle simple mais non réaliste du halo cubique.

2.2 Réponse linéaire du halo sphérique "fermé"

Cette partie présente un résumé de l'approche développée, entre autres, dans Tremaine & Weinberg (1984) ainsi que dans Murali (1999) et n'est pas présentée en détail dans l'article ci-joint. On se place d'emblée dans le régime des faibles perturbations, où la masse associée aux perturbations est faible devant celle du système. La réponse du système est décrite par le départ $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ de la fonction de distribution à la fonction de distribution à l'équilibre, $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Dans ce chapitre, les halos modélisés sont sphériques et possèdent une distribution de vitesse isotrope. Ce choix n'est en aucun cas une obligation (l'article ci-joint ne précisant pas à priori la forme de la fonction de distribution à l'équilibre) et la démarche peut être étendue à tout système stable. L'état d'équilibre d'un système isotrope est décrit par une fonction de distribution ne dépendant que de l'énergie $F(E)$. De tels systèmes sont stables sous l'influence de n'importe quel type de perturbations pour peu que $dF/dE < 0$ (Antonov (1960), Binney & Tremaine (1987)).

L'obtention de la réponse du halo s'effectue en résolvant l'équation de Boltzmann non collisionnelle décrivant l'évolution de f sous l'action du potentiel perturbateur $\psi^e(\mathbf{r}, t)$. Pour un système sphérique, cette résolution se trouve simplifiée en adoptant le jeu de variables canoniques des angles-actions (par ex. Kalnajs (1971), Kalnajs (1976a), Kalnajs (1976b), Kalnajs (1977b)), décrit ci-après. De plus, la solution f doit également satisfaire l'équation de champ la reliant au potentiel, l'équation de Poisson. Cette condition est automatiquement remplie en développant les couples densité-potentiel sur une base biorthogonale. La résolution de ces équations couplées conduit à une relation de type modale permettant de déduire l'évolution d'un halo à une perturbation extérieure arbitraire.

2.2.1 Variables angle-action

Les actions \mathbf{I} constituent trois invariants du mouvement, l'action radiale $I_1 = I_r = (2\pi)^{-1} \int v_r dr$, le moment orbital $I_2 = L$ et l'une de ses composantes $I_3 = L_z$ (cf.

par exemple Tremaine & Weinberg (1984)). Ces trois actions caractérisent les orbites existantes dans le potentiel créé par le modèle du halo. Pour un jeu d’actions donné, la ‘position’ dans l’espace des phases d’une particule test est donnée par ses angles \mathbf{w} . Les angles décrivent la phase des trois mouvement *périodiques* qui composent une orbite et sont par conséquent des variables multi-périodiques. Le premier angle w_1 (associé à I_r) décrit la phase radiale de l’orbite d’une particule test. Par convention, le péricentre équivaut à $w_1 = 0$ tandis que l’apocentre est associé à $w_1 = \pi$. Le second angle w_2 décrit le mouvement azimutal moyen d’une particule dans le plan orbital. Si Ψ définit l’azimuth instantané d’une particule dans ce même plan, alors la variation de cet angle durant une période radiale est égale à la variation de w_2 , i.e. $\Delta\Psi = \Delta w_2$. Le dernier angle w_3 définit l’azimuth du noeud ascendant de l’orbite dans le système de référence global; cet angle décrit la précession du plan de l’orbite au cours du temps. Il est à noter que dans un système sphérique, une telle précession n’existe pas et par conséquent, w_3 reste constant. Les angles et actions constituent un jeu de variables canoniques et sont reliées via les équations de Hamilton (cf. par exemple Goldstein (1950), Landau & Lifshitz (1969)):

$$\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} = \dot{\mathbf{w}} \equiv \boldsymbol{\omega}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{w}} = \dot{\mathbf{I}} = 0, \quad (2.58)$$

où $H_0(\mathbf{I})$ est le hamiltonien du système non perturbé et où l’équation (2.58) découle de l’invariance des actions au cours du mouvement. Ainsi l’évolution temporelle des trois angles est décrite par $w_{1,2,3}(t) = \Omega \times t + w_{1,2,3}(0)$.

Dans ce système de variables, une particule test parcourt l’espace des phases de façon périodique en *angles*, au cours de son orbite. Ainsi, le long d’une orbite définie par \mathbf{I} , toute quantité $Q(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$ peut s’écrire :

$$Q(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) = \sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}} \quad (2.59)$$

De façon analogue au cas cubique, la décomposition de Fourier dans ces variables permet de résoudre l’équation de Boltzmann mode à mode. La principale difficulté réside dans le fait que le jeu de variable angle-action ne permet pas de linéariser l’équation de Poisson, conséquence de la non uniformité du milieu. Cet obstacle est contourné par l’utilisation d’une base biorthogonale satisfaisant a priori l’équation de champ. L’ensemble de ces étapes est exposé de façon détaillée dans la partie suivante.

2.2.2 Calcul de la réponse

Le halo est modélisé par un système sphérique non collisionnel et est décrit par une fonction de distribution à l’équilibre ne dépendant que des actions, $F(\mathbf{I})$. L’évolution de la fonction de distribution $\mathcal{F}(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) = F(\mathbf{I}) + f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$ du halo est gouvernée par l’équation de Boltzmann non-collisionnelle :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + [H, \mathcal{F}] = 0, \quad (2.60)$$

où $[\cdot]$ représentent les crochets de Poisson et où $H = H_0(\mathbf{I}) + \psi(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) + \psi^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$ est le hamiltonien du halo perturbé par un potentiel ψ^e , H_0 étant le hamiltonien à l’équilibre

et ψ la réponse en potentiel du système. L'évolution de la réponse $f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$ est donnée par l'équation de Boltzmann linéarisée:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{w}} \right) = 0 \quad (2.61)$$

L'équation de champ est quant à elle donnée par l'équation de Poisson :

$$\Delta \psi = 4\pi G \int d^3 \mathbf{v} \tilde{f}. \quad (2.62)$$

L'utilisation des variables angles-actions implique que les quantités $f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$, $\psi(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$ et $\psi^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$ sont des quantités périodiques en angles. Ceci autorise une description en série de Fourier :

$$f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}, \quad (2.63)$$

$$\psi(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}, \quad (2.64)$$

$$\psi^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}, \quad (2.65)$$

où, par exemple :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = \frac{1}{2\pi^3} \int d\mathbf{w} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}}. \quad (2.66)$$

L'équation de Boltzmann devient :

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} f_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} (\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t)). \quad (2.67)$$

Dans le cas d'une fonction de distribution à l'équilibre isotrope, $F = F(E)$ et $\partial F / \partial \mathbf{I} = (\partial F / \partial E)(\partial H_0 / \partial \mathbf{I}) = \boldsymbol{\omega} \partial F / \partial E$, d'où la solution de (2.67) :

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \frac{\partial F}{\partial E} \int_{-\infty}^t d\tau (\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t)). \quad (2.68)$$

La réponse en densité d'un système soumis à un potentiel extérieur en découle:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \int d\mathbf{v} f_{\mathbf{k}}, \quad (2.69)$$

$$= \int d\mathbf{v} \int_{-\infty}^t d\tau \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}} i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \frac{\partial F}{\partial E} (\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t)} \quad (2.70)$$

On rappelle que le potentiel est relié à la densité via l'équation de Poisson, dont la base naturelle de diagonalisation est la base de Fourier dans l'espace des positions, et non dans l'espace des angles. Pour contourner cette difficulté, le couple densité-potentiel de la réponse est projeté sur une base dite biorthonormale :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{[\mathbf{n}]} a_{\mathbf{n}}(t) \rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}), \quad (2.71)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{[\mathbf{n}]} a_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}). \quad (2.72)$$

Cette base satisfait automatiquement l'équation de Poisson :

$$\Delta\psi^{[n]}(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho^{[n]}(\mathbf{r}), \quad (2.73)$$

et répond à la condition d'orthogonalité :

$$\int d\mathbf{r} \psi^{[n]*}(\mathbf{r}) \rho^{[n']}(\mathbf{r}) = \delta_{nn'}. \quad (2.74)$$

L'application de cette relation d'orthogonalité à l'équation (2.70) conduit à la relation entre la projection de la réponse en densité et la projection du champ de marée extérieur :

$$a_{\mathbf{p}}(t) = \int d\mathbf{v} d\mathbf{r} \int_{-\infty}^t d\tau \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{w}} i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \frac{\partial F}{\partial E} \psi_{\mathbf{k}'}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) (a_{\mathbf{n}}(\tau) + b_{\mathbf{n}}(\tau)) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau-t)}, \quad (2.75)$$

en arguant du fait que $\psi^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}'} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{w}) \psi_{\mathbf{k}'}^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{I})$. Les variables angles actions constituent un jeu de variables canoniques au même titre que les positions vitesses, d'où l'égalité des deux éléments différentiels $d\mathbf{I}d\mathbf{w} = d\mathbf{v}d\mathbf{r}$. L'intégration sur les angles \mathbf{w} conduit à la solution des coefficients $a_{\mathbf{p}}(t)$:

$$a_{\mathbf{p}}(t) = \sum_{\mathbf{n}} \int_{-\infty}^t d\tau K_{\mathbf{pn}}(\tau - t) (a_{\mathbf{n}}(\tau) + b_{\mathbf{n}}(\tau)), \quad (2.76)$$

où le noyau \mathbf{K} est défini par (Murali (1999), Seguin & Dupraz (1994)) :

$$K_{\mathbf{pn}}(t) = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \frac{dF}{dE} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}t}. \quad (2.77)$$

On remarquera que le noyau K ne dépend que de la fonction de distribution à l'équilibre. En d'autre termes, pour un modèle donné, le noyau est calculé une seule fois, quel que soit le type de perturbation auquel le système est soumis. De fait, l'essentiel de l'implémentation consiste à calculer de façon précise ce noyau. Ainsi, le calcul des angles-actions et des transformées en angles $\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I})$ de la base biorthogonale constituent des étapes particulièrement délicates. Ces difficultés d'implémentations sont mises de côtés dans un premier temps et les différentes étapes de l'évaluation numérique sont décrites dans le chapitre 4.

2.3 Réponse linéaire du halo sphérique “ouvert”

Terme source

L'objet de cette section est d'étendre la formulation précédente à l'injection de matière dans le halo. Celui-ci devient “ouvert”. Le raisonnement reste analogue à celui développé pour le cas cubique et l'extension au halo ouvert résulte en l'ajout d'un terme source au second membre de l'équation de Boltzmann linéarisée :

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t)}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} \Delta H_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t). \quad (2.78)$$

L'interface d'échange entre le halo et le milieu extérieur doit être définie. Dans cette thèse, cette interface d'échange est définie par la sphère de Viriel du halo, de rayon

$r = R_{200}$. Ce choix repose sur des arguments raisonnables mais non univoques et le choix du rayon de mesure relève à priori d'un certain arbitraire, discutés dans le chapitre 8. Compte tenu de ce choix d'interface d'échange, la source est décrite par :

$$-s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta(r - R_{200})v_r f^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (2.79)$$

Si le flux entrant se limite à une seule particule, celui-ci peut être décrit par la source :

$$S = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{200})\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{200})\delta(t - t_{200}), \quad (2.80)$$

ou t_{200} désigne l'instant de passage au travers le rayon de Viriel $r = R_{200}$, avec une vitesse \mathbf{v}_{200} et à la position \mathbf{r}_{200} . Le passage de $\delta_D(r - R_{200})v_r \rightarrow \delta_D(t - t_{200})$ s'effectue en considérant $v_r = \dot{r}$.

Calcul de la réponse

Les réponses en potentiel et en densité sont projetées sur une base biorthogonale (équation 8 de l'article ci-joint) :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t)\psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}), \quad (2.81)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t)\rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}), \quad (2.82)$$

qui n'ont pas besoin d'être explicitée pour le suivi du raisonnement. D'autre part, la source peut être projetée sur une base de fonction décrivant l'espace des phases complets :

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(t)\phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (2.83)$$

L'intérêt d'une telle décomposition est qu'elle permet de découpler totalement l'évolution temporelle de la source de sa dépendance dans l'espace des phases. De fait le caractère spécifique d'une source ne dépend que de ses coefficients. Ce découplage nécessite en revanche une base de projection qui décrive à la fois les positions et les vitesses. Une telle base est suggérée dans la partie relative aux mesures dans les simulations.

Le solution $a_{\mathbf{n}}(t)$ de la réponse en densité est obtenu en suivant le même raisonnement que celui développé pour le cas du halo isolé (équation 17 de l'article ci-joint) :

$$\mathbf{a}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \{ \mathbf{K}(\tau - t) \cdot [\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)] + \mathbf{Q}(\tau - t) \cdot \mathbf{c}(\tau) \}, \quad (2.84)$$

les noyaux ayant pour définitions (équations 14 et 15 de l'article) :

$$K_{\mathbf{p}, \mathbf{n}}(\tau) = \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]^*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}), \quad (2.85)$$

$$Q_{\mathbf{p}, \mathbf{n}}(\tau) = \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]^*}(\mathbf{I}). \quad (2.86)$$

Sans surprises, l'introduction d'un terme source entraîne l'apparition d'un nouveau noyau, décrivant la propagation des particules accrétées dans le potentiel à l'équilibre

du halo. Ce noyau $Q_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(\tau)$ dépend de la base de projection de la source $\sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I})$, définie telle que :

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (2.87)$$

$$s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(\tau) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}), \quad (2.88)$$

où, compte tenu du jeu particulier de variables canoniques utilisé, la base de projection de la source doit être exprimée en termes d’angles et d’actions. En particulier, il faut remarquer que la base de la source ne fait intervenir que certaines orbites puisque :

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \delta_D(r(\mathbf{I}, w_1) - R_{200}) \phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (2.89)$$

où $\delta(r(\mathbf{I}, w_1) - R_{200}) \phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Il existe clairement toute une classe d’orbites (définies par \mathbf{I}) qui ne passent jamais au travers de la sphère de Viriel. En d’autres termes, la couverture en termes d’actions et d’angles de la base $\sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I})$ pourra ne pas être optimale, en échantillonnant par exemple des régions de l’espace des phases ne contenant pas d’orbites croisant le rayon de Viriel. Cet effet est discuté ci-après. Auparavant, la singularité en ce rayon peut être réexprimée en termes de phases radiales (cf. [équation 25 de l’article ci-joint](#)) :

$$\delta(r(\mathbf{I}, w_1) - R_{200}) \rightarrow \delta(w_1 - \tilde{w}_r(\mathbf{I}, R_{200})) \left| \frac{1}{\partial w_1 / \partial r} \right| = \delta_D(w_1 - \tilde{w}_r(\mathbf{I}, R_{200})) \frac{\omega_1}{|v_r|}, \quad (2.90)$$

où \tilde{w}_r désigne la phase correspondant à l’intersection d’une orbite définie par \mathbf{I} avec R_{200} et dont la valeur dépend également du rayon de mesure. Le terme source peut alors être réécrit directement dans l’espace des angles actions sous la forme :

$$s^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) = \delta_D(w_1 - \tilde{w}_r(\mathbf{I}, R_{200})) f^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t). \quad (2.91)$$

Cette description n’a pas été exploitée plus avant durant cette thèse mais mérite néanmoins d’être discutée pour ses implications dans le choix du type de projection. L’expression du terme source en termes de positions-vitesses (\mathbf{r}, \mathbf{v}) sur la sphère procède du fait qu’elle constitue à priori la description la plus intuitive et la plus simple. En particulier, si le terme source doit être issu de simulations, d’observations ou même être fournie *ad hoc*, c’est dans ce jeu de variable que s^e sera décrit. Une projection sur une base $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ est naturelle et fut d’ailleurs retenue par la suite lors de la phase de mesure. Or, il apparaît clairement que la reprojection de la base $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ peut poser problème, compte tenu par exemple du nombre discret de phases radiales qui passent au travers du rayon de Viriel. En d’autres termes, la couverture en angles-actions de la base $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ n’est pas à priori optimisée pour le sous-ensemble à R_{200} de l’espace (\mathbf{I}, \mathbf{w}) qui est pertinent.

L’autre option consistant à décrire directement la source dans l’espace (\mathbf{I}, \mathbf{w}) à R_{200} (tel que suggéré par la relation (2.91)) permet une projection directe sur une éventuelle base $\tilde{\phi}(\mathbf{I}, w_2, w_3)$. Cette approche n’est toutefois pas sans inconvénients, surtout à ce stade du développement du formalisme. Cette description “directe” nécessite de connaître les intégrales du mouvement et les phases associées du matériau accréte, ce

qui implique de connaître la trajectoire de chaque particule dans le potentiel non perturbé. En plus de nécessiter un pré-traitement (calcul des orbites), ceci implique de faire un choix *à priori* du modèle de halo à l'équilibre et ceci dès la mesure de ce terme source. Un changement de modèle implique un retraitement des mesures à proprement dit du terme source. Dans un traitement plus classique dans l'espace des positions-vitesses, un changement de modèle implique seulement une modification de la base. Compte tenu de l'aspect encore exploratoire des travaux de cette thèse, aucun *à priori* n'est fait sur le modèle de halo à utiliser. De fait une projection de s^e sur une base $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, s'est avérée plus raisonnable à ce stade.

Corrélation à deux points de la réponse

La fonction de corrélation à deux points de la réponse linéaire est décrite par [l'équation 30 de l'article ci-joint](#) et démontre notamment que celle-ci est une fonction simple de la corrélation des coefficients de sa projection :

$$\langle \rho(r, \boldsymbol{\Omega} + \Delta\boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t) \rho(r', \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \sim \langle a_{n\ell m}(t) a_{n'\ell'm'}^*(t + \Delta t) \rangle. \quad (2.92)$$

La connaissance de cette fonction de corrélation donne accès aux échelles typiques de la réponse du halo. Ainsi, la corrélation donne accès à la taille typique des fluctuations via les quantités de type $\langle \rho(r, \boldsymbol{\Omega} + \Delta\boldsymbol{\Omega}, t) \rho(r', \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$. De même les corrélations de type $\langle \rho(r, \boldsymbol{\Omega}, t) \rho(r, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t) \rangle$ donnent accès au temps de cohérence de la réponse en un point donné, liée notamment à l'efficacité des phénomènes dissipatifs. Le calcul de la réponse (cf. équation (2.84)) permet de prédire la propagation des propriétés statistiques de la source et du potentiel aux corrélations de la réponse ([équation 28 de l'article ci-joint](#)):

$$\langle \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{*\top} \rangle = \langle [\hat{\mathbf{K}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{Q}}' \cdot \hat{\mathbf{c}}] \cdot (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}')^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}')^{-1* \top} \cdot [\hat{\mathbf{K}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{Q}}' \cdot \hat{\mathbf{c}}]^{\top*} \rangle. \quad (2.93)$$

Pour peu que les interactions auxquels sont soumis les halos soient bien connues, les échelles caractéristiques de leurs réponses peuvent être prédites, *sans avoir recours aux réalisations individuelles d'environnements*.

Il convient de préciser à quoi correspond “une bonne connaissance” de l'environnement. Pour un système ouvert, la corrélation à deux points de la réponse fait intervenir les auto-corrélations du potentiel extérieur et du “potentiel source”, mais également les corrélations croisées entre ces deux composantes. Ainsi, la corrélation à deux points de la réponse implique la connaissance des auto-corrélations du potentiel (via $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^{*\top} \rangle$) et de la source (via $\langle \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$) mais aussi des corrélations croisées entre la source et le potentiel, par le biais des quantités $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$. Ces corrélations croisées traduisent l'interdépendance des deux quantités. Par exemple, la réponse induite par un satellite entrant dans le halo peut être calculée en utilisant le second terme de l'équation 2.47. Néanmoins, l'arrivée d'un tel objet se manifestera d'abord par un champ de marée, d'où une nécessaire cohérence entre l'évolution temporelle de ψ^e et celle de la source. De plus, au moment précis de son passage au travers de l'interface extérieur/intérieur, le satellite se manifestera à la fois via le terme source et via le champ de marée qui sont nécessairement fortement corrélés. L'inévitable interdépendance du potentiel et de la source implique qu'une description réduite au auto-corrélations est insuffisante. C'est la connaissance des propriétés statistiques de ces interactions qui doit permettre la prédiction des échelles typiques des halos en interaction avec leur environnement.

Discussion de l'approche "source"

La double description de l'environnement (champ de marée + accrétion) n'est en aucun cas une obligation pour décrire la réponse linéaire du système. Ainsi, il n'est tenu compte à aucun instant d'une quelconque rétroaction de la réponse du halo sur les particules entrantes. Par conséquent, le fait qu'une particule soit interne ou externe au halo n'influe en rien le calcul de la réponse. Il déjà été fait mention d'une description en terme de propagateurs (voir les chapitres 2.1.2 pour le cas cubique et [l'annexe A de l'article ci-joint](#) pour le cas sphérique) qui requiert de connaître la fonction de distribution du halo et de son environnement. L'addition d'un terme source peut être autrement évitée, pour peu que le champ de marée perturbateur contienne les contributions des particules qui sont entrées dans le halo. Les particules accrétées n'interviennent plus que par le terme ψ^e de l'équation de Boltzmann (voir l'équation (2.78)). Ce type de description nécessite néanmoins de connaître à chaque instant les positions-vitesses de la matière entrante et donc de résoudre à priori les trajectoires de particules entrant dans le halo non perturbé. Cette contrainte n'est pas souhaitable puisqu'elle impose de connaître le modèle à l'équilibre du halo et ceci dès la définition du terme source. De plus, la méthode "source" décrit naturellement le processus de mélange des phases à partir de la seule connaissance de la fonction de distribution de la matière au rayon de Viriel. La méthode "potentielle" nécessite un calcul des trajectoires, particules par particules, pour pouvoir décrire correctement ce processus, avant même de pouvoir déterminer la réponse du halo et tout en augmentant la quantité d'informations à posséder sur l'accrétion (puisque'il faut son évolution temporelle). Pour ces premières raisons, cette description dichotomique (champ de marée + accrétion) a été retenue. De plus, il est montré dans le chapitre suivant que la description "potentielle" ne peut être conservée pour une approche non linéaire, désignant de fait la description "source" comme étant celle la plus à même de décrire correctement la dynamique du halo ouvert.

Résumé

Les calculs précédents supposent un régime de perturbations de faibles amplitudes permettant la linéarisation des équations de champs et d'évolution (cf. les équations (8.2) et (2.62)). L'introduction d'un terme de source permet l'extension de ce formalisme au cas des systèmes ouverts (cf. l'équation (2.39)). Au final, la réponse d'un halo est déduite à partir de deux entrées, le champ de marée et l'accrétion, sur lesquelles opèrent deux opérateurs différents (cf. l'équation (2.84)). Outre sa simplicité, l'approche linéaire permet une propagation directe des fonctions de corrélations des perturbations aux corrélations de la réponse (équation (2.93)).

2.4 Réponse non linéaire du halo sphérique

De la nécessité d'un calcul non-linéaire

L'absence de rétroaction implique que la trajectoire de la matière accrétée reste celle qu'elle aurait eu dans le halo à l'équilibre. En particulier, toute matière entrante doit *ressortir* par simple conservation de l'énergie et du moment. Plus généralement, une perturbation entrante est en mesure d'orbiter au travers du halo sans être aucunement perturbée. Une telle situation n'est bien sûr pas réaliste : par exemple, un satellite verra

sa trajectoire modifiée sous l'effet des forces de friction dynamique. D'un point de vue du calcul de la réponse, l'absence de friction implique une excitation récurrente du halo sous-jacent et peut conduire à de fortes réponse du halo pour peu qu'une excitation mette en jeu des résonances "critiques". Ceci conduit naturellement à considérer les effets non linéaires qui entrent en jeu dans le calcul de la réponse du halo. De plus, un halo excité par des fluctuations du champ de marée tend à développer des "modes" amortis, du fait du caractère stable du modèle à l'équilibre. Néanmoins, certains de ces modes s'avèrent n'être que faiblement amortis et un halo soumis à un champ perturbateur peut "osciller" durant de longues périodes avant la réponse ne soit complètement dissipée. La prise en compte d'effets non linéaires doit également pouvoir influencer sur ce phénomène, dans un souci de description cohérente de la dynamique interne du halo. Enfin, le régime linéaire ne résout pas la gravité propre de la matière entrante et par conséquent ne permet pas d'aborder correctement les interactions entre objets et l'effeuillage des structures par effets de marée.

Il faut noter que sous l'influence des couplages non-linéaires, les trajectoires sont modifiées, nécessitant de fait un traitement de type source, où la dynamique est résolue de façon cohérente à partir des conditions initiales. Une description purement potentielle nécessiterait de connaître à priori les trajectoires perturbées, chose impossible compte tenu des couplages qui apparaissent dans ce régime. Ceci justifie, à posteriori cette fois, cette description séparée des perturbations externes et internes.

Calcul perturbatif

Le problème non linéaire est abordé via une description perturbative. Dans cette approche, la réponse du système à un jeu de perturbations s'écrit sous la forme d'une somme de "corrections" à l'ordre linéaire et d'amplitudes de plus en plus faibles:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= F(\mathbf{v}) + \epsilon f^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \epsilon^2 f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \dots + \epsilon^n f^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ &= \sum_n \epsilon^n f^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).\end{aligned}\quad (2.94)$$

L'utilisation d'une telle méthode suggère que la série décrite par l'équation (2.94) converge avec la prise en compte d'ordres de plus en plus élevés. Cette propriété n'est pas garantie à priori. En toute généralité, un système est susceptible de développer des instabilités qui rendent caduque l'applicabilité de la méthode linéaire et à fortiori l'approche perturbative non-linéaire. Pour cette raison, les propriétés de stabilité et de faibles non linéarités seront supposées par la suite. Dans les sections suivantes, les calculs seront effectués dans l'espace des fréquences ω (après transformation de Laplace) mais peuvent être conduits de façon équivalente dans l'espace temporel (comme c'est le cas dans l'article ci-joint pour le cas sphérique).

Le développement perturbatif à l'ordre (n) est injecté dans l'équation de Boltzmann et l'équation de Poisson. En particulier l'équation de Boltzmann de la solution à l'ordre (n) (équation 33 de l'article ci-joint) est donnée par:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(n)}}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} f_{\mathbf{k}}^{(n)} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot \mathbf{k} [\psi_{\mathbf{k}}^{(n)} + \delta_n^1 \psi_{\mathbf{k}}^e] - \sum_{k=1}^{n-1} \{H^{(k)}, f^{(n-k)}\}_{\mathbf{k}} + \delta_n^1 s_{\mathbf{k}}^e \right).$$

Le champ de marée externe et le terme source sont considérés d'ordre (1) uniquement. Le système d'équation est résolu ordre perturbatif par ordre perturbatif de façon ana-

logue au cas linéaire. Le caractère hiérarchique des équations à l'ordre (n) apparaît explicitement via les crochets de Poisson en $\{H^{(k)}, f^{(n-k)}\}$, faisant intervenir les solutions d'ordres inférieurs. Les réponses en potentiel et densité à l'ordre (n) sont à nouveau projetées sur la base biorthogonale :

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(n)}(\mathbf{I}, t) = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{I}), \quad (2.95)$$

$$\rho_{\mathbf{k}}^{(n)}(\mathbf{I}, t) = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \rho_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{I}). \quad (2.96)$$

La solution reliant $a_{\mathbf{p}}^{(n)}$ à $\psi_{\mathbf{k}}^e$, $s_{\mathbf{k}}^e$ et les ordres inférieurs de la réponse est obtenue en rappelant que $\rho_{\mathbf{k}}^{(n)} = \int dv f_{\mathbf{k}}^{(n)}$ et utilisant les propriétés de biorthogonalité de la base de potentiel. En particulier la solution au second ordre est donnée par l'équation 42 de l'article ci-joint, qui peut être formellement écrite comme² :

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^{(2)}(t) = & \sum_{\mathbf{q}_1} \int_{-\infty}^t d\tau_1 (\mathbf{K}_1)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1} (\tau_1 - t) a_{\mathbf{q}_1}^{(2)}(\tau_1) + \\ & \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 (\mathbf{K}_2)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} (\tau_1 - t, \tau_2 - \tau_1) (a_{\mathbf{q}_1}^{(1)}(\tau_1) + b_{\mathbf{q}_1}(\tau_1)) (a_{\mathbf{q}_2}^{(1)}(\tau_2) + b_{\mathbf{q}_2}(\tau_2)) + \\ & \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 (\mathbf{Q}_2)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} (\tau_1 - t, \tau_2 - \tau_1) (a_{\mathbf{q}_1}^{(1)}(\tau_1) + b_{\mathbf{q}_1}(\tau_1)) c_{\mathbf{q}_2}(\tau_2). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Comme attendu, cette solution fait intervenir tous les couplages d'ordre (2) : la première intégrale rend compte de l'auto-gravité de la réponse au deuxième ordre, la deuxième intégrale rend compte du couplage entre les deux composantes "potentielles d'ordre (1)" et la dernière rend compte du couplage entre la réponse du halo et la source, tous deux d'ordre (1). Ces couplages sont modulés par des opérateurs à "2 termes", \mathbf{K}_2 et \mathbf{Q}_2 , qui ne sont fonction que de la fonction de distribution à l'équilibre et des bases décrivant la source et la réponse (cf. équation 40 de l'article ci-joint).

Il faut noter que l'équation (2.97) fait intervenir des intégrales *ordonnées* dans le temps de type :

$$\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \mathbf{K}_2(\tau_1 - t, \tau_2 - \tau_1) (a(\tau_1) + b(\tau_1)) (a(\tau_2) + b(\tau_2)). \quad (2.98)$$

Qualitativement, ces intégrales ordonnées traduisent qu'un "évènement" (une fluctuation de potentiel par exemple) à l'instant τ_1 va être couplé à l'état du halo à ce même instant *sachant ce dernier a évolué pendant ce temps* (au cours de τ_2). D'où l'importance des phases relatives et le respect des contraintes de causalité, tel que le reflète le noyau qui n'est fonction que de ces dernières : c'est l'écart temporel entre deux évènements qui est déterminant pour leur couplage non-linéaire, en particulier dans des systèmes pour lesquels les résonances jouent un rôle crucial, comme celui étudié ici.

Le calcul non linéaire est également mené jusqu'à l'ordre (n) dans l'annexe D de l'article ci-joint et celui fait naturellement intervenir un nombre de couplages de plus en

²on notera que dans l'équation (2.97), les termes \mathbf{q} représentent un nombre d'indices différents selon qu'ils sont attribués aux coefficients \mathbf{b} (décrivant une quantité spatiale) ou \mathbf{c} (décrivant une quantité dans l'espace des phases).

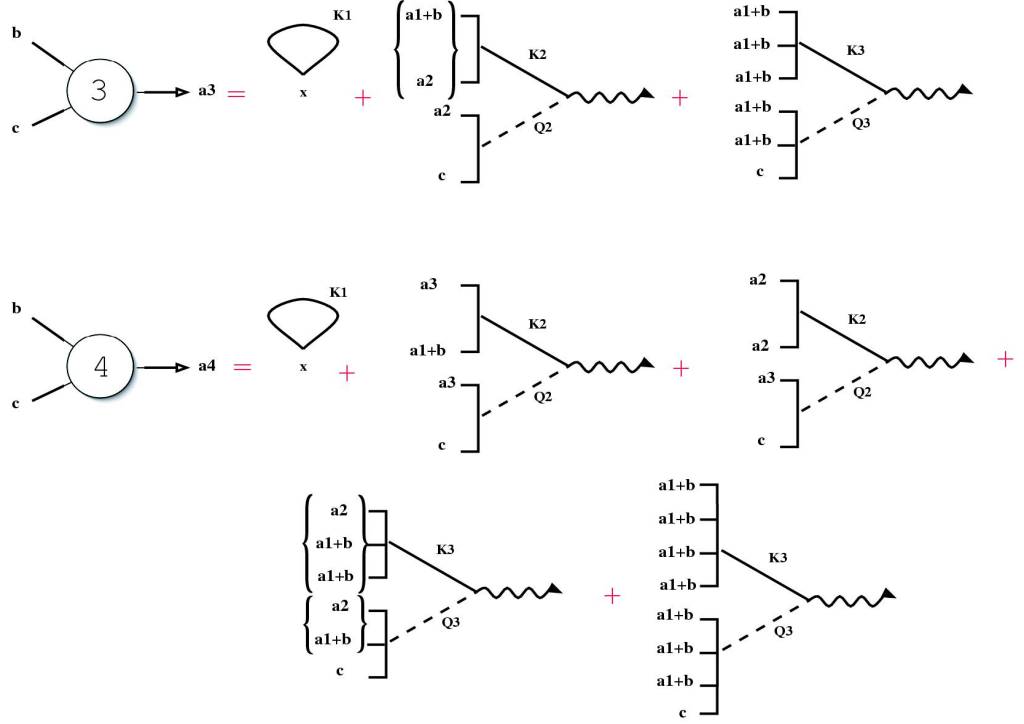


Figure 2.3: Représentation schématique du calcul de la réponse au troisième et quatrième ordre. Les boucles représentent le calcul auto-gravitant. Les autres diagrammes sont à double entrée, traduisant les couplages avec et sans le terme source. Les accolades représentent l'ensemble des permutations possibles des termes, traduisant la non commutativité des couplages.

plus important entre les différents ordres de la réponse. Ces couplages sont “modulés” par des opérateurs de type K_n et Q_n , dont la forme générique reste conforme à certaines symétries, impliquant que leur expression peut être prédite à n'importe quel ordre. L'article ci-joint présente une diagrammatique qui synthétise ces symétries et permet de rendre compte aisément des types de couplages qui sont à l'oeuvre dans un calcul à un ordre arbitraire (figures 3, 4 et D1 de l'article ci-joint et la figure 2.3).

Effets non-linéaires

La description non linéaire de la dynamique du halo doit pouvoir décrire toute une série d'effets inaccessibles au calcul linéaire, dans lequel les trajectoires entrantes restaient non perturbées. Le calcul aux ordres supérieurs prend en compte explicitement la rétroaction de la réponse sur “elle-même” et la matière entrante n'est, de fait, plus étrangère au milieu dans lequel elle se propage.

La friction dynamique est par essence la conséquence d'une rétroaction du milieu sur la perturbation. La présence de termes de couplages entre réponse et perturbation dans l'équation (2.97) suggère que l'approche perturbative permet de rendre compte de cet effet. Cette hypothèse n'a toutefois pas été vérifiée quantitativement à ce stade. Par

ailleurs, il n'est pas clair que l'ordre (2) soit suffisant pour décrire de manière satisfaisante la friction, bien qu'il soit d'usage de s'arrêter au premier ordre perturbatif non nul.

De plus, la gravité propre des objets entrants est prise en compte dans l'approche non linéaire, au même titre que la gravité propre de la réponse était déjà prise en compte dans le régime linéaire. Par conséquent, le mélange de phases (qui intervient même en l'absence d'auto-gravité) va se trouver en compétition avec la tendance des objets à rester cohérents sous leur propre gravité. De la même façon, un objet étendu subira une friction dynamique ou un champ de marée différent en ses différents points. La compétition entre ces effets et l'auto gravité des objets est dorénavant prise en compte. Pratiquement, cela nécessite de pouvoir décrire ces objets de façon suffisamment précise dans l'espace des phases. En particulier, si les bases de projection ne possèdent pas une résolution suffisante, l'impact d'une "diffusion numérique" liée au lissage de ces objets pourrait devenir important et de tels effets devront être étudiés à terme.

Enfin, différents objets rentrant successivement à l'intérieur du halo sont susceptibles de s'influer l'un l'autre. A nouveau, le traitement auto-consistent de l'accrétion dans le régime non linéaire permet d'aborder ces phénomènes, là où ces objets s'ignoraient dans la description au premier ordre. Il est faut noter par ailleurs que les phases relatives de ces objets vont nécessairement entrer en jeu dans un tel phénomène et que ces phases (ou temps relatifs) interviennent explicitement dans l'équation (2.97).

Suivi des sous-structures

La prise en compte des effets de friction, d'auto-gravité et d'interactions mutuelles autorise une description cohérente de la dynamique des sous-structures dans l'espace des phases. Par conséquent, le formalisme non linéaire peut être particulièrement adapté à l'étude de leur dynamique au cours de leur accrétion.

Se pose la question de l'identification des sous-structures au sein du halo. Par définition, la méthode proposée ici résout l'évolution de la fonction de distribution induite par l'accrétion d'objets. Conséquence de la description de l'accrétion en termes de fonction de distribution advectée, les satellites n'apparaissent que comme des structures particulières de l'espace des phases "accrété". De fait, les sous-structures ou ce qu'il en reste doivent apparaître comme des régions particulières de l'espace des phases décrit par la réponse du halo. Cette image n'est pas qu'une vue de l'esprit. Arad et al. (2004) ont par exemple montré que les sous-structures des halos simulés correspondent aux régions de haute densité dans l'espace des phases, permettant une extraction particulièrement efficace de ces objets fondus dans le profil du halo hôte, y compris dans les régions de très haute densité. Ceci suggère qu'un suivi des objets accrétés serait probablement plus simple et plus efficace dans l'espace des phases, tel qu'il est proposé dans le formalisme présent, que dans l'espace des positions. De plus, ces objets ne s'y manifestent que dans la *réponse* à la fonction de distribution, éliminant d'entrée le problème d'extraction au sein d'un halo dominant. A terme, les problématiques telles que l'effeuillage progressif des objets ou la distributions des restes d'objets accrétés au sein du halo doivent pouvoir être abordés dans le formalisme développé ici. A l'inverse, ce genre d'étude doit pouvoir fournir des critères d'identification des sous-structures ou des restes de ces objets dans des régimes extrêmes (haute densité de l'hôte, déchirement par effet de marée), via leur propriétés dans l'espace des phases.

Corrélations non linéaires

L’approche non linéaire perturbative n’a pas été implémentée. Au vu de la théorie seule, elle permet néanmoins de se faire une première idée du type de statistiques qu’il est nécessaire de connaître sur les perturbations. La prise en compte d’effets non linéaires modifie naturellement les propriétés statistiques de la réponse. Par exemple, la fonction de corrélation à deux points de la réponse en densité du halo peut s’écrire sous la forme (équation 52 de l’article ci-joint):

$$\langle \rho(x_1)\rho(x_2) \rangle = \varepsilon^2 \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \rho^{[\mathbf{q}_1]}(\mathbf{r}_1) \rho^{[\mathbf{q}_2]}(\mathbf{r}_2) \left[C_2^{\{2\}} + \varepsilon C_2^{\{3\}} + \dots \right], \quad (2.99)$$

où $x_{1,2}$ désigne la position dans l’espace et dans le temps de deux points appartenant au halo. Le premier terme de la série est d’ordre deux et correspond à la fonction de corrélation déjà déduite de la description linéaire (voir aussi l’équation 53 de l’article ci-joint). Les effets de la non linéarité ne se font qu’au troisième ordre, via la quantité $C_2^{\{3\}}$ donnée par l’équation 54 de l’article. Il apparaît donc que les premiers effets de la non-linéarité sur la fonction de corrélation à deux points se feront sentir au travers de la fonction de corrélation à trois points des propriétés de l’environnements, via des quantités de type $\langle \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \rangle$ pour la source ou $\langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \rangle$ pour le potentiel. Ce résultat est d’importance dans l’optique d’une mesure de propriétés des perturbations dans les simulations : *de façon générale, un traitement non linéaire nécessite de connaître les corrélation à trois points des perturbations.* Compte tenu de la plus lente convergence de ces statistiques (par rapport à celle à deux points), il apparaît clairement qu’un traitement non linéaire de la dynamique du halo implique une excellente connaissance statistique de l’environnement, via un grand nombre de ses réalisations.

Il faut toutefois noter que si la statistique des perturbations est gaussienne, alors l’effet de la non-linéarité ne se fera sentir que via des corrélations “paires” et les corrélations d’ordres supérieurs s’expriment en fonction de corrélation à deux points. Par conséquent, l’étude des effets non linéaires sur la fonction de corrélation à deux points ne nécessiterait pas d’emblée le calcul de corrélations d’ordres supérieurs, rendant la tâche plus accessible. Il s’avère que la statistique des coefficients \mathbf{c} est quasi-gaussienne et non centrée (voir l’annexe de Pichon & Aubert (2005)), laissant supposer qu’une application du théorème de Wick reste possible, facilitant d’autant la tâche. En revanche, pour des études portant uniquement sur l’effet non-linéaire du champ de marée, la situation peut s’avérer plus délicate. En première approximation, le potentiel extérieur est isotrope, auquel cas le champ est quasi-gaussien (voir annexe de Pichon & Aubert (2005)) mais *centré* et par conséquent, les corrélations à trois points sont nulles. Les effets non linéaires sur la corrélation de la réponse ne se font donc sentir que si le développement de la corrélation de la réponse est poussé jusqu’à des ordres en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Ceux-ci font intervenir des corrélations de type $\langle a^{(3)}a^{(1)} \rangle$ impliquant des calculs de réponses au *troisième ordre*. Pour ce cas très précis, la négligence de l’anisotropie conduit à rendre le calcul non-linéaire plus complexe. Plus généralement, la nécessité d’avoir recours à des statistiques d’ordre supérieur à deux ou à des calculs au troisième ordre résulte clairement du souci de cohérence globale du formalisme développé ici.

2.5 Evolution séculaire du halo

Dans les sections précédentes, l'action de l'environnement sur le halo se manifeste par des perturbations apportées au système à l'équilibre. Ces perturbations sont supposées être transitoires, permettant au halo de "relaxer" vers son état d'équilibre au bout d'un certain temps. Toutefois, il apparaît clairement que si le système est soumis de façon récursive à des perturbations alors son état d'équilibre s'en trouvera modifié. En d'autres termes, l'équation de Boltzmann non-collisionnelle n'est plus valable sur de longues périodes à cause du caractère lentement cumulatif des effets des interactions entre le système et son environnement.

Une façon d'aborder ce type d'évolution est de considérer deux échelles temporelles distinctes. L'une est dite "courte", t , et correspond aux temps caractéristiques des perturbations. Durant cette échelle de temps, le modèle de halo à l'équilibre est présumé statique, tel qu'il a été considéré jusqu'à présent. De plus, l'évolution séculaire du halo conduit à considérer une échelle de temps "longs" T , au cours desquels l'état d'équilibre du système est modifié et au cours duquel les perturbations sont *nulles* en moyenne. Ainsi, la fonction de distribution, le potentiel associé, le champ de marée extérieur et la source de matière peuvent s'écrire :

$$F(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t, T) = F(\mathbf{I}, T) + f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t), \quad (2.100)$$

$$\Psi_0(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t, T) = \Psi(\mathbf{I}, T) + \psi(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t), \quad (2.101)$$

$$\Psi_0^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t, T) = \Psi^e(\mathbf{I}, T) + \psi^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t), \quad (2.102)$$

$$S_0(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t, T) = S(\mathbf{I}, T) + s(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t). \quad (2.103)$$

Si l'évolution séculaire est suffisamment lente en regard des temps de parcours des orbites, les quantités séculaires restent des fonctions des actions seules (Binney & Tremaine (1987)). L'équation de Boltzmann décrivant le système devient (cf. l'équation C4 de l'annexe de l'article):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{w}} \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{I}} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} = S^e + s^e. \quad (2.104)$$

Pour des temps courts, les quantités séculaires sont considérées comme statiques et l'équation 2.104 se réduit au premier ordre à l'équation de Boltzmann linéarisée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{w}} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} = s^e. \quad (2.105)$$

Cette équation au premier ordre a déjà été résolue dans les sections précédentes. Dans une approche quasi-linéaire, elle permet d'accéder à l'évolution des fluctuations f et ψ sur des échelles de temps courtes. Si l'on définit l'opération de moyenne sur temps longs $\langle \cdot \rangle_T$ par :

$$\langle Y \rangle_T \equiv 1/\Delta T \int_{T-\Delta T/2}^{T+\Delta T/2} dt Y(t), \quad (2.106)$$

et que l'on moyenne l'équation 2.104, l'équation d'évolution séculaire est donnée par (équation 56 de l'article ci-joint):

$$\frac{\partial \langle F \rangle}{\partial T} = \left\langle \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{w}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \right\rangle_T - \left\langle \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{I}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right\rangle_T + \langle S^e \rangle_T. \quad (2.107)$$

Bien qu'étant de second ordre en amplitude, le premier terme du membre de droite ne peut être annulé à priori : une corrélation non nulle entre la réponse et la perturbation peut conduire à une évolution de la fonction de distribution F sur le long terme. Ces produits entre termes de premier ordres peuvent être explicités en fonction de F à partir des équations (2.84), 2.81. De plus les variations de la fonction de distribution sont supposées se faire sur des temps plus long que le temps de parcours d'une étoile typique sur son orbite. Par conséquent l'équation 2.107 peut-être moyennée sur les angles \mathbf{w} . Finalement, l'équation 2.107 prend la forme d'une équation de diffusion dans l'espace des actions :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \langle D_0(\mathbf{I}) \rangle - \langle \mathbf{D}_1(\mathbf{I}) \rangle \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} - \langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}) \rangle : \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{I}^2}, \quad (2.108)$$

où : désigne un produit tensoriel et dont les coefficients sont donnés par (équations (C8), (C9), (C10) de l'article ci-joint)

$$\begin{aligned} \langle D_0(\mathbf{I}) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle S_e \rangle_T d\mathbf{w} \\ &+ \left\langle \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left([\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\mathbf{I}, t)] \int_{-\infty}^t e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau-t)} s_e(\mathbf{k}, \mathbf{I}, \tau) d\tau \right) \right\rangle_T \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\langle \mathbf{D}_1(\mathbf{I}) \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left([\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\mathbf{I}, t)] \int_{-\infty}^t e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau-t)} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] d\tau \right) \right\rangle_T \quad (2.110)$$

$$\langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}) \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} [\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\mathbf{I}, t)] \int_{-\infty}^t e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau-t)} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] d\tau \right\rangle_T. \quad (2.111)$$

Les coefficients \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 apparaissent comme les coefficients de dérive et de diffusion de la fonction de distribution F dans l'espace des actions. On notera que ces coefficients ne dépendent plus des phases angulaires, du fait de l'opération de moyenne sur les angles. Ces coefficients dépendent séculairement du temps via la dépendance en F des réponses en potentiel ψ (cf. les équations (2.84), 2.81).

Les coefficients D_0 , \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 font intervenir explicitement des produits de type $\psi\psi^e$ ou ψs^e . La réponse fluctuante du système pouvant s'exprimer uniquement en fonction des perturbations extérieures, les coefficients font directement intervenir les corrélations des flux et potentiels extérieurs. En l'absence de telles corrélations, l'équation (2.108) traduit simplement la variation de F induite par l'accrétion séculaire de matière (si cette dernière existe). On notera que si les temps T sont beaucoup plus longs que le temps de variation typique des réponses linéaires, alors les intégrales temporelles intervenant dans les coefficients peuvent être remplacées par des intégrations portant sur $-\infty$ à $+\infty$ (au lieu de $-\infty$ à t).

Si l'ergodicité des processus perturbateurs est supposée, les moyennes temporelles su T peuvent être remplacées par des moyennes d'ensemble. Se faisant, on considère la diffusion des orbites d'un halo moyen dans un environnement typique caractérisé statistiquement (via ses corrélations). Par exemple, le coefficient \mathbf{D}_2 est alors donné par :

$$\langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}']*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) P_a^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}], \quad (2.112)$$

où le “spectre de puissance temporel” P est donné par (équation (C12) de l’article ci-joint) :

$$\int_0^\infty C[\mathbf{a}_\mathbf{n}, \mathbf{a}_{\mathbf{n}'}](\Delta\tau) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \Delta\tau} d\Delta\tau = P_{\mathbf{a}}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}], \quad (2.113)$$

avec $\mathbf{a}_\mathbf{n}(t) = a_\mathbf{n}(t) + b_\mathbf{n}(t)$. L’équation (2.113) suppose que les perturbations au premier ordre sont stationnaires, i.e. $\langle \mathbf{a}_\mathbf{n}(t), \mathbf{a}_{\mathbf{n}'}(\tau) \rangle = C[\mathbf{a}_\mathbf{n}, \mathbf{a}_{\mathbf{n}'}](t - \tau)$. Ceci démontre que la diffusion des orbites du système à l’équilibre est gouvernée par les corrélations des perturbations (objets entrant par exemple). De même, les coefficients \mathbf{D}_1 et D_0 sont donnés par (cf. équations (C14) et (C15) de l’article ci-joint):

$$\langle D_0(\mathbf{I}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle S_e \rangle_T d\mathbf{w} + \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left(\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}']*}(\mathbf{I}) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}], e}(\mathbf{I}) P_{ac}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}] \right), \quad (2.114)$$

$$\langle \mathbf{D}_1(\mathbf{I}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left(\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}']*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) P_a^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}] \right). \quad (2.115)$$

Pour un état d’équilibre F donné, l’équation (2.105) permet de calculer les réponses en potentiel ψ . Ce calcul à l’ordre linéaire conduit à l’évaluation des coefficients de diffusion à partir desquels est déduite l’évolution séculaire de F . En retour, l’évolution de l’état de l’équilibre amène à calculer des réponses linéaires actualisées. De façon récursive, l’évolution au long cours de la réponse du halo doit pouvoir être déduite de cette équation de diffusion.

Dans l’esprit, l’approche est similaire à celle appliquée pour l’étude de l’évolution des amas globulaires. Dans ces systèmes, les collisions entre étoiles impliquent que l’approximation de champ moyen n’est plus valable. Ces “collisions”, tracées par la fonction de corrélation à deux particules, impliquent une dérive de l’état d’équilibre du système. Toutefois, dans le cas du halo ouvert, les particules de matière noire ne diffusent pas entre elles mais sur les perturbations induites par l’environnement. La différence est de taille car c’est la granulosité induite par l’environnement qui fait évoluer séculairement le système, et non celle du système comme c’est le cas pour les amas globulaires.

L’évolution séculaire des halos sous l’influence a déjà fait l’objet d’études par le passé par Weinberg (2001a), Weinberg (2001b) et Ma & Bertschinger (2004) par exemple.

Ma & Bertschinger (2004) se reposent sur une description *cinétique* de la dynamique du halo. Ils parviennent à résoudre la première équation de la hiérarchie BBGKY faisant intervenir la fonction de distribution à deux particules. Ma & Bertschinger (2004) évaluent cette dernière en considérant la statistique contrainte des perturbations au sein du halo, dans le régime des faibles fluctuations gaussiennes. Ces perturbations sont les progéniteurs à haut redshift des sous-structures qui vont apparaître sous l’action de la gravité. Il en résulte une équation de Fokker-Planck dont les coefficients de diffusions dépendent des corrélations des progéniteurs des sous-structures et par extension du modèle cosmologique sous-jacent. A nouveau, les orbites du système diffusent sur les sous-structures (et non pas entre elles).

La démarche présentée dans cette section diffère en cela qu’elle aborde le problème du halo déjà formé : en d’autres termes, sa fonction de distribution est déjà connue, l’objet “halo” est bien défini et par conséquent l’accent est mis sur le halo à des redshifts plus bas que ceux qui sont envisagés par Ma & Bertschinger (2004). Dans la démarche

développée ici, la statistique des points diffuseurs n'est pas tractable analytiquement et doit être déduite des simulations. De plus, les deux démarches diffèrent fondamentalement dans leur *description*. Ma & Bertschinger (2004) décrivent la dynamique du halo de façon *cinétique* là où l'approche présente une description dans l'espace des *invariants du mouvement*, autrement dit les actions du système. Or les actions (et les angles associés) permettent d'étudier les systèmes dynamiques sous un autre point de vue. Ainsi, l'équation obtenue en (2.108) démontre que la diffusion s'effectue également dans l'espace des actions. En d'autres termes, les particules de matière noire "dérivent" car leurs *orbites* "dérivent" globalement et la marche aléatoire associée à l'équation (2.108) se fait dans l'espace des angles-actions (cf. aussi la figure 6. de l'article ci-joint).

En ce sens, la théorie quasi-linéaire développée ici se rapproche de celle développée par Weinberg (2001a) et Weinberg (2001b). Son obtention de l'équation de Fokker-Planck diffère dans le détail de celle présentée ici mais aboutit à une équation tout à fait similaire, décrivant la dérive et la diffusion des orbites dans l'espace des actions. En utilisant différents modèles ad hoc de "bruit" perturbant le halo, il apparaît que le profil de densité des halos tend vers une forme universelle. Il montre en particulier que la nature de la perturbation récurrente influe peu sur la forme du profil asymptotiquement atteinte. Ceci est dû à l'existence de modes faiblement amortis dans le halo qui dominent la réponse dans le cas d'une excitation récurrente. Par conséquent, la forme du profil dépend essentiellement du mode excité et non de la façon dont celui-ci est excité. L'approche décrite ici diffère par l'inclusion de termes d'accrétion séculaire et perturbative, là où l'approche développée par Weinberg se limite à des interactions de marée. Par conséquent, l'accrétion est susceptible de modifier au cours du temps les modes faiblement amortis du système et "couple" le comportement asymptotique du halo avec son histoire d'accrétion. Les coefficients de diffusions définis par les équations (2.115), (2.112) et (2.114) dépendent directement des propriétés statistiques des flux mesurés dans les simulations. Par conséquent la résolution de l'équation (2.108) doit conduire à un comportement asymptotique du halo "conforme" aux flux mesurés. Une telle démarche devrait permettre de vérifier si les modes excités de façon récurrente par des perturbations réalistes sont les mêmes que les modèles ad hoc de Weinberg (2001b). Plus généralement l'étude des comportements asymptotiques des halos devront permettre de déterminer si les caractéristiques "universelles" mesurées (tels les profils piqués) peuvent être prédites au vu des propriétés statistiques de l'accrétion et du champ de marée.

2.6 Applications Futures

Le champ d'application du formalisme non linéaire est vaste. Pour preuve, la [partie 5 de l'article ci-joint](#) présente une revue des différentes problématiques qui peuvent être abordées. Les questions qui se posent sont essentiellement de quatre types :

- la prédiction des propriétés statistiques des halos à partir d'une connaissance des environnements,
- la prédiction des propriétés statistiques des environnements à partir de l'observation de la distribution de matière dans les halos,

- l'inversion temporelle de l'histoire d'accrétion d'un halo à partir de l'observation de son état actuel (*inversion dynamique*),
- l'évaluation des contributions relatives des effets intrinsèques et extrinsèques sur les propriétés des halos ("inné ou acquis").

L'ensemble de ces questions peuvent être abordées par la comparaison entre observations et prédictions. Parmi ces observations, l'article ci-joint cite la convergence typique du lentillage faible dans les amas : celle-ci est reliée linéairement aux statistiques à deux points de la matière à l'intérieur du halo et par conséquent à son histoire d'accrétion. De même, l'excitation de spirales par accrétion et/ou par champ de marée implique que les caractéristiques moyennes (tels leurs enroulements) de celles-ci peuvent s'exprimer en fonction des caractéristiques des perturbations. On aborde également les fonctions de corrélations de l'émission directe de matière noire par les sous-structures qui s'expriment naturellement en fonction de celles de l'environnement. De même, des caractéristiques du halo qui dépendent de façon non triviale des interactions (telles que son ellipticité) peuvent néanmoins s'exprimer en fonction de ces dernières. Enfin, l'épaisseur optique des halos dépend de la densité de matière et de la vitesses des sous-structures qui y sont enfouie. Par conséquent l'absorption sur la ligne de visée d'un quasar peut être reliée aux statistiques des interactions agissant sur les halos absorbants.

On se concentrera ici sur les deux champs d'application extrêmes du formalisme : la prédiction de caractéristiques observables du halo à partir des propriétés de son environnement (par effet Sunyaev-Zeldovich et X) et le problème galactique inverse permettant de remonter aux propriétés de l'environnement à partir de l'état actuel de la dynamique (par des relevés cinématiques locaux). D'autres applications sont développées dans l'article ci-joint et dans son annexe.

Prédictions sur la distribution statistique de matière au sein des halos

Bien qu'invisible par définition, la matière noire au sein des halos de galaxies et d'amas se manifeste de façon indirecte en façonnant les propriétés spatiales de certains phénomènes qui sont eux observables. Ainsi, la distribution spatiale d'un type donné d'émission lumineuse peut être reliée à la distribution sous-jacente de matière noire, pour peu que la loi reliant l'un à l'autre soit connue. L'article ci-joint fait mention par exemple de l'effet Sunyaev-Zeldovich, traduisant la variation de température des photons du fond diffus lors de leur passage au travers d'un amas. Cette variation est de type (par ex. Peacock (1999)):

$$\frac{\Delta T(\mathbf{R})}{T_{\text{CMB}}} \sim \int dz n_e(z, \mathbf{R}) T_e(z, \mathbf{R}), \quad (2.116)$$

où $n_e(z, \mathbf{R})$ et $T_e(z, \mathbf{R})$ désigne respectivement la densité et la température des électrons interagissant avec les photons et où \mathbf{R} désigne la position sur le ciel d'un point par rapport au centre de l'amas. La mesure est intégrée sur z le long de la ligne de visée. Si l'on suppose 1) que la densité d'électrons est proportionnelle la densité locale de matière noire 2) que la variation de n_e l'emporte sur celle de T_e , alors la variation de température est une fonction linéaire de la densité projetée de matière noire. Si l'on imagine un ensemble statistique de ces mesures d'effet SZ, la fonction de corrélation à deux points

de ces variations de température peut s'écrire (cf. équation 71 de l'article ci-joint) :

$$\frac{\langle \delta T(\mathbf{R}) \delta T(\mathbf{R}') \rangle}{\langle \Delta T \rangle^2} \sim \langle a_{\mathbf{n}} a'_{\mathbf{n}} \rangle, \quad (2.117)$$

où $\langle \Delta T \rangle$ désigne la variation de température moyenne induite par la profil moyen projeté des halos et où $\delta T(\mathbf{R})$ désigne la fluctuation locale de température due à une fluctuation de densité $\rho(\mathbf{R})$ telle que:

$$\rho(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \int dz \rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}). \quad (2.118)$$

En conséquence de la relation linéaire supposée entre variation de température et densité locale de matière noire, la fonction de corrélation à deux points des fluctuations est directement relié aux propriétés de statistiques de la réponse du halo. La connaissance des environnements doit permettre de prédire les échelles caractéristiques des variations de température au sein des halos, compte tenu de la relation (2.93) reliant directement cette fonction de corrélation aux statistiques du champ de marée et du terme source.

De façon analogue, l'émission X émise par le rayonnement de freinage des électrons d'un amas peut être reliée à la densité sous jacente de matière noire. Si l'on suppose à nouveau un biais constant entre matière noire et densité des électrons, alors l'émissivité X d'un amas par unité de surface projetée est de type (équation E10 de l'article ci-joint, cf. par ex. Padmanabhan (1996) ou Peacock (1999)) :

$$\sigma_{\nu}(\mathbf{R}) \sim \int dz \rho^2(\mathbf{R}, z), \quad (2.119)$$

la dépendance quadratique en densité traduisant le fait que l'émissivité X dépend du carré de la densité d'électrons (cf. équation E9 de l'article ci-joint). A nouveau, le profil en densité de l'amas peut être décrit par un profil moyen $\langle \rho(\mathbf{R}, z) \rangle$ auquel s'ajoutent des fluctuations $\delta \rho(\mathbf{R}, z)$ induites par les interactions avec l'environnement. A supposer que l'on dispose d'un échantillon statistique de cartes d'émission, l'émissivité moyenne s'écrit (équation E11 de l'article ci-joint) :

$$\langle \sigma_{\nu}(\mathbf{R}) \rangle = W_x \int dz \langle \rho(\mathbf{R}, z) \rangle^2 + W_x \int dz \langle \delta \rho^2(\mathbf{R}, z) \rangle. \quad (2.120)$$

Précisons que le profil moyen est fourni par un *modèle*. Par conséquent, l'on s'attend à un excès dans l'émissivité moyenne, dues aux fluctuations de densités autour du profil modèle. Celles-ci peuvent s'exprimer en fonction des coefficients de la réponse :

$$\langle \delta \rho^2(\mathbf{R}, z) \rangle = \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} \rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}) \rho^{[\mathbf{n}']}(\mathbf{r}) \langle a_{\mathbf{n}} a'_{\mathbf{n}} \rangle. \quad (2.121)$$

A nouveau, cet excès peut être relié aux statistiques à deux points de l'environnement, via les coefficients $a_{\mathbf{n}}$ de la projection des fluctuations de densité.

D'autre part la fonction de corrélation à deux points de l'émissivité X dépend la fonction de corrélation d'ordre 4 de la réponse (cf. équation E13 de l'article ci-joint) :

$$\langle \sigma_{\nu}(\mathbf{R}) \sigma_{\nu}(\mathbf{R}') \rangle \sim \langle a_{\mathbf{n}1} a_{\mathbf{n}2} a_{\mathbf{n}3} a_{\mathbf{n}4} \rangle \quad (2.122)$$

Cette statistique est en principe exprimable en fonction des propriétés statistiques du champ de marée et de l'accrétion environnants, bien que probablement difficile à évaluer

en pratique, même sans tenir compte des effets non linéaires. A supposer que la statistique des coefficients de projections soient gaussienne, cette corrélation d'ordre élevée peut s'exprimer en fonction de corrélation à deux points (via le théorème de Wick, cf. E5 de l'article ci-joint) de la réponse, facilitant ainsi la prédiction sur les échelles caractéristiques de l'émission X.

Clairement, ces applications (et celles développées dans l'article) supposent des hypothèses simplificatrices rendant le problème plus abordable dans un premier temps. En particulier, elles reposent notamment sur des hypothèses de biais constant entre matière observable et matière sombre et supposent que les fluctuations de densité l'emportent sur toutes les variations induites par d'autres processus. De plus, certaines hypothèses sont intrinsèques au formalisme employé (par exemple, halo sphérique dont le profil est supposé connu, interactions de faibles amplitude). Enfin, la mise en commun d'objets observés (pour construire une fonction de corrélation à deux points typique par exemple) nécessite une mise à l'échelle, compte tenu de leur diversité. Cette opération de mise à l'échelle d'objets de taille différentes, projetés qui plus est, constitue une difficulté supplémentaire qui ne pourra pas être ignorée dans le processus de comparaison entre caractéristiques statistiques théoriques et caractéristiques observées.

Inversion dynamique

Le concept d'inversion dynamique (i.e. retrouver l'histoire d'interaction d'un halo à partir de son état actuel) découle naturellement de la formulation linéaire de la réponse du halo, en rappelant que :

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{c}) \rightarrow \mathbf{a}^{(1)} = \mathcal{M} \cdot \tilde{\mathbf{b}}, \quad (2.123)$$

où $\tilde{\mathbf{b}} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Compte tenu de cette formulation, l'opération d'inversion est formellement évidente :

$$\mathcal{M}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{(1)} = \tilde{\mathbf{b}}. \quad (2.124)$$

Reste à associer une observable à la réponse en densité décrite par \mathbf{a} , telle par exemple que la distribution d'étoiles observée dans le halo Galactique ou dans ceux d'autres galaxies. En particulier, la présence de courants d'étoiles trace les accrétions passées du halo. Les étoiles constituant un fluide non collisionnel, leur dynamique est correctement décrite par le formalisme exposé ici. Cette application est discutée en détail dans les sections 5.3 et 5.4 de l'article ci-joint.

Dans le principe, cette approche repose sur la donnée de la densité cinématique d'étoiles du Halo, $A(\ell, \mu)$ définie de telle façon que le nombre d'étoiles dN contenues dans le volume d'espace des phases $d\ell d\mu$ est donné par :

$$dN = A(\ell, \mu) d\ell d\mu, \quad (2.125)$$

où ℓ désigne les coordonnées Galactique sur le ciel et μ les vitesses associées. Comme montré par l'équation 105 de l'article ci joint, cette densité est relié à la réponse aux perturbations de la fonction de distribution des étoiles et par conséquent aux coefficients $\mathbf{a}(\mathbf{t})$:

$$A(\ell_i, \mu_i) = \mathcal{A}_i^{\ell, \mu} \cdot \mathbf{a} \quad (2.126)$$

où $\mathcal{A}_i^{\ell, \mu}$ désigne l'opérateur de conversion de la fonction de distribution des étoiles en densité cinématique $A(\ell_i, \mu_i)$. L'opération d'inversion décrite par (2.124) devient alors possible en posant :

$$A(\ell_i, \mu_i) = \mathcal{A}_i^{\ell, \mu} \cdot \mathcal{M} \cdot \tilde{\mathbf{b}}, \quad (2.127)$$

comme décrit dans la section 4.4.1 de l'article ci-joint : les données cinématiques doivent pouvoir permettre de remonter à l'histoire des interactions de la Galaxie. Il est également démontré dans l'article que la procédure d'inversion reste en principe applicable en prenant en compte les non linéarités dans le régime perturbatif et en posant la relation formelle :

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathcal{M}_2 \cdot \tilde{\mathbf{b}} \otimes \tilde{\mathbf{b}} \quad (2.128)$$

Compte tenu de l'imminence d'un flux important de données sur la cinématique des étoiles dans les prochaines années (RAVE début 2005, GAIA prévu en 2012), une telle approche gagne clairement à être développée afin de participer à une meilleure compréhension de l'histoire de la Galaxie. Toutefois, l'apparente simplicité des relations d'inversion masque d'assez sérieuses difficultés de mise en place pratique. En plus des difficultés inhérentes à toutes démarches inverse, l'inversion dynamique entraîne aussi sont lot de difficultés intrinsèques. Dans un premier temps, les opérateurs \mathcal{M} ou \mathcal{M}_2 font intervenir des opérateurs de couplage qui restent délicats à calculer précisément. D'où la nécessité de parvenir dans un premier temps à une évaluation numérique correcte de ces quantités (cf. par exemple le chapitre 4) pour des modèles de halos réalistes. De plus, il a déjà été mentionné que le halo reste stable à toute forme de perturbations pour des modèles isotropes. Ceci implique que toute perturbation est amenée à être amortie au cours du temps, ce qui signifie pour une démarche inverse qu'il existe un horizon temporel au delà duquel l'histoire d'interaction peut difficilement être retrouvée. Il existe certes des "modes" faiblement amortis sur lesquels une telle procédure inverse pourra se reposer. Néanmoins il est probable que cela restreigne ces études à un certain type d'interactions, dont les échelles caractéristiques restent peu affectées par l'amortissement tels que des effets de grande échelle ou stationnaires. Enfin, il faut noter que typiquement le nombre de paramètres à contraindre est supérieur aux données dont l'on dispose. Par exemple, on pourra disposer d'un cube de données (par ex. position sur le ciel et vitesse radiale) alors que l'espace à contraindre est de dimension six. Par conséquent, une procédure d'inversion nécessite un certain nombre d'à priori physiques, qui se traduisent pratiquement par l'utilisation de procédures de régularisation.

2.7 Conclusions

L'objectif de l'article ci-joint fut d'adresser le problème de la dynamique du halo ouvert. L'approche développée repose sur une description perturbative de l'influence de l'environnement sur la réponse du halo. Les spécificités et les limitations possibles de la théorie sont résumées dans les tables 2.1 et 2.2. Le halo est considéré comme sphérique, nécessitant une transposition des équations d'évolutions dans l'espace des angles-actions. L'influence de l'environnement est caractérisée par le champ de marée dans lequel baigne le halo et par la source décrivant l'accrétion de matière par le système. Ce formalisme aborde également la problématique des effets non linéaires et permet de prendre présumément en compte des effets tels que la friction dynamique et l'effeuillage

Spécificités
Statistique localisée aux frontières du halo
Description fluide sans à priori sur la nature de l'accrétion
Dynamique non linéaire
Description de la dynamique en angles-actions (résonances)
Propagation statistique et application aux observations
Inversion dynamique
Evolution séculaire

Table 2.1: Résumé des spécificités de l'approche développée dans ce chapitre.

Limitations
Régime des faibles perturbations
Conditions aux bords 5D
Frontière du halo arbitraire
Ordre non linéaire de troncature indéfini
Non gaussianité des propriétés de l'environnement ?
Horizon temporel induit par la résolution finie
Possibilité du développement d'instabilités

Table 2.2: Résumé des points limitant de l'approche développée dans ce chapitre.

par effet de marée. Ainsi, cette approche permet d'aborder à la fois les problématiques de représentativité de la réponse, via la propagation statistique, tout en maintenant une cohérence physique, via le développement perturbatif non linéaire. Enfin, la réponse séculaire du halo sous l'action récurrente de son environnement est abordée via un formalisme quasi-linéaire. En séparant les temps caractéristiques du problème en temps longs (au cours desquels le halo évolue séculairement) et en temps courts (liés aux fluctuations induites par les perturbations), l'évolution du système est décrite par une équation de diffusion, décrite dans l'espace des actions et dont les coefficients dépendent de la statistique des conditions aux bords.

En plus de fournir un cadre théorique satisfaisant pour la problématique des halos en interactions, cette étude aura permis de dégager les premières exigences sur la caractérisation statistique des environnements. Notamment, la nécessité d'une description cohérente des différents modes d'interactions a été démontré : les statistiques à deux points de la réponse dépendent des corrélations croisées de la source et du champ de marée. En d'autres termes, une caractérisation statistique de l'environnement limitée aux auto-corrélation de la source ou du potentiel s'avèrerait être incomplète.

D'autre part, il est clairement apparu que la prise en compte statistique des effets non linéaires nécessite une connaissance pointue des propriétés statistiques des environnements. Ainsi, les premiers effets de la non linéarité sur la fonction de corrélation à deux points de la réponse du halo ne se manifestent qu'au travers de la fonction de corrélation à *trois* points des environnements.

Enfin, ces développements théoriques auront permis de mettre en évidence les difficultés émergeant pour la description de la source dans l'espace des phases. Celle-ci peut être décrite dans l'espace des phases position-vitesse, nécessitant une projection

à posteriori de la base décrivant la source dans l'espace des angles-actions. Compte tenu du caractère singulier de la distribution des orbites entrantes dans l'espace des angles-actions, cette projection peut s'avérer difficile et non optimisée. La source peut également être décrite directement dans l'espace des angles actions, mais nécessite un choix à priori du modèle à l'équilibre du halo.

Disposant d'un cadre formel adéquat, reste à 1) mettre en place pratiquement la théorie développée dans ce chapitre et 2) fournir les premières contraintes statistiques sur l'environnement des halos. Le premier point est abordé dans le chapitre suivant, décrivant le détail du calcul de la réponse *linéaire* du halo. Le second point fait l'objet d'une partie à part dans cette thèse où y est décrite une méthode de mesure des flux mesurés dans les simulations cosmologiques.

3

**Dynamical Flows Through Dark Matter
Haloes III : Inner perturbative dynamics,
secular evolution and applications**

Dynamical flows through Dark Matter Haloes

III: Inner perturbative dynamics, secular evolution, and applications

Christophe Pichon^{1,2,3*}, and Dominique Aubert^{1,2,3}

¹ Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis boulevard d'Arago, 75014 Paris, France

² Observatoire astronomique de Strasbourg, 11 rue de l'Université, 67000 Strasbourg, France

³ Horizon, CNRS, 98 bis boulevard d'Arago, 75014 Paris, France

Typeset 1 April 2005; Received / Accepted

ABSTRACT

We investigate statistically the dynamical consequences of cosmological fluxes of matter and moments through the progenitors of galactic halos at z lower than 1. We use canonical perturbation theory to study the evolution of an open collisionless system. The perturbation consists of two different components: the tidal field corresponding to fly-bys and the dark matter entering the halo. The trajectories are followed perturbatively. The dynamical equations are solved linearly, order by order, projecting on a biorthogonal basis to consistently satisfy the field equation.

We obtain, as a result, expressions for the perturbative correlators within the dark matter halo and argue that the perturbative fluid description accounts for the dynamical drag and the tidal stripping of incoming structures. We construct perturbative diagrams accounting for the two-entry excitation of galactic halos. We discuss the realm of non-linear problems which could be addressed statistically by such a theory.

The secular evolution of open galactic haloes is investigated: we derive the kinetic equation which governs the quasilinear evolution of the ensemble-average dark matter profile induced by infall and its corresponding gravitational correlations. This yields a Fokker Planck-like equation for the angle-averaged underlying distribution function. This equation has an explicit source term accounting for the net infall through the virial sphere. We relate the corresponding source, drift and diffusion coefficients to the underlying two-point statistics of the infall and discuss possible applications.

The internal dynamics of sub-structures within galactic haloes (distortion, clumps as traced by X-ray emissivity, weak lensing, dark matter annihilation, tidal streams ..), and the implication for the disk (spiral structure, warp *etc.* ..) are then briefly discussed. We show how this theory could be used to (i) observationally constrain the statistical nature of the infall (ii) predict the observed distribution and correlations of substructures in upcoming surveys, (iii) predict the past evolution of the observed distribution of clumps, and finally (iv) weight the relative importance of the intrinsic (via the unperturbed distribution function) and external (tidal and/or infall) influence of the environment in determining the fate of galaxies.

1 INTRODUCTION

It now appears clearly that the dynamical (azimuthal instabilities, warps, accretion), physical (heating, cooling) and chemical (metal-poor cold gas fluxes) evolution of galaxies are processes which are partly driven by the boundary conditions imposed by their cosmological environment. It is therefore of prime importance to formulate the effects of such an interaction in a unified framework.

Modern digital all-sky surveys, such as the SDSS, 2MASS or the 2dF provide for the first time the opportunity to build statistically relevant constraints on the dynamical

states of galaxies which can be used as observational input. Other projects, like Gaia or Planck, will provide small-scale information on our Galaxy and its environment and will soon allow detailed confrontation of the predictions of models with the observations. We ought to be able to draw conclusions on the internal dynamics of the halo and its inner components and constrain their statistical properties.

Unfortunately, it is difficult to study the response of halos to moderate amplitude perturbations. Current N-body techniques suffer from resolution limitations (due to particle number and drift in orbit integration, see e.g. [Power et al.](#)

(2003), Binney (2004), for a discussion of such effects) that hide to some extent linear collective effects which dominate the response of the halo (Weinberg (1998b), Murali (1999))¹. Simulations on galactic scales are also often carried without any attempt to represent the cosmological variety arising from the possible boundary conditions (the so-called cosmic variance problem). This is because the dynamical range required to describe both the environment and the inner structure is considerable, and can only be achieved for a limited number of simulations (e.g. Knebe et al. (2004), Gill et al. (2004), Diemand et al. (2004)). By contrast, the method presented below circumvents this difficulty while relying on a perturbative treatment of the inner dynamics of the halo. Specifically, our purpose is to develop a tool to study the dynamics of an open stellar system and apply it to the dynamic of a halo which is embedded into its cosmological environment. One can think of this project as an attempt to produce a semi-analytic re-simulation tool, in the spirit of what is done in N-body simulations.

The concept of an initial power spectrum describing the statistical properties of the gravitational perturbations has proved very useful in cosmological studies (e.g. Peebles (1980), Bernardeau et al. (2002)). The underlying paradigm, that gravity drives cosmic evolution, is likely to be a good description at the megaparsec scale. We show below that a similar approach to galactic halos is still acceptable, and marginally within the reach of our modelling capabilities. The description of the boundary is significantly more complex, but the inner dynamics of hot components is better behaved. Here, we describe a stable system which undergoes small interactions, rather than an unstable system in comoving coordinates undergoing catastrophic multiscale collapse.

The purpose of this investigation is to derive analytically the dynamical response of a galactic halo, induced by its (relatively weak) interaction with its near environment. Interaction should be understood in a general sense and involve tidal potential interactions (like that corresponding to a satellite orbiting around the galaxy), or an infall where an external quantity (virialized or not) is advected into the galactic halo.

With a suitable formalism, we derive the propagation of an external perturbation from the near galactic environment down to the scale of the galactic disk through the dark matter halo. We essentially solve the coupled collisionless Boltzmann-Poisson equations as a Dirichlet initial value problem to determine the response of the halo to infall and tidal field. The basis over which the response is projected can be customized to, say, the universal profile of dark matter halos, which makes it possible to consistently and efficiently solve the coupled dynamical and field equations, so long as the entering fluxes of dark matter amounts to a small perturbation in mass compared to the underlying equilibrium.

In a pair of companion papers, Aubert & Pichon (2005a,b) described the statistical properties of the infalling distribution of dark matter at the virial radius, R_{200} as a function of cosmic time between redshift $z = 1$ and today. These papers focused on a description of the one- and two-point

statistics of the infall towards well formed L_* dark matter halos. All measurements were carried for 15 000 haloes undergoing minor mergers. The two-point correlations were measured both angularly and temporally for the flux densities, and over the whole 5D phase space for the expansion coefficients of the source.

We show in this paper that the formalism described below, together with the measurements presented there, will allow astronomers to address globally and coherently dynamical issues on galactic scales. Most importantly it will allow them to tackle problems in a *statistically representative* manner. This investigation has a broad field of possible applications. Galaxies are subject to boundary conditions that reflect motions on larger scales and their dynamics may constrain the cosmology through the rate of merging events for example, or the mass distribution of satellites. Halo transmission and amplification also fosters communication between spatially separated regions, (see e.g. Murali (1999)) and continuously excites the disk structure. For example, spirals can be induced by encounters with satellites and/or by mass injection (e.g. Toomre & Toomre (1972), Howard & Byrd (1990)), while warps results from torque interactions with the surrounding matter (López-Corredoira et al. (2002), Jiang & Binney (1999)). Therefore the proportion of spirals and warps contains information on the structure's formation and environment. The statistical link between the inner properties of galactic halos, and their cosmic boundary can be reversed to attempt and constrain the nature of the infall while investigating the one and two point statistics of the induced perturbations. This is best done by transposing down to galactic scales the classical cosmic probes for the large-scale structures (lensing, SZ, etc...) which have been used successfully to characterize the power-spectrum of fluctuations on larger scales.

The outline of this paper is the following: we describe in Section 2 the linear response of a spherical halo which undergoes cosmological infall of dark matter, and compute the induced correlations in the inner halo; Section 3 presents the second-order perturbative response of the galactic halo to the infalling flux; (Appendix D gives the higher order corrections to the dynamics and addresses the issue of dynamical friction). Section 4 derives the Fokker-Planck equation that the cosmic mean halo profile obeys in such an open environment. Section 5 describes briefly possible astrophysical applications. In particular, it is discussed how the statistical analysis of mean and variance properties of galactic haloes and galaxies can be compared to the quantitative prediction of the concordant Λ CDM cosmogony on those scales. We also show how to revert in time observed tidal features within our Galaxy, or in external galaxies. The last section draws conclusions and discusses prospects for future work.

2 THE SPHERICAL HALO: LINEAR RESPONSE

In the following section, we extend to *open* spherical stellar systems the formalism developed by Kalnajs (1976) (for stellar disks), Aoki et al. (1979) (for gaseous disks), Tremaine & Weinberg (1984) and e.g. Murali (1999), Vauterin & Dejonghe (1996), Bertin et al. (1994) by adding a source term to the collisionless Boltzmann equation. Since the formalism is otherwise fairly standard, we will present it relatively swiftly. In a

¹ it has been argued that shadowing (Earn & Tremaine (1991)) will in practice allow for another orbit to correct for the drift, but this is of no help to resonant processes because it requires that the same orbit does not diffuse for a few libration periods.

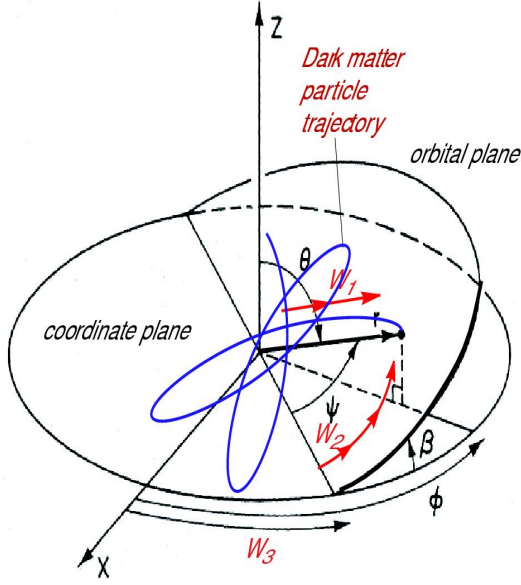


Figure 1. The action angle, (\mathbf{I}, \mathbf{w}) , - spherical coordinate, (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , transformation. The dark matter particle at running spherical coordinate (r, θ, ϕ) describes a rosette in the orbital plane orthogonal to its momentum, \mathbf{L} . The line of node of the orbital plane intersects the $x - y$ plane at a constant (in spherical symmetry) angle w_3 with respect to the x axis. The orbital plane is at an angle $\beta = \arccos(L_z/L)$ to the $x - y$ plane. The particle polar coordinate in the orbital plane w.r.t. this line of node is ψ . The angle coordinates, w_2 , is measured along ψ but varies linearly with time by construction. Finally the radial angle w_1 varies with radius between peri-apse and apo-apse. (Strongly inspired from Fig 1 of Tremaine & Weinberg (1984)).

nutshell, the dynamical equations are solved linearly, order by order, while projecting over a biorthogonal basis to consistently satisfy the field equation (e.g. Kalnajs (1971) Kalnajs (1976) Kalnajs (1977)). The dynamical equation of an open system characterized by its distribution function, F , together with the field equation, read formally:

$$\partial_t F + \{H + \psi^e, F\} = s^e, \quad \text{and} \quad \nabla^2 \Psi = 4\pi G \int d\mathbf{v} F, \quad (1)$$

where H is the Hamiltonian of the system, $\{ \}$ is the usual Poisson bracket and (Ψ, ψ^e, s^e) stands for the potential, the perturbing exterior potential and incoming source term. The source term, $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ accounts for the entering dark matter at the virial sphere and is discussed in detail below (Section 2.3, see also Aubert et al. (2004) and Aubert & Pichon (2005a)). In a somewhat unconventional manner, $\psi^e(\mathbf{r}, t)$ refers here to the external potential, i.e. the tidal potential created by the perturbations outside the boundary. Let us expand the Hamiltonian and the distribution function, F , as:

$$F = F + \varepsilon f, \quad \text{and} \quad H = H_0 + \varepsilon \psi, \quad (2)$$

where we assume that everywhere in phase space $\varepsilon \triangleq m/M \ll 1$ i.e. that the mass of the perturbation, m , is small compared to the mass, M , of the unperturbed halo. In Eq. (2), f represents the small response to the perturbations, F represents the equilibrium state and ψ the small response in potential. Putting Eq. (2) into Eq. (1) and reordering in ε yields the linearized Boltzmann equation.

2.1 The Boltzmann equation in action-angle

The most adequate representation of multiply-periodic integrable systems relies on the action-angle variables², since resonant processes will dominate the response of the live halo, and are best expressed in those variables. We will use vector notation for simplicity. The details of the computation of these variables is discussed in Appendix B following work by Murali (1999) (see also Fig. (1)). This achieves separation of variable between the phase space canonical variables (angle and actions) on the one hand, and time on the other hand. We denote as usual the set of action variables by \mathbf{I} and angle variables by \mathbf{w} (see Appendix B). The rates of change of angles is $\omega \triangleq d\mathbf{w}/dt$. Along the multi-periodic orbits, any field, Z , can be Fourier-expanded with respect to the angles as:

$$Z(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{k}} Z_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}). \quad (3)$$

Conversely

$$Z_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) Z(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (4)$$

where $\mathbf{k} \triangleq (k_r, k_\theta, k_\phi)$ is the Fourier triple index corresponding to the three possible directions of motion. Given Eqs. (2)-(1), the linearized Boltzmann equation in such a representation is:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t)}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \omega f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} (\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t)) + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t). \quad (5)$$

Here ψ is the potential perturbation created by halo masses and ψ^e the potential perturbation created by external fly byes. The gravitational field of incoming particles is accounted for by the source term s^e . The solution to Eq. (5) may then be written as:

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = \int_{-\infty}^t \exp(i\mathbf{k} \cdot \omega(\tau - t)) \times \left[i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \right] d\tau. \quad (6)$$

Eq. (6) assumes that the perturbation has been switched on a long time ago in the past so that all transients have damped out.³

2.2 Self-consistency

Eq. (6) can be integrated over velocities and summed over \mathbf{k} to get the density perturbation:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{v} \exp(i\mathbf{k} \cdot \omega(\tau - t) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \times \left[i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \right]. \quad (7)$$

Let us expand the potential and the density over a bi-orthogonal complete set of basis functions such that:

² Note that (\mathbf{w}, \mathbf{I}) are canonical variables, and as such preclude nothing about the evolution of the system. They simplify the expression of the linearized equations, order by order.

³ Mathematically, we only retain the particular solution to Eq. (5), while assuming that the homogenous solution did not hit long-lived resonances.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}), \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t) \rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$\nabla^2 \psi^{[\mathbf{n}]} = 4\pi G \rho^{[\mathbf{n}]}, \quad \int \psi^{[\mathbf{n}]*}(\mathbf{r}) \rho^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{p}}^{\mathbf{n}}, \quad (9)$$

(where $\psi^{[\mathbf{n}]*}(\mathbf{r})$ is the complex conjugate of $\psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r})$) We naturally expand the external potential on the same basis (Kalnajs (1971)) as:

$$\psi^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Thus, the coefficients $a_{\mathbf{n}}$ are representative of the density and potential perturbations in the halo itself, at $r < R_{200}$, while the coefficients $b_{\mathbf{n}}$ represent the potential created in the halo by density fluctuations at $r > R_{200}$. Taking advantage of bi-orthogonality Eq. (7) is multiplied by $\psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r})$ and integrated over \mathbf{r} , which yields:

$$a_{\mathbf{p}}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^t d\tau \iint d\mathbf{v} d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \psi^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{r}) \times \left[\sum_{\mathbf{n}} i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} [a_{\mathbf{n}}(\tau) + b_{\mathbf{n}}(\tau)] \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \right]. \quad (11)$$

We may now swap from position-velocity to action-angle variables. Since this transformation is canonical $d\mathbf{v}d\mathbf{r} = d\mathbf{w}d\mathbf{I}$. In Eq. (11) only $\psi^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{r})$ depends on \mathbf{w} , so we may carry the \mathbf{w} integration over $\psi^{[\mathbf{p}]*}$, which yields $\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I})$. Eq. (11) then becomes :

$$a_{\mathbf{p}}(t) = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t)) \times \left[\sum_{\mathbf{n}} i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} [a_{\mathbf{n}}(\tau) + b_{\mathbf{n}}(\tau)] \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \right]. \quad (12)$$

At this point, it seems natural to expand the source term on a basis too, but unlike the previous one, this basis should also describe velocity space. We admit for now that such a basis $\phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ exists, and write:

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(t) \phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \text{so} \quad (13)$$

$$s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(\tau) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}), \quad (14)$$

where $\sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I})$ is the angle transform of $\phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (see Eq. (23) below). The coefficients $c_{\mathbf{n}}$ are representative of the mass exchange between the halo and the external world. The sum in Eq. (14) spans velocity space as well as configuration space, and therefore involve significantly more terms. Such an expansion is performed in Aubert & Pichon (2005a) to constrain the source function measured in cosmological simulations. Calling $\mathbf{a}(\tau) = [a_1(\tau), \dots, a_{\mathbf{n}}(\tau) \dots]$, $\mathbf{b}(\tau) = [b_1(\tau), \dots, b_{\mathbf{n}}(\tau) \dots]$, and $\mathbf{c}(\tau) = [c_1(\tau), \dots, c_{\mathbf{n}}(\tau) \dots]$ We define two matrices, \mathbf{K} and \mathbf{Q} . The matrix \mathbf{K} has elements $K_{\mathbf{p},\mathbf{n}}$ defined by:

$$K_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(\tau) = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}), \quad (15)$$

which depend only on the halo equilibrium state. The matrix \mathbf{Q} has elements

$$Q_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(\tau) = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}), \quad (16)$$

which depend only on source terms. Equation (12) then becomes:

$$\mathbf{a}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau (\mathbf{K}(\tau - t) \cdot [\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)] + \mathbf{Q}(\tau - t) \cdot \mathbf{c}(\tau)). \quad (17)$$

The kernels \mathbf{K} and \mathbf{Q} are functions of the equilibrium state distribution function, F , and of the two bases, $\phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, and $\psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r})$ only. They may be computed once and for all for a given equilibrium model. Assuming linearity and knowing \mathbf{K} and \mathbf{Q} , one can see that the properties of the environments (represented by \mathbf{b} and \mathbf{c}) are *propagated* to the inner dynamical properties of collisionless systems (described by \mathbf{a}). We may perform a “half” Fourier transform with respect to time. In the limit where the transients may be neglected, which implies that the system should be stable, this transform amounts to a Laplace transform with $p = i\omega + \epsilon^+$. Temporal convolutions are then replaced by matrix multiplications and Eq. (17) becomes:

$$\hat{\mathbf{a}}(\omega) = (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}}(\omega))^{-1} \cdot [\hat{\mathbf{K}}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{b}}(\omega) + \hat{\mathbf{Q}}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{c}}(\omega)]. \quad (18)$$

In this expression, $\mathbf{1}$ is the identity matrix, and $\hat{\mathbf{K}}$ and $\hat{\mathbf{Q}}$ include Heaviside functions before Fourier transform to account for causality (see Aubert et al. (2004) for details). Section D3 gives an explicit expression for $\hat{\mathbf{K}}(\omega)$. Note the difference between ω , the angular frequency of the orbits, defined above Eq. (5), and ω , the half Fourier transform variable associated with time which appears in Eq. (18). Here \mathbf{b} and \mathbf{c} could be given deterministic functions of time, or stochastic random fields (characterized statistically in Aubert & Pichon (2005a)). In contrast, \mathbf{a} describes the detailed response of the halo in phase space within R_{200} .

2.2.1 Higher moments

The second moment is obtained by multiplying (6) by \mathbf{v} and by performing an integration over velocities. Summing over \mathbf{k} leads to:

$$\rho \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{v} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \times \left[i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} \mathbf{v} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] + \mathbf{v} s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \right]. \quad (19)$$

Using the same biorthonormal expansion as above, we may express the mass flux as a function of the coefficients $a_{\mathbf{n}}$ and $b_{\mathbf{n}}$ (associated with the potential perturbations of external origin). If we define the following new tensors:

$$K_{[2],\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{v} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}), \quad (20)$$

and a similar expression for $Q_{[2],\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \tau)$, involving the source term, the mass flux may be written as a convolution:

$$\rho \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau (\mathbf{K}_2(\mathbf{r}, \tau - t) \cdot [\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)] + \mathbf{Q}_2(\mathbf{r}, \tau - t) \cdot \mathbf{c}(\tau)).$$

After half Fourier transforming with respect to time, we get

$$\rho \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{K}}_{[2]}(\mathbf{r}, \omega) \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}})^{-1} \cdot [\hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{c}}] + \hat{\mathbf{Q}}_{[2]}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{c}}. \quad (21)$$

We will return to Eq. (21) in Section 5.

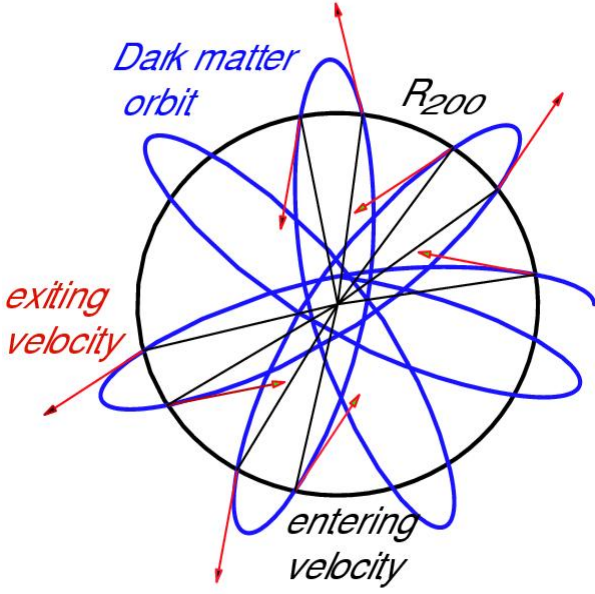


Figure 2. A typical rosette orbit in its orbital plane; the intersection with the R_{200} sphere is shown, together with the corresponding velocity vectors, both entering and exiting. The net flux of such quantities enters Eq. (24) and characterize the source of infall perturbing the halo. Note that by construction, in the linear regime all infalling material re-exits R_{200} , since the perturbation evolves along the unperturbed orbits. This is to be contrasted to the situation presented in Fig. (5) where dynamical friction is qualitatively accounted for.

2.3 Sinks, sources and tidal field

Let us now turn to an explicit description of the source term (s^e , hence \mathbf{c}), and the tidal field (ψ^e , hence \mathbf{b}) entering Eq. (5). We consider here a source at the virial radius corresponding to cosmic infall. Note however that we might have considered just as well sinks reflecting the presence of a super massive black hole at the center of the host galaxy or the deflection/absorption of orbits due to a galactic disk.

2.3.1 Source of infall at R_{200}

A possible Ansatz for the source term consistent with the first two velocity moments of the entering matter has been proposed by Aubert et al. (2004). Following them $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ can be written as

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \triangleq \sum_{\mathbf{m}} Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \delta_D(r - R_{200}) \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) b_{\alpha}(\mathbf{v}) Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \right),$$

where \mathbf{m} stands for the two harmonic numbers, (ℓ, m) and $Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \triangleq Y_{\ell}^m(\boldsymbol{\Omega})$ is the usual spherical harmonic. The Dirac function $\delta_D(r - R_{200})$ appears because the source terms are located in our representation at the virial radius. This equation corresponds to the parametrization of $\phi^{[n]}$ as:

$$\begin{aligned} \phi^{[n]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= g_{\alpha}(\mathbf{v}) Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \delta_D(r - R_{200}), \\ &\triangleq g_{\alpha}(v) Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) Y_{\mathbf{m}'}(\boldsymbol{\Gamma}) \delta_D(r - R_{200}), \end{aligned} \quad (22)$$

of Gaussian functions covering the radial velocity component and spherical harmonics for the angle distribution, $\boldsymbol{\Gamma}$, of the velocity vector and orientation, $\boldsymbol{\Omega} = (\theta, \phi)$ of the infall (see Aubert & Pichon (2005a) for details). Here we have

$n \triangleq [m, \alpha] \triangleq [m, m', \alpha] \triangleq [\ell, m, \ell', m', \alpha]$. From Eq. (14)

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{[n]e}(\mathbf{I}) \triangleq \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \phi^{[n]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (23)$$

With Eq.(22), Eq. (23) becomes

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{[n]e}(\mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) Y_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}, \mathbf{w})] \times g_{\alpha}(\mathbf{v}[\mathbf{I}, \mathbf{w}]) \delta_D(r(\mathbf{I}, \mathbf{w}) - R_{200}). \quad (24)$$

We can make use of the δ_D function occurring in Eq. (24) since $w_r \triangleq \tilde{w}_r(r, \mathbf{I})$ (given by Eq. (B1)). Therefore Eq. (24) reads:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{k}}^{[n]e}(\mathbf{I}) &= \int \frac{d^2\mathbf{w}}{(2\pi)^3} \int d\tilde{w}_r \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) Y_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}, \mathbf{w})] \times \\ &\quad g_{\alpha}(\mathbf{v}[\mathbf{I}, \mathbf{w}]) \frac{1}{|\partial \tilde{w}_r / \partial r|^{-1}} \delta_D(w_r - \tilde{w}_r[R_{200}, \mathbf{I}]), \quad (25) \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{w}}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) Y_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}, \mathbf{w}, \tilde{w}_r[R_{200}, \mathbf{I}])] \times \\ &\quad g_{\alpha}(\mathbf{v}[\mathbf{I}, \mathbf{w}, \tilde{w}_r(R_{200}, \mathbf{I})]) \frac{\omega_r(\mathbf{I})}{|\dot{r}(R_{200}, \mathbf{I})|} \exp(-i\mathbf{k}_r \cdot \tilde{w}_r[R_{200}, \mathbf{I}]). \end{aligned}$$

In Eq. (25) we sum over all intersections of the orbit \mathbf{I} with the R_{200} sphere, at the radial phase corresponding to that intersection with a weight corresponding to $\omega_r/|\dot{r}|$ (see Fig. (2)). Note that Eq. (25) involves $d^2\mathbf{w} \triangleq d\tilde{w}_2 d\tilde{w}_3$.

2.3.2 Tidal excitation from beyond R_{200}

The tidal potential is given as a boundary condition on the virial sphere and deprojected in volume. Let us call $b'_{\ell m}(t)$ the harmonic coefficients of the expansion of the external potential on the virial sphere. We expand the potential over the biorthogonal basis, $(u_n^{\ell m}, d_n^{\ell m})$ (see Appendix B), so that

$$\begin{aligned} \psi^e(r, \boldsymbol{\Omega}, t) &= \sum_{n, \ell, m} b'_{\ell m}(t) Y_{\ell}^m(\boldsymbol{\Omega}) \left(\frac{r}{R_{200}} \right)^{\ell}, \\ &= \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[n]}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (26)$$

where $\psi^{[n]}(\mathbf{r}) \triangleq Y_{\ell}^m(\boldsymbol{\Omega}) u_n^{\ell m}(r)$. The first equality in Eq. (26) corresponds to the inner solution of the three-dimensional potential whose boundary condition is given by $Y_{\ell}^m(\boldsymbol{\Omega}) b'_{\ell m}$ on the sphere of radius R_{200} (defined below). Since the basis is biorthogonal, it follows that

$$b_{\mathbf{n}}(t) = \left(\int d\ell_n^m(r) \left(\frac{r}{R_{200}} \right)^{\ell} dr \right) b'_{\ell m}(t). \quad (27)$$

It is therefore straightforward to recover the coefficient of the 3D external potential from that of the potential on the sphere.

2.4 Induced correlations in the halo

Our purpose is to characterize *statistically* the response of the dark matter halo to tidal perturbation and infall. This is best done by computing the N-point statistics of the perturbed density field. Let us start with the two-point correlation. From Eq.(18) the variance-covariance matrix of the response is given by

$$\langle \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{*\top} \rangle = \langle [\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{c}}] \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}})^{-1}.$$

$$(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}})^{-1* \top} \cdot [\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{c}}]^\top{}^* \rangle. \quad (28)$$

This expression of the $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ matrix, $\langle \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{*\top} \rangle$ involves autocorrelation terms like the components of $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^{*\top} \rangle$ (the tidal field) and $\langle \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$ (the source of infall), but also cross-correlation terms such as the components of $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$. For a spherical harmonic basis, the induced density perturbation reads (see Eq. (B2) in Appendix B)

$$\rho(r, \Omega, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \rho_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \sum_{n\ell m} a_{\ell m}^n(t) Y_{\ell}^m(\Omega) d_{\ell m}^n(r), \quad (29)$$

The functions $d_{\ell m}^n(r)$ depend on the chosen basis. An example is given by Eq. (B3). Again, \mathbf{n} stands here for n, ℓ, m , respectively the radial, alt-azimuthal and azimuthal “quantum” harmonic numbers. As a consequence the two-point correlation function for the perturbed density reads

$$\langle \rho(r, \Omega + \Delta\Omega, t + \Delta t) \rho(r', \Omega', t) \rangle = \sum_{n\ell m n' \ell' m'} Y_{\ell}^m(\Omega) \times Y_{\ell'}^{m'*}(\Omega + \Delta\Omega) d_{\ell m}^n(r) d_{\ell' m'}^{n'}(r') \langle a_{\ell m}^n(t) a_{\ell' m'}^{n'*}(t + \Delta t) \rangle, \quad (30)$$

The statistical averages, $\langle a_{\ell m}^n(t) a_{\ell' m'}^{n'*}(t + \Delta t) \rangle$ are given by the temporal inverse Fourier transform of Eq. (28). If the perturbation is stationary and statistically rotationally invariant $\langle a_{\ell m}^n(t) a_{\ell' m'}^{n'*}(t + \Delta t) \rangle \triangleq C_{\ell}^{nn'}(\Delta t) \delta_m^m \delta_{\ell}^{\ell'}$. The correlation function then obeys

$$\langle \rho(r, \Omega + \Delta\Omega, t + \Delta t) \rho(r', \Omega', t) \rangle = \sum_{nn' \ell m} P_{\ell}(\cos(\gamma)) d_{\ell m}^n(r) d_{\ell m}^{n'}(r') C_{\ell}^{nn'}(\Delta t), \quad (31)$$

where γ stands for the angle between Ω and Ω' . Evaluating Eq. (31) for $\gamma = 0$, $\Delta t = 0$, $r = r'$ gives a measure of the cosmic variance of the amplitude of the response of the halo as a function of radius r . The full-width half maximum (FWHM) of $\langle \rho(r, \Omega + \Delta\Omega, t) \rho(r, \Omega, t) \rangle$ is a measure as a function of time, t , and radius, r , of the angular extent of the ensemble average mean polarization. Conversely, the FWHM of $\langle \rho(r, \Omega, t) \rho(r + \Delta r, \Omega, t) \rangle$ is a measure of its radial extent in the direction Ω . Note that Eq. (6) together with (17) yield a description of the response both in position and velocity. For instance, Eq. (21) allow us to predict the induced correlations amongst streams. Applications of Eqs. (28)-(31) (and their non-linear generalization in Section 3.2) will be discussed in greater details in Section 5.

2.4.1 Link with propagators

Let us emphasize that the splitting of the gravitational field into two components, one originating outside of R_{200} , and one from the inside, via point particles obeying the distribution $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ is somewhat *ad hoc* from the point of view of the linear dynamics. It is convenient from the point of view of the measurements, and crucial for the non-linear evolution (described below), or the ensemble average, as shown above.⁴ It allows us to specify the statistical characteristics of the infall without having to refer to the properties of the object on which this infall occurs.

⁴ One should account for the fact that ψ_e should be switched on long before any particles enter R_{200} since no particle is created at the boundary.

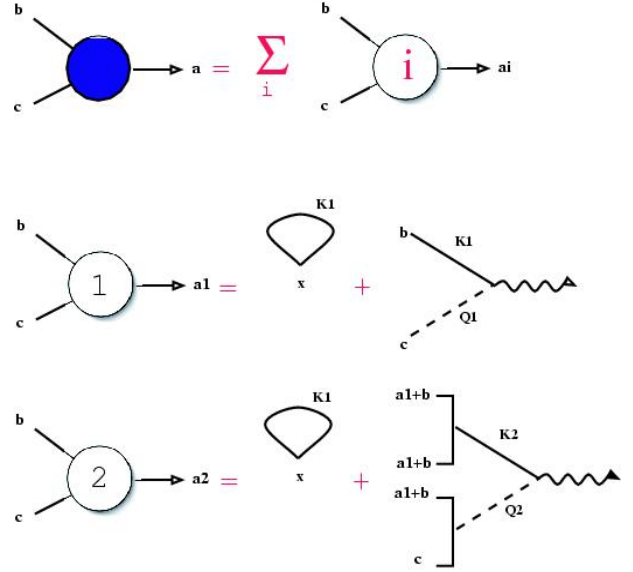


Figure 3. diagrammatic representation of the expansion to second-order given in Eqs. (42)-(43). The top diagram states that one should sum over all orders in the coupling in order to model the non-linear response of the halo; The second diagram from the top stands for Eq. (42) and the third for Eq. (43). The loops correspond to the self-coupling *i.e.* the self-gravity response of the halo to the perturbing flow. The second diagram corresponds to the “propagation” of the double excitation (see also Appendix A for a discussion of the distribution function propagator in angle-action variables): the input are the external potential, ψ^e (through its $b_{\mathbf{n}}$ coefficients) and the source, s^e (expanded over the $c_{\mathbf{n}}$ coefficients); the output is the coefficient of the expansion of the inner potential. The coupling is achieved via the operator K_i and Q_i defined by Eqs. (41)-(3.1.2) and (D4), while the contraction is achieved by Eq. (44), (45) and is represented by the wiggly horizontal line.

We discuss in appendix A the formulation of the response of a self-gravitating sphere in terms of a propagator (*i.e.* the Green function of the collisionless Boltzmann-Poisson equation). This formulation is mathematically equivalent to the approach described above, but there we relied on Gauss’s theorem to reproject all the information beyond R_{200} back onto the virial sphere. This information involves two contributions: one relative to particles beyond R_{200} , which contribute to the tidal field, the other relative to particles entering R_{200} which contribute to $s^e(\Omega, \mathbf{v})$. The main asset of this formulation is to localize the boundary, which is possible since the interaction is purely gravitational, at the expense of having *two* sources of different nature. In particular, this implies that the environment may be characterized once and for all, independently of the detailed nature of the inner halo.

In this section, we assumed that the polarisation of the halo was *linear*. This hopefully provided some insight for some aspects of the dynamics, but effectively ignores non-linear phenomena such as dynamical friction or tidal stripping. Let us now expand perturbation theory to higher orders.

3 NON-LINEAR PERTURBATIVE RESPONSE

In the following, we describe, using perturbation theory, the non linear response of the halo to material entering at the virial sphere. It is assumed that the perturbation is first-order in the hierarchy, and that the halo is dynamically stable. This should warrant the validity of the expansion. We use the angle-action variables of the *unperturbed* system as canonical variables and investigate the non-linear evolution of the infall and the tidal excitation.

In essence, the key is to expand the potential onto the biorthogonal potential density basis which allows us to decouple position-velocity and time (ie separation of variable), and solve in turns each order of the perturbation expansion.

3.1 Perturbative expansion

Recall that the dynamical equation of an open system characterized by its distribution function, F is given by Eq. (1). Let us expand again F as

$$F = F + \sum_n \varepsilon^n f^{(n)}, \quad \text{and} \quad H = H_0 + \sum_n \varepsilon^n \psi^{(n)}, \quad (32)$$

where the unperturbed equilibrium is characterized by the distribution function, $F(\mathbf{I})$. Note that (n) , the order of the expansion should not be confused with $\mathbf{n} \triangleq (n, \ell, m)$. Finally, it is assumed that the external perturbation enters as a first-order only, *i.e.* $s^e \propto \varepsilon$ and $\psi^e \propto \varepsilon$. In short, the rewriting of Eq. (1) to order ε^n yields:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(n)}}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} f_{\mathbf{k}}^{(n)} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k} [\psi_{\mathbf{k}}^{(n)} + \delta_n^1 \psi_{\mathbf{k}}^e] - \sum_{k=1}^{n-1} \{\psi^{(k)}, f^{(n-k)}\}_{\mathbf{k}} + \delta_n^1 s_{\mathbf{k}}^e \right). \quad (33)$$

In the following, we solve Eq. (33) recursively, order by order, to recover the perturbative response of the halo to the tidal interaction and infall. We expand both the potentials and the source term over a biorthogonal basis, so that, with (n) referring to the order in the hierarchy and $[p]$ to the label in the basis

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(n)}(\mathbf{I}, t) = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) \psi_{\mathbf{k}}^{[p]}(\mathbf{I}), \quad \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t) = \sum_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}(t) \psi_{\mathbf{k}}^{[p]}(\mathbf{I}), \quad s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t) = \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}(t) \sigma_{\mathbf{k}}^{[p]}(\mathbf{I}). \quad (34)$$

Recall also that the exponent, $[p]$, in Eq. (34) spans discretely a 3D or 5D space depending on the type of function basis. The first-order solution for $a_{\mathbf{p}}$ was given Eq. (12). Let us turn to the higher order equations.

3.1.1 Second-order perturbation theory

The second-order equation for $a_{\mathbf{p}}^{(2)}$ reads

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^{(2)}(t) = & (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{n}} \int_{-\infty}^t d\tau a_{\mathbf{n}}^{(2)}(\tau) \left(\sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \psi_{\mathbf{k}}^{[n]}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*}(\mathbf{I}) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau - t]) \right) + \\ & (2\pi)^3 \int_{-\infty}^t d\tau \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau - t]) \left\{ f^{(1)}(\tau, \mathbf{w}, \mathbf{I}), \psi^{(1)}(\tau, \mathbf{w}, \mathbf{I}) \right\}_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*}(\mathbf{I}), \end{aligned} \quad (35)$$

where $\{f^{(1)}, \psi^{(1)}\}$ is the Poisson bracket of the perturbation to first-order. Now for a set (f, ψ) we have

$$\{f, \psi\}_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \left\{ \sum_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{I}) \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{w}), \sum_{\mathbf{k}_2} \psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{I}) \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{w}) \right\}. \quad (36)$$

Therefore

$$\{f, \psi\}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \left(\psi_{\mathbf{k}_2} \frac{\partial f_{\mathbf{k}_1}}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k}_2 - f_{\mathbf{k}_1} \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}_2}}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k}_1 \right) \triangleq \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \llbracket f_{\mathbf{k}_1}, \psi_{\mathbf{k}_2} \rrbracket, \quad (37)$$

where the sum is over \mathbf{k}_1 with $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$. Given Eq. (6), Eq. (35) may be rearranged as

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^{(2)}(t) = & (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{q}_1} \int_{-\infty}^t d\tau_1 a_{\mathbf{q}_1}^{(2)}(\tau_1) \left(\sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \psi_{\mathbf{k}}^{[q_1]}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*}(\mathbf{I}) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \right) + \\ & (2\pi)^3 \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \left(\sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} [a_{\mathbf{q}_1}^{(1)}(\tau_1) + b_{\mathbf{q}_1}(\tau_1)] \times \right. \\ & \left. \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \left[\exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_2 - \tau_1]) \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k}_1 [a_{\mathbf{q}_2}^{(1)}(\tau_2) + b_{\mathbf{q}_2}(\tau_2)] \psi_{\mathbf{k}_1}^{[q_2]}(\mathbf{I}) + c_{\mathbf{q}_2}[\tau_2] \sigma_{\mathbf{k}_1}^{e, [q_2]}(\mathbf{I}) \right], \psi_{\mathbf{k}_2}^{[q_1]} \right] \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Note that the r.h.s. of Eq.(38) is linear in $\mathbf{a}^{(2)}$ while it is quadratic in $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{c}^{(1)}$, involving products such as $\mathbf{a} \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \mathbf{c}$ and so on. More generally, the perturbation theory at order (n) is linear in $\mathbf{a}^{(n)}$. Note also that Eq. (38) involves a double ordered time

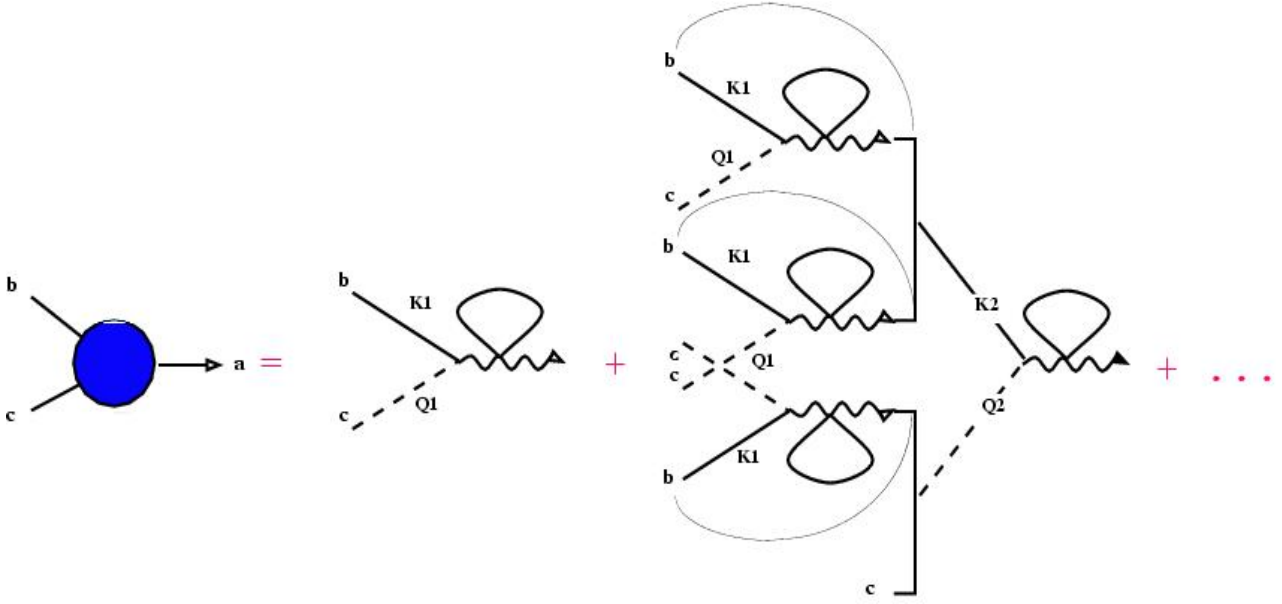


Figure 4. reordered diagrammatic representation to second-order (first-order included) of the expansion given in Eqs. (42)-(43). This time only b_n and c_n are inputs. The closed loop accounts for the self-gravity and represents $(1 - \hat{\mathbf{K}}_1)^{-1}$. The thin loop traces the fact that the perturbed potential contributes also directly to the second-order term via $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}$ (see Eq. (43) for details). Note that in each diagram, each oblique line represents a sum over \mathbf{k} and a time integral. The dashed line stands for infall coupling, while the thick line stands for the tidal coupling.

integral over τ_1 and τ_2 of the source coefficient, $c_{q_1}(\tau_1)$ and $c_{q_2}(\tau_2)$, which accounts for the fact that, non-linearly, the relative phase of the accretion events matter (Eq. (D12) gives the analogue to Eq. (38) in the complex frequency plane). Eq (38) includes in particular a term like

$$\exp(i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_2 - \tau_1]) \psi_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}^{[p]*} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \left(\frac{\partial \sigma_{\mathbf{k}_1}^{e, [\mathbf{q}_2]}}{\partial \mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}_2}^{[\mathbf{q}_1]} - \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}_2}^{[\mathbf{q}_1]}}{\partial \mathbf{I}} \sigma_{\mathbf{k}_1}^{e, [\mathbf{q}_2]} \right) \left(a_{q_1}^{(1)}(\tau_1) + b_{q_1}(\tau_1) \right) c_{q_2}(\tau_2) \quad (39)$$

which involves the rate of change of the source term with respect to action variation (via $\partial \sigma_{\mathbf{k}_1}^{e, [\mathbf{q}_2]} / \partial \mathbf{I}$) modulated twice over time as $\exp(i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_2 - \tau_1])$. In Appendix D4 we attempt to demonstrate by perturbatively expanding the linear solution with respect to the (higher order) perturbed actions and angles, that the second-order expansion has dynamical friction built in. A more rigorous demonstration is in order.

3.1.2 Synthetic hierarchy

The second order solution can be synthetically written by introducing tensors \mathbf{K}_2 and \mathbf{Q}_2 similar to those defined in Eq. (15) and Eq. (16) to express the first order solution as Eq. (17). These latter tensors will now be referred to as \mathbf{K}_1 and \mathbf{Q}_1 . Specifically, the components of these tensors are defined as:

$$(\mathbf{K}_1)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1}[\tau_1 - t] \triangleq (\mathbf{K})_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1}[\tau_1 - t] = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{q}_1]} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k}, \quad (40)$$

$$(\mathbf{K}_2)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}[\tau_1 - t, \tau_2 - \tau_1] = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \left[\exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_2 - \tau_1]) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k}_1 \psi_{\mathbf{k}_1}^{[\mathbf{q}_2]}, \psi_{\mathbf{k}_2}^{[\mathbf{q}_1]} \right] \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*}, \quad (41)$$

while \mathbf{Q}_i involves replacing $\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{q}_i]} \partial F / \partial \mathbf{I} \cdot \mathbf{k}$ by $\sigma_{\mathbf{m}}^{e, [\mathbf{q}_i]}$. For instance,

$$(\mathbf{Q}_2)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}[\tau_1 - t, \tau_2 - \tau_1] = (2\pi)^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \left[\exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_2 - \tau_1]) \sigma_{\mathbf{k}_1}^{e, [\mathbf{q}_2]}, \psi_{\mathbf{k}_2}^{[\mathbf{q}_1]} \right] \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*},$$

This implies in particular that $\mathbf{Q}_1 \triangleq \mathbf{Q}$ given by Eq. (16). Note that each component of \mathbf{K}_2 has the same complexity as \mathbf{K}_1 , i.e. the perturbation theory is linear order by order; on the other hand it involves *all* the couplings in configuration space, hence the double sum in \mathbf{k} . With these definitions, Eqs. (12) and (38) read formally

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{K}_1 \cdot [\mathbf{a}_1^{(1)} + \mathbf{b}] + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{c}, \quad (42)$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{a}^{(2)} + \mathbf{K}_2 \cdot [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] + \mathbf{Q}_2 \cdot [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{c}. \quad (43)$$

where the dot operator is not merely a tensor contraction, but also involves a time convolution. For example, \mathbf{Z} being a given field:

$$(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{Z})_{\mathbf{p}}(t) \triangleq \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^t d\tau (K_1)_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\tau - t) Y_{\mathbf{q}}(\tau), \quad (44)$$

and similarly the higher order contraction rule over the fields $\mathbf{Z}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Z}^n$ is defined as:

$$(\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{Z}^1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Z}^n)_{\mathbf{p}}(t) \triangleq \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{\tau_{n-1}} d\tau_n (K_n)_{\mathbf{p},\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n}(\tau_1 - t, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}) Y_{\mathbf{q}_1}^1(\tau_1) \dots Y_{\mathbf{q}_n}^n(\tau_n). \quad (45)$$

Note that the order of the argument does matter. (*i.e.* Eq. (45) defines a non-commutative algebra). Note also that the sum of the order in each term corresponds to the order of the perturbation. For instance, in Eq. (43), the second term involves the product of two first-order terms, while the first term is a single second-order term. Note finally that the contraction for the \mathbf{Q}_n involve a summation over 5 indices, $\ell, m, \alpha, \ell', m'$, (whereas contraction over \mathbf{K}_n involves only 3 indices: n, ℓ, m). We illustrate and discuss in Fig. (3) through synthetic diagrams the corresponding expansion. (See also Fig. (D1) in Appendix D for an expansion to higher order). In appendix D, we show in Eqs. (D3)-(D4) how to rewrite Eq. (43) to order n .

As for all expansion schemes, the issue of the truncation arises. Depending on the physical process investigated, the truncation order may vary. For instance, it may be legitimate to truncate the perturbation to second-order since the second-order is the first-order for which dynamical friction is taken into account.

3.2 Non-linear two-point correlation functions

Let us now re address the computation of the two-point correlation function (cf. Section 2.4) of the response of the halo to tidal excitation and infall while accounting for the non-linearities described in Section 3.1.1. First, let us reshuffle the hierarchy in a format which is best suited for the statistical average of the non-linear response.

3.2.1 Reordering in \mathbf{b} and \mathbf{c}

Let us define $\mathcal{F}(\omega, t) \triangleq \exp(i\omega t)$ the Fourier operator, so that $\mathcal{F} \cdot \mathbf{Z}$ and $\mathcal{F}^\top \cdot \mathbf{Z}$ are respectively the half-Fourier and inverse half-Fourier transform of their argument \mathbf{Z} . Calling

$$\mathbf{R}_1 \triangleq \mathcal{F}^\top \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}}_1)^{-1} \cdot \mathcal{F}, \quad (46)$$

Eq. (43) (and its generalization Eq. (D3)) reads like a recursion:

$$\mathbf{a}^{(n)} \triangleq \mathbf{R}_1 \cdot \mathcal{K}[\mathbf{a}^{(n-1)} \dots, \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \quad \text{for } n \geq 2, \quad (47)$$

where \mathcal{K} stands formally for some combination of \mathbf{K}_n and \mathbf{Q}_n . Note that \mathbf{K}_1 accounts for the self-gravity of the halo. If the halo is very hot, this self-gravity may be neglected altogether and $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{1}$. If not, we may define $\mathbf{K}'_i \triangleq \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{K}_i$, $\mathbf{Q}'_i \triangleq \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_i$, and rewrite the recursive relations Eq. (47) with $\mathbf{K}_1 \triangleq 0$. For instance:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{K}'_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{Q}'_1 \cdot \mathbf{c}, \quad (48)$$

which we can rearrange as:

$$\mathbf{a}^{(1)} \triangleq A_b \cdot \mathbf{b} + A_c \cdot \mathbf{c} \quad (49)$$

where $A_b \triangleq \mathbf{K}'_1$ and $A_c \triangleq \mathbf{Q}'_1$. Let us also introduce $\mathbf{K}''_1 = \mathbf{K}'_1 + \mathbf{1}$. Similarly, the contribution of \mathbf{b} 's and \mathbf{c} 's to the second order term for \mathbf{a} can be expressed as:

$$\mathbf{a}^{(2)} \triangleq A_{bb} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + A_{cc} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + A_{cb} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} + A_{bc} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}. \quad (50)$$

where

$$\begin{aligned} A_{bb} &= \mathbf{K}'_2 \circ \mathbf{K}''_1, & A_{cc} &= \mathbf{K}'_2 \circ \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2 \circ [\mathbf{Q}'_1, \mathbf{I}], \\ A_{cb} &= \mathbf{K}'_2 \circ [\mathbf{Q}'_1, \mathbf{K}''_1], & A_{bc} &= \mathbf{K}'_2 \circ [\mathbf{K}''_1, \mathbf{Q}'_1] + \mathbf{Q}'_2 \circ [\mathbf{K}''_1, \mathbf{I}]. \end{aligned} \quad (51)$$

Here the bracket, $[\cdot, \cdot]$ accounts for the differential composition, so that,

$$\begin{aligned} A_{cb} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} &= \mathbf{K}'_2 \cdot (\mathbf{Q}'_1 \cdot \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{K}''_1 \cdot \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{b}) \otimes ([\mathbf{1} + \mathbf{R}_1] \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

In appendix D1.2, we also show how to write an equation similar to Eq. (50) for the third order contribution and more generally for an arbitrary order (see Eq. D8).

3.2.2 Non-linear correlators

We may now complete the calculation of, say, the two-point correlation function of the density, C_2^ρ :

$$C_2^\rho \triangleq \langle \rho(x_1) \rho(x_2) \rangle = \sum_n \sum_{p=1}^n \epsilon^n \langle \rho^{(p)}(x_1) \rho^{(n-p)}(x_2) \rangle, \quad (52)$$

where $x_i = (\mathbf{r}_i, \tau_i)$, $i=1,2$. Following Eq. (34), let us also expand the response in density, ρ , over the basis function

$\{\rho^{[q]}(\mathbf{r})\}_{\mathbf{q}}$, so that

$$C_2^\rho = \sum_n \epsilon^n \sum_{p=1}^n \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \rho^{[q_1]}(\mathbf{r}_1) \rho^{[q_2]}(\mathbf{r}_2) \langle a_{\mathbf{q}_1}^{(p)}(\tau_1) a_{\mathbf{q}_2}^{(n-p)}(\tau_2) \rangle.$$

Now, given Eq. (48) and (50), we may rearrange this equation as:

$$C_2^\rho = \epsilon^2 \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \rho^{[q_1]}(\mathbf{r}_1) \rho^{[q_2]}(\mathbf{r}_2) \left[C_2^{\{2\}} + \epsilon C_2^{\{3\}} + \dots \right]. \quad (53)$$

where $C_2^{\{2\}}$ is a simple reshuffling of Eq. (28), i.e.:

$$C_2^{\{2\}} = A_b \times A_b \cdot \langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \rangle + A_c \times A_c \cdot \langle \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \rangle + A_b \times A_c \cdot \langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \rangle + A_c \times A_b \cdot \langle \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \rangle, \quad (54)$$

and:

$$\begin{aligned} C_2^{\{3\}} &= (A_{bb} \times A_b + A_b \times A_{bb}) \cdot \langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \rangle + \\ & (A_{cc} \times A_c + A_c \times A_{cc}) \cdot \langle \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \rangle + \\ & (A_{bc} \times A_c + A_b \times A_{bc}) \cdot \langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \rangle + \\ & (A_{bb} \times A_c + A_b \times A_{bb}) \cdot \langle \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \rangle + \\ & (A_{cb} \times A_b + A_c \times A_{cb}) \cdot \langle \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

The \times operator is non-commutative and guaranties that the order is preserved in the dot contraction. Recall that $A_b \triangleq \mathbf{K}'_1$ and $A_c \triangleq \mathbf{Q}'_1$, while A_{bb}, A_{cc}, A_{cb} and A_{bc} are given by Eq. (52) (or in terms of the underlying distribution function, $F_0(\mathbf{I})$, and the basis function, $\psi^{[n]}(\mathbf{r})$ via Eqs (40), (41) and (46) through the definitions of $\mathbf{K}_1, \mathbf{Q}_1, \mathbf{K}_2$ and \mathbf{Q}_2). It follows from Eq. (55) that the non-linear two-point correlation will involve at least the three-point correlation of the incoming flux. We will see in Section 5 that this is a generic consequence of mode coupling. Now the three point correlation of the incoming flux, \mathbf{c} , and the tidal field, \mathbf{b} may be reexpressed in terms of the mean and the two-point correlations of those fields while relying on Wick's theorem, since we showed in Aubert & Pichon (2005a) that these fields were approximately Gaussian. Appendix D2 presents formally the generalization of Eqs. (54)-(55) for the N-point correlation function to arbitrary order.

Equations such as Eq. (43) or its reordered version Eq. (50) might look deceptively simple. One should nevertheless keep in mind that the perturbation theory involves an exponentially growing number of terms. This is probably best realized by looking at diagrams such as Fig. (4) while keeping in mind that each straight line represents a triple sum over $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ and a time integral (see also Appendix B). The prospect of achieving resummation (in the spirit of what was achieved by e.g. Bernardeau (1992) for the gravitational instability of the large-scale structures) given the relative complexity of the double source expansion is slim. Yet it might be possible to construct scaling rules (see Fry (1984)) since gravity is also here the driving force. Let us stress once again that the perturbative expansion accounts explicitly, within its convergence radius, for all aspects of the non-linear physics taking place within the R_{200} sphere.

3.3 Implication for dynamical friction and tidal stripping

One of the possible assets of this perturbative formulation is that the incoming flux may describe a virialized object which has a finite extent, and as such will undergo internal phase

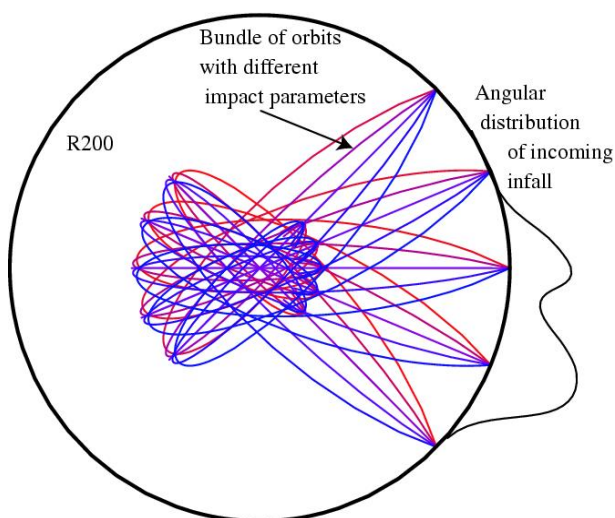


Figure 5. displays qualitatively a bundle of orbits (in their orbital plane) which undergo dynamical friction and phase mixing within the R_{200} radius. As expected, dark matter describing orbits which initially are at the same position, but with “slightly” different initial impact parameters will end up in quite different regions at later time. On the right the curve represents a possible angular distribution of a given entering object (for which the kinematic and angular spread has been greatly exaggerated). The caustics corresponding to the successive rebound of the orbits is clearly visible here (Fillmore & Goldreich (1984)). Note that the amplitude of the friction force was *ad hoc*, and the self-gravity within the bundle was *not* taken into account.

mixing reflecting the fact that different points in the object will describe different orbits, at different frequencies (see Fig. (5)). In the perturbative regime, dynamical friction will also account for both the overall drag of the object, but also its tidal stripping (*i.e.* the fact that the less bound component of the object will undergo a differential more efficient friction). Specifically, the deflection of perturbed trajectories will correctly describe the balance (or lack thereof) between the self-gravity of the entering flow and its tendency to be torn by the differential gravitational field of the halo (which imposes the unperturbed different orbital trajectories). As such, the flow paradigm implemented in this paper and in Aubert et al. (2004), Aubert & Pichon (2005a) should allow for the appropriate level of flexibility in defining what a structure is and how time-dependent the concept is, within the self-gravitating halo (see also Section 3.3.1).

Let us briefly discuss how to identify substructures within the halo.

3.3.1 Substructure counts and distribution

The identification of substructures within a given halo is a very promising but difficult topic. Once the boundary flow has been propagated inwards, we have in principle access to the full distribution function of the perturbation as a function of time. When the field $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ is known inside R_{200} , we may attempt to identify collapsed objects and apply some form of count in cell statistics in order to characterize their spatial distribution as a function of time. This would allow us in particular to put aside objects which have been disrupted by tidal stripping or phase mixing (indeed 10 % of the mass

of the halo is believed to remain in the form of virialized objects, while 90 % is disrupted by the tidal field). Recall that the disruption process is in principle well described by the perturbative expansion.

The criterion for the detection of objects must be carried while accounting for both the density contrast and the corresponding velocities. Indeed, we do not wish to identify as objects local overdensities which may just correspond to caustics or local wave reinforcement. Here we are interested in the temporal coherence of objects.

For this purpose, we may coarse-grain the perturbed distribution function both in position and velocity, with some given smoothing function, $W(\mathbf{r}/R_s, \mathbf{v}/V_s)$, and then apply some thresholding ($W \circ f > f_{\min}$ where \circ stands for convolution) on the amplitude of the distribution function, defining a set of connex regions. For each of these regions, we may then compute the energy of the corresponding clump. If it is negative, the clump will be labelled as bound for the corresponding threshold (f_{\min}), and coarse-graining parameters (R_s, V_s). Note that since the response only involves the *perturbed* density, one need not subtract the mean potential, (which is quite a difficult task in general).

Once the bound regions are identified, we may compute the corresponding mass and assign it to the bottom of the local potential well. This procedure may be applied for a range of threshold values, and standard statistical tools for diskrete sources but in spherical geometry. We may in particular construct in this manner the mass function of satellites as a function of radius, or, say the two-point correlation function versus mass and cosmic time. Both issues are subjects of strong discussions when addressed through standard N-body simulations.

This time-dependent identification of virialized objects is useful because of biasing, *i.e.* the fact that most observational tracers will only be sensitive to the more massive tail of the mass function of virialized objects.

Conversely, we may want to label regions which match the thresholding but not the requirement on binding energy, *i.e.* identify caustics, cusps, and shells (Fillmore & Goldreich (1984)). We may then characterize statistically the mean distance between the apoapses (see Fig. (5)), which will in general depend on R_s, V_s and f_{\min} but also on the underlying equilibrium, via $F(\mathbf{I})$ and on the statistical properties of \mathbf{c} through, say the distribution of impact parameters. Note in closing that the competing effects of phase mixing, tidal stripping and dynamical friction all assume that the underlying basis function reaches sufficiently high spatial frequencies to resolve these phenomena. In practice, since the projection of the response (both linearly and non linearly) is achieved over a basis which has a truncation frequency, ℓ_{\max} , there is a finite timescale, $T_{\max} \propto \ell_{\max}/\langle\omega\rangle$ above which phase mixing would induce winding at unresolved scales (here $\langle\omega\rangle$ represents the typical frequency of the dark matter in that region). Since the dynamical time is shorter in the inner region of the galaxy, such a threshold is going to be reached there first. Beyond this critical time, the dynamics is inaccurately modeled for the corresponding clump. This issue will be important for the non linear coupling of clumps, since substructures entering the halo at later times will be

dragged by streamers which are beyond the accuracy threshold⁵.

4 QUASILINEAR EVOLUTION OF HALO PROFILE

The previous sections dealt with the halo polarization while considering that perturbations were transients. In practice, a halo undergoes recursive excitations from its environment that will induce departures from its equilibrium state so that it won't remain static. In Appendix C we derive a quasi linear formalism for the collisionless open Boltzmann equation in order to take this effect in account. This follows in essence the work of Weinberg (1993), Weinberg (2001a), or Ma & Bertschinger (2004), though the derivation differs. We introduce here an explicit expression, valid at low redshift, for the source of stochastic "noise". We account explicitly for the correlation induced by the entering material (as characterized by Aubert & Pichon (2005a)) rather than rely on some *ad hoc* assumption on its nature. We also account consistently for the mean secular infall which adiabatically restructures the mean profile.

4.1 Context and derivation

Gilbert (1970) gives a very elegant derivation from first principles of the secular equation based on a $1/N$ (N being the number of particles in the system) expansion of the collisional relaxation equations presented by Bogolyubov & Gurov (1947). Weinberg (1993), Weinberg (2001a) and Ma & Bertschinger (2004) rely on the same expansion scheme to derive their kinetic equation for the mean halo profile.

Weinberg (1993) focusses on the secular collective relaxation of a system induced by the finite number of particles within a multiperiodic uniform medium, hence transposing to collisionless stellar dynamics the derivation of Lenard-Balescu (Lenard (1961), Balescu (1963)) applied originally to plasma physics in order to describe the secular convergence of such systems towards thermalisation.

Weinberg (2001a) derives a similar result for the spherical halo in angle and action variables, while relying on the Kramers-Moyal (Risken (1989)) expansion, which corresponds to a Markovian description based on the transition probability of a change in action induced by the interaction with a dressed particle cloud. His Fokker Planck coefficients differ slightly from Eqs. (C13)-(C14) in that the spectral properties of $\langle \hat{b}_n \hat{b}_{n'} \rangle$ are postulated in his case, while $\mathbf{c} \triangleq 0$.

Ma & Bertschinger (2004) construct a Fokker Planck equation for the mean profile of a halo in a cosmic environment while relying on the constrained random field of peaks in the standard cosmological model to derive the drift and diffusion coefficients from first principles. Their derivation is dynamically accurate to second-order in the perturbation theory (in position velocity space) and relate the kinetic coefficients to the properties of the underlying linear power spectrum. In contrast to the theory presented here, their kinetic equation describes the very early phase of halo formation,

whereas we focus here on the quasilinear evolution (in angle action space) of fully relaxed equilibria at low redshift.

In Appendix C, we account explicitly for the nature of the perturbation's power spectrum as defined in Aubert & Pichon (2005a) and present an explicit derivation for the Fokker Planck equation obeyed on secular time scales by the distribution function in angle action. It is natural to use these variables to describe a relaxed collisionless halo since they allow to split the dynamics into a secular (phase averaged) and a fluctuating part.

Even though individual dark matter particles obey a collisionless dynamics, the phase average ("ensemble average") distribution for the open system satisfies a collisional kinetic equation where the clumpiness of the open medium breaks the mean field approximation (see also Ma & Bertschinger (2004)). Indeed, individually, clumps and tidal remnants deflect the actions of the underlying distribution in a stochastic (but correlated) manner, so that in the mean ensemble sense, the coarse-grained distribution (*i.e.* the distribution averaged over the angles) obeys a collisional diffusion of the Fokker Planck type. In this formulation, the graininess of the system (as defined by the second-order closure of the BBKY hierarchy of the N -point distribution) corresponds to the mean number of clumps expected in the halo, while the detailed (kinetic and angular) power spectrum of the gravitational fluctuations is given by the cosmogony.

It is usual in plasma physics to take a two-time scale approach to the Boltzmann equation. The short time scale describes the system's dynamics on the dynamical (orbital) time scale, while the longer time scale corresponds to the secular evolution. The Action-Angle variables are best suited here. This time scale separation procedure leads to the following system of equations:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{w}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} + s_e, \quad (56)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \left\langle \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{w}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \right\rangle_T - \left\langle \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{I}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right\rangle_T + S_e, \quad (57)$$

In Eq. (56) and (57) s_e and S_e stand for the perturbative and secular advected source terms, while f stands for the fluctuating distribution and F stands for the secular distribution function (see Appendix C for details). The bracket around the quadratic terms stands for a time average over a secular time, T which is long compared to dynamical time, t (taken by a dark matter particle to describe its orbit). If we fix $F(\mathbf{I}, T)$, Eq. (56) corresponds exactly to Eq. (5) whose solution was described in Section 2.1. This formal solution may then be injected in the quadratic terms of Eq. (57). Following this route, we show in Appendix C how to rearrange Eq. (57) as a Fokker Planck equation:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \langle \mathbf{D}_0(\mathbf{I}) \rangle - \langle \mathbf{D}_1(\mathbf{I}) \rangle \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} - \langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}) \rangle : \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{I}^2}, \quad (58)$$

where \mathbf{D}_0 , \mathbf{D}_1 and \mathbf{D}_2 are given by Eqs. (C13)-(C15), while \cdot and $:$ stand for the total contraction.

The \mathbf{D}_0 term enters here because the halo is an open system, which may receive or lose mass. The drift term with the factor \mathbf{D}_1 accounts for the dynamical friction induced by the polarization cloud around the tidal remnants; the diffusion term with the factor \mathbf{D}_2 arises because of the fluctuations in the potential (both tidal and associated with the infalling dark matter) induced by the clumps. The diffusion term will

⁵ these limitations are also clearly encountered in classical N -body simulations

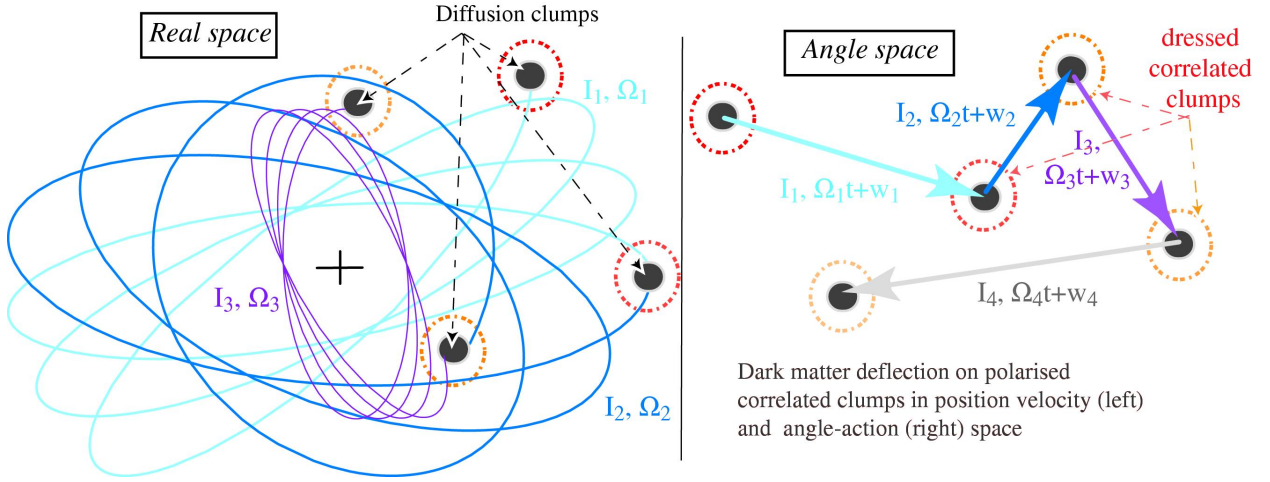


Figure 6. *Left panel* schematic representation of the successive deflection of a given orbit on correlated clumps within the halo in position space. Each clump is represented with its polarisation cloud. The gray scale coding in the cloud reflects their spatial and temporal correlation within the clumps. During the deflections, the orbital parameters change (though the individual change is here grossly exaggerated). *Right panel:* the same orbit as viewed in angle-action variables. The dynamics in these variable is straightforward (it corresponds to straight lines obeying $\dot{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})t + \mathbf{w}_0$) and the diffusion process resembles brownian motion obeying a Langevin equation the particle receiving a random kick at each deflection, represented by a change in colour which reflects the fact that the “collision” is instantaneous in contrast to the time interval separating two collisions

in general induce a spreading of the energy distribution by accelerating some orbits to higher energies while decelerating some other ones. The polarization cloud will in general induce a drag on the clumps, represented by the \mathbf{D}_1 term. Note that the former should be independent of the mass of the clump (since the energy is exchanged via the mean field) while the latter will not (since more massive clump polarize the medium more). From the point of view of the entering dark matter, the net effect is therefore a segregation process in which the more massive clumps fall in (as discussed by Gilbert (1970)).

According to Risken (1989), the corresponding Langevin (Langevin (1908)) equation reads (when the source term, D_0 is omitted)

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = \Delta_1(\mathbf{I}) + \Delta_2(\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\xi}(t). \quad (59)$$

Here $\Delta_1(\mathbf{I})$ and $\Delta_2(\mathbf{I})$ are given in terms of $\mathbf{D}_1(\mathbf{I})$ and $\mathbf{D}_2(\mathbf{I})$ by

$$\Delta_2 = \mathbf{D}_2^{1/2}, \quad \text{and} \quad \Delta_1 = \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2^{1/2} : \nabla_{\mathbf{I}} \mathbf{D}_2^{1/2},$$

where $[\mathbf{D}_2]^{1/2}$ stands for the square root of the matrix \mathbf{D}_2 which is computed via diagonalization, provided the eigenvalues are positive. The 3D random field, $\boldsymbol{\xi}(t)$, should have spectral properties which reflect that stochastic properties of \mathbf{b} and \mathbf{c} . The probability distribution of the solution to the stochastic equation, Eq. (59), obeys the Fokker Planck Equation, Eq. (58). In this form, the effect of diffusion on the departure from phase mixed equilibrium is easily interpreted.

4.2 Prospects for universal halo profiles

As has been suggested and illustrated by Weinberg (2001a) and Ma & Bertschinger (2004), it would be very worthwhile to use Eq. (58) and predict the asymptotic dark matter profile, (and, say the cosmic evolution of the concentration param-

ter) which will be shaped in part by encounters and interlopers.

Note that the diffusion coefficients, D_i are relatively straightforward to compute for a given halo model, $F(\mathbf{I})$ but Eq. (58) corresponds to an evolution equation for $F(\mathbf{I})$ and will in practice require re evaluating the coefficients for different values of F .

Let us now draw constraints on the stationary solutions of Eq. (58). Again (following Section 5), this may be done in one of two ways: take D_0 , \mathbf{D}_1 and \mathbf{D}_2 as given function of the actions, and deduce what equation F should obey from requiring that Eq. (58) has a stationary solution. (this is the route first explored by Weinberg (2001b)); or, if we assume that a given model, say a universal profile, should correspond to the asymptotic solution of Eq. (58), we may find the relationship relating the corresponding \mathbf{D}_i coefficients.

For simplicity, let us illustrate this second point while neglecting here the fact that the diffusion coefficients depend on the distribution function, and restricting ourselves briefly to an isotropic distribution, $F(E, T)$. Calling:

$$H(E) = \left(\langle \mathbf{D}_1 \rangle \cdot \boldsymbol{\omega} + \langle \mathbf{D}_2 \rangle : \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{I}} \right) / (\langle \mathbf{D}_2 \rangle : \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}), \quad (60)$$

$$\text{and } Q(E) = \frac{\langle D_0 \rangle}{\langle \mathbf{D}_2 \rangle : \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}}, \quad (61)$$

the stationary solution ($\partial F / \partial T = 0$) to Eq. (58) reads formally:

$$F(E) = \int_0^E \exp \left[- \int_{e_2}^{e_3} H[e_1] de_1 \right] \times \left\{ \int_{e_2}^{e_3} Q[e_4] \exp \left[\int_{e_2}^{e_4} H[e_1] de_1 \right] de_4 \right\} de_3. \quad (62)$$

This distribution function should satisfy the self-consistency requirement that

$$\rho(r) = 2\sqrt{2} \int_{-\psi}^0 F(E) \sqrt{E + \psi} dE, \quad \nabla^2 \psi(r) = 4\pi G \rho(r). \quad (63)$$

Imposing that $F(E)$ obeys Eqs. (61)-(63) yields a non-linear integral equation for the D_i , *i.e.* a (admittedly indirect) constraint on the angular correlation of the external field. Section 5 describes other means of constraining the power spectrum of the infalling dark matter. Weinberg (2001b) found iteratively the corresponding solution while making some assumptions on the spectral properties of \mathbf{b} in the régime where $\mathbf{c} = 0$. In the light of his investigation, he concluded that the tidal excitation drives the halo towards a less steep profile. It will be interesting to explore this venue with a realistic accounting of the source of infall. The setting here would be that the satellite problem and the cusp problem of dark matter halos might be the two sides of the same coin, so that the evolution towards a universal profile might be triggered by the actual infall of substructures.

Let us now return to the perturbative dynamics described in Section 2, 3 and explore its implications for galaxies.

5 APPLICATIONS: HALO POLARIZATION, DISK DYNAMICS AND INVERSION

Aubert & Pichon (2005a,b) provided a detailed statistical description of how dark matter falls onto a L^* galactic halo: how much mass is accreted as a function of time, how is it accreted *i.e.* in what form, with what velocity distribution, along which direction, and for how long? Putting the theory described here and the tabulated measurements from that paper together, allows us to address globally, and coherently dynamical issues on galactic scales in a *statistically representative* manner. With the help of the theory presented in Section 2, 3, we are now in a position to ask ourselves: what are the expected features of a halo/galaxy induced by their cosmic environment. Specifically, we may now “simply” propagate the cosmological framework and its statistics to observables (describing the departure from spherical symmetry/stationnarity) on galactic scales. On these scales, the realm of astrophysical applications for the perturbative open solution of the Poisson-Boltzmann equations is extremely wide. It is clearly beyond the scope of this paper to attempt an exhaustive inventory. Rather, we shall here focus on a few specific issues, for which we show how the open perturbative framework improves our understanding, and allows for a statistical investigation.

In particular, we shall restrict ourselves to settings where the detailed geometry of the infall matters, since the theory described above does account for the configuration and the time lag involved in the accretion on top of L^* galaxies.

Recall that the purpose of the statistical propagation is threefold: (i) constrain the properties of the infall on the basis of the *observed* distribution for the properties of galaxies and their environment; (ii) *predict* some of the statistical properties of galaxies which are not directly observable, while relying on the properties of the infall. (iii) weigh the relative importance of the intrinsic properties of the disk+halo compared to the strength of the environment.

We will distinguish three classes of problems; first we will describe how to transpose to galactic scales (Section 5.1)

the classical probes used in cosmology to trace the large-scale structures. We will then explore in Section 5.2 the implication for the properties of external galaxies, and in Section 5.3 for the structures within the Milky Way halo. Finally, we will elaborate in Section 5.4 on the prospect of inverting the upcoming data sets for the *past* history of our own Galaxy and for field galaxies in the local group.

5.1 Cosmic probes in the neighbourhood of galaxies:

$$R_{200}/10 < R < R_{200}$$

A series of observational probes of the statistical properties of the density field have been devised over the years, such as weak lensing, galaxy counts, the SZ effect, X-ray or γ -ray emissivity maps. In the light of large galactic surveys which are available today, it becomes quite desirable to apply these probes in the neighborhood of galactic halos in order to study the dark matter distribution within the R_{200} radius. Some of these tracers are only sensitive to the baryon density, which need not trace directly the dark matter density. In this section, we will systematically assume for simplicity a simple biasing, though this assumption may be lifted (at the expense of extra non-linearities, see Section E3) provided the biasing law is known (*i.e.* the observables are assumed to scale like the dark matter density, or some power of it); we refer to Section 3.3.1 for a brief discussion of thresholding, which is bound to be important in practice.

The calculation described in the previous sections, together with the statistical measurements described in Aubert et al. (2004); Aubert & Pichon (2005a,b) should allow us to make statistical predictions about observables which may be expressed in terms of the distributions of clumps within the galactic halos, either via their gravitational potential, their projected density or even their velocity distributions (*e.g.* Galactic streams).

We will consider in turns observable which may be approximated as linear functions of the *perturbed* fields, either in projected coordinates on the plane of the sky, or as seen by an observer at the galactic center. We will also consider observables which involve quadratic functions of this field (*e.g.* the square of the electron density), or even more non-linear functions of the dark matter distribution within the virial radius (such as the locus of virialized clumps, which dissolve at a function of time). We will in particular build the two-point statistics for these observables, since the mean of the perturber is often zero by construction. Finally we will also consider metals lines in absorptions systems, which involve the cross-correlation of the density and the velocity fields. Note that all these measurements could in principle be carried as a function of redshift, or a function of the mass of the halo, or while varying the anisotropy of the equilibrium for the halo (by varying $F(\mathbf{I})$ in *e.g.* \mathbf{K} in Eq. (40)). Note finally that some tracers correspond to the scales of clusters, and we will assume here that the measurements presented in Aubert & Pichon (2005a) could be reproduced for these objects (whereas the theory described here is scale independent provided the system is dynamically relaxed and spherical).

In this section, we will focus on a couple of probes which are supposed to scale linearly with the dark matter density in the main text (weak lensing, SZ effect), and postpone to appendix E a presentation of other probes (X-ray emissivity,

dark matter desintegration, metal lines in absorption spectra).

Note that all probes described below are a departure from the mean profile of galactic halos (just as cosmic perturbation theory describes the growth of structure as a departure from the mean density/expansion of the universe) and as such, assume that we have a good understanding of this profile. This will undoubtedly turn out to be a serious observational constraint when attempting to ensemble average galaxies of various size and properties.

5.1.1 Weak lensing in stacked halos

Weak lensing corresponds to the deflection of light emitted from background galaxies by the gravitational potential of structures between those galaxies and the observer. It has recently been used quite successfully to constrain the statistical distribution of the large-scale structures. In the weak lensing régime (Peacock (1999)), the relationship between the observed convergence and the underlying projected dark matter profile is approximated to be linear. Hence we may straightforwardly propagate our statistical predictions for the clumpy dark matter distribution around a dark matter halo (or within the neighbourhood of clusters of galaxies provided some readjustment of the theoretical predictions described in Aubert et al. (2004); Aubert & Pichon (2005a) on these larger scales).

The cumulative deflection angle, $\alpha(\theta, w) \triangleq \delta \mathbf{x}/r_k(w)$ by which light is deflected is given by

$$\alpha(\theta, w) = \frac{2}{c^2} \int dw' \frac{r_k(w' - w)}{r_k(w)} \nabla_{\perp} \psi(r_k(w')\theta, w'), \quad (64)$$

where r_k is the angular comoving distance, $dw \triangleq dr/\sqrt{1 - kr^2}$ ($k = 0, \pm 1$) and \mathbf{x} the transverse comoving distance. Defining the convergence, $\kappa(\theta)$ by

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2} \nabla_{\theta} \cdot \alpha(\theta), \quad (65)$$

the mean ensemble average convergence of the rescaled halo, $\langle \kappa(\theta) \rangle$, reads:

$$\langle \kappa(\theta) \rangle = \frac{1}{c^2} \int dw' \frac{r_k(w' - w)}{r_k(w)} \nabla_{\perp}^2 \psi_{\text{NFW}}(r_k(w')\theta, w'). \quad (66)$$

Now recall that (cf. Eq. (8) where $\psi^{[n]}$ is given by Eqs. (B2)-(B3) in Appendix B1.)

$$\delta \psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \psi^{[n]}(\mathbf{r}), \quad \text{hence} \quad \delta \kappa(\theta) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \kappa^{[n]}(\theta), \quad (67)$$

where

$$\kappa^{[n]}(\theta) = \frac{1}{c^2} \int dw' \frac{r_k(w' - w)}{r_k(w)} \nabla_{\perp}^2 \psi^{[n]}(r_k(w')\theta, w'). \quad (68)$$

It follows that the correlation function of the relative convergence obeys

$$\frac{\langle \delta \kappa(\theta) \delta \kappa(\theta') \rangle}{\langle \kappa(\theta) \rangle^2} = \frac{1}{\langle \kappa(\theta) \rangle^2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \langle a_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}'} \rangle \kappa^{[n]}(\theta) \kappa^{[n']}(\theta'), \quad (69)$$

Hence, the statistical properties of the relative convergence will depend on the statistical distribution of the clumps of the halo through the $\{a_{\mathbf{n}}\}$ coefficients which are given in Eq. (28) in terms of $b_{\mathbf{n}}$ and $c_{\mathbf{n}}$.

In practice one has to devise an observational strategy,

given the expected size of the caustics of subclumps within haloes of galaxies or clusters, the number of background sources, and the expected number of foreground objects (*i.e.* galaxies or clusters).

Finally, it is believed that one in a hundred large ellipticals on the sky should undergo strong lensing. In the long run, the statistical properties of such a non-linear signal will be worth investigating within the framework described in this paper (following the non-linear steps described in say, Section E3).

5.1.2 Thermal S-Z effect of stacked halos

When the photons of the cosmic microwave background enter the hot dense gaz within the clusters and galactic halos, they interact with the electrons of the gaz. The diffusion process transfers the energy of the photons to the electrons which in turn reemit this energy at a higher frequency. The corresponding spectral redistribution induces a local temperature decrement seen in the temperature map of the clusters, known as the thermal Sunyaev-Zeldovich effet (see e.g. Peacock (1999)). The temperature decrement (at low frequency) reads as a function of the distance to the cluster center, \mathbf{R} :

$$\frac{\Delta T(\mathbf{R})}{T_{\text{CMB}}} = -2 \frac{k_B \sigma_T}{m_e c^2} \int dz n_e(z, \mathbf{R}) T_e(z, \mathbf{R}), \quad (70)$$

where m_e , n_e and T_e are respectively the mass, the numerical density and the temperature of the electrons, while σ_T is the Thomson scattering section ($6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$), c the speed of light, k_B Boltzmann's constant, and T_{CMB} is the Cosmic microwave background temperature.

Let us assume that the variation in temperature is small compared to the variation of the electron number density⁶. Let us also assume that the electron density is proportionnal to the dark matter density (constant biasing) as mentioned above. Let us define the departure from the cosmic average for the profile as:

$$\delta \Delta T(\mathbf{R}) = \Delta T(\mathbf{R}) - \langle \Delta T \rangle(\mathbf{R}). \quad (71)$$

The relative fluctuation of the temperature decrement reads:

$$\frac{1}{\langle \Delta T \rangle^2(\mathbf{R})} \langle \delta \Delta T(\mathbf{R}) \delta \Delta T(\mathbf{R}') \rangle = \frac{1}{\Sigma_{\text{NFW}}(\mathbf{R})^2} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \langle a_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}'} \rangle \times \int dz \int dz' \rho^{[n]}(\mathbf{R}, z) \rho^{[n']}(\mathbf{R}', z'), \quad (72)$$

where Σ_{NFW} is the mean rescaled projected dark matter mass profile. Note that the double integral in Eq. (72) is carried over known functions and is just a geometric factor which will depend on R , ΔR , and $\Delta \Theta$ only. Again, the knowledge of the statistics of the $\{a_{\mathbf{n}}\}$ (which in turn only depend on the equilibrium, F_0 , and the statistics of $b_{\mathbf{n}}$ and $c_{\mathbf{n}}$ at R_{200} , see Eq. (18) or (28)) therefore allows us to predict the statistical properties of the relative fluctuations in the temperature decrement. ALMA will soon provide detailed SZ maps of clusters for which it should be possible to apply these techniques.

⁶ Note that we may lift this assumption at the cost of nonlinearities, provided we may rely on an equation of state to relate it to the underlying density

In closing, let us note that maps of SZ effects within our own Galaxy will be available with the upcoming Planck satellite, and will provide statistical information on the small-scale distribution of local clumps. Recall finally that appendix E presents other statistical probes of the outer structures found in galactic halos (X-ray emissivity, dark matter desintegration, metal lines in absorption spectra). Most of these probes could be used to say, probe the shape of the density profile in the outer parts of galaxies, or the biasing law relating dark matter to stars or gas.

5.2 Galactic structure: $R < R_{200}/10$

In the previous section, we investigated the dynamical consequences of the cosmic infall in the outer region of the halo. Let us now turn to the regions of the halo where we expect to find the galaxies themselves. At lower redshift, the galaxies essentially come in two flavours, ellipticals and spirals. The response of ellipticals should follow closely that of the dark matter halo since both components are hot enough not to undergo gravitational instabilities. In effect, describing an embedded “spherical” elliptical galaxy within a dark matter halo amounts to changing the distribution function to account for the presence of the elliptical and its possibly distinct kinematics.

For a disk or a very flattened spheroid, the situation becomes quite different. The cooler disk is likely to be either drawn beyond its stability threshold by the perturbation, or will respond much more strongly to the perturber than its dark halo. Hence we need to model the disk component differently. The proto-galactic environment is likely to be extremely noisy, particularly in outer regions, so that the halo may perturb the disk by transmitting numerous disturbances into the inner galaxy. Moreover, the inner halo may continue to oscillate as it settles after the coalescence of advected objects. Halo oscillations may easily perturb the disk through the time-dependent gravitational potential. Conversely, the structural integrity of observed disks set limits on the degree of disequilibrium in the proto-galactic halo.

Within the realm of features found in galactic disks, a fraction are known to be the result of instabilities (e.g. galactic bars), while others have been shown to correspond to transients (e.g. galactic warps).

With the advent of modern systematic surveys, it is possible to construct distributions corresponding to, say, the fraction of spirals which fall within some Hubble type, or the fraction of warps whose inclination is larger than some angle. On the disk scale, we may construct the PDF of, say, the pitch angle of dynamically induced spirals, or the PDF of the extent of the bar, its amplitude, or less directly observed the PDF of pattern speeds. Some of these processes depend crucially on gas physics and will not be addressed here.

5.2.1 Pitch angle distribution for spirals

For stellar disks, the stars obey formally the same equation as Eqs. (5)-(10), but this time the modes may be unstable, and sometimes the disk cannot be treated in isolation from the live halo in which it is embedded. On the other hand, it is often well approximated as an infinitely thin structure; such a 2D system becomes integrable again with two actions,

$dJ \triangleq dJ_r dL_{z,D}$. Here J_r is the radial action of the stars in the plane of the disk, and $L_{z,D}$ is the momentum of the stars in the disk. Following Weinberg (1998a) and adding some source of infall at R_{200} , we may describe the coupled system disk + halo in the complex plane as

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_D \\ \hat{\mathbf{a}}_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{DD} & \hat{\mathbf{K}}_{DH}^* \\ \hat{\mathbf{K}}_{DH} & \hat{\mathbf{K}}_{HH} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_D \\ \hat{\mathbf{a}}_H + \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{c}} \end{pmatrix},$$

where $\hat{\mathbf{K}}_{HH}$ is given by Eq. (D15), while

$$(\hat{\mathbf{K}}_{DD})_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}} \int dJ \frac{\psi_{\mathbf{k}}^{D,[p]}(J) \psi_{\mathbf{k}}^{D,[q]*}(J)}{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_D - \omega} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{J}},$$

and a similar expression involving $\psi_{\mathbf{k}}^{[p]}(J) \psi_{\mathbf{k}}^{D,[q]*}(J)$ for the cross term, $\hat{\mathbf{K}}_{DH}$. See Pichon & Cannon (1997) for details relative to the disk. Here $\hat{\mathbf{a}}_D$ and $\hat{\mathbf{a}}_H$ are the coefficient of the expansion for the disk and the halo respectively, F_D is the distribution function of stellar stars within the disk, $\{\psi^{D,[q]}(r)\}_{\mathbf{q}}$ the potential basis function over which the disk response is projected, and ω_D the angular frequencies of the stars in the disk.

Let us first assume that the unperturbed disk is stable. Solving the coupled equation for $[\hat{\mathbf{a}}_H, \hat{\mathbf{a}}_D]$ yields (after half inverse Fourier transform) the temporal evolution of the spiral response as a function of time for a given tidal field, $\mathbf{b}(t)$ and a given infall history, $\mathbf{c}(t)$. The pitch angle, \mathcal{I} of the spiral, defined by $\tan(\mathcal{I}) = 1/\pi \int_0^\pi d\theta d \log \mathcal{R} / d\theta$ (where $\mathcal{R}(\theta)$ corresponds to the crest of the spiral wave), is a non-linear function of \mathbf{a}_D , which we may write formally as $\mathcal{I}[\mathbf{a}_D]$. Hence we may ask ourselves what its cosmic mean, $\langle \mathcal{I}[\mathbf{a}_D] \rangle$ is, given that $\hat{\mathbf{a}}_D(\omega)$ obeys

$$\hat{\mathbf{a}}_D(\omega) = \hat{\mathbf{K}}_{HD} \cdot [\mathbf{b} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}] / \text{Det} \begin{vmatrix} \mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}}_{DD} & \hat{\mathbf{K}}_{DH}^* \\ \hat{\mathbf{K}}_{DH} & \mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}}_{HH} \end{vmatrix}.$$

Note that $\mathcal{I}[\mathbf{a}_D]$ will depend on the statistical properties of \mathbf{b} , \mathbf{c} and also on the distribution function for the halo, $F(\mathbf{I})$, and the distribution function for the disk, $F_D(\mathbf{J})$. More generally, we may in this manner construct the full PDF of the pitch angle, as a function of say, cosmic time, (or relative mass in the disk or ...) following the same route as sketched in Section E3.

If the disk is intrinsically unstable, we must then add to the driven response described above the unstable modes. The amplitude of the response will then depend on exactly when each unstable mode has been excited. Such a prescription is beyond the scope of this paper.

5.2.2 Warp excitation

As mentioned earlier (López-Corredoira et al. (2002), Jiang & Binney (1999)), warps are intrinsically stable modes of thin disks which respond to their environment. The action of the torque applied on the disk of a galaxy is different for different angular and radial positions of the perturbation. The warp’s orientation and its amplitude are functions of the external potential.

The work done by the presence of perturbations on the stellar system is

$$\frac{dE}{dt} = - \int d\mathbf{r} \nabla(\psi + \psi^e) \cdot \rho \mathbf{v} = - \int d\mathbf{r} (\psi + \psi^e) \nabla(\rho \mathbf{v}), \quad (73)$$

where $\psi + \psi^e$ is the total potential perturbation (self-response + external component).

Using Eq. (19) and Eq. (73)

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = - \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \int d\mathbf{r} \langle [a_{\mathbf{n}'}(t) + b_{\mathbf{n}'}(t)] \nabla \psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \times \int_{-\infty}^t d\tau K_{[2], \mathbf{n}}(\mathbf{r}, \tau - t) [a_{\mathbf{n}}(\tau) + b_{\mathbf{n}}(\tau)] + Q_{[2], \mathbf{n}}(\mathbf{r}, \tau - t) c_{\mathbf{n}}(\tau) \rangle.$$

The power spectra of potential fluctuations drive the energy rate of change through the cross-correlation between the source and the potential.

Note in closing that the framework described in this paper should allow us in the future to address the possibility of warps induced by the accretion of gas.

5.3 Substructures in our own Galactic halo

Let us now turn to the Milky Way. Our knowledge of the structure of its halo has increased dramatically in the course of the last decade with the advent of systematic imaging and spectroscopic surveys (e.g. SDSS, 2dF), both in the optical and at longer wavelengths (e.g. 2MASS), and this observational investigation will undoubtedly continue with efforts such as RAVE, or the upcoming launch of GAIA. This has led to the discovery of quite a few substructures within our halo, both in projection on the plane of the sky (tidal tails) as star counts but also via kinematical features (streams). The extent of the upcoming systematic stellar surveys will allow for a systematic analysis of the dynamical properties of Galactic substructures.

5.3.1 Extent of tidal tails and streams in proper motion & galactic coordinates

The number of stars, dN , in the solid angle defined by the Galactic longitudes and latitudes $(\ell, b) \triangleq \ell$ (within $d\ell d(\sin b)$), with proper motions $(\mu_\ell, \mu_b) \triangleq \boldsymbol{\mu}$ (within $d\mu_b d\mu_\ell$) at time t is given by (Pichon et al. (2002)):

$$dN \triangleq A_\lambda(\boldsymbol{\mu}, \ell, t) d\boldsymbol{\mu} d\ell = \left\{ \iint du_r r^4 dr f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \right\} d\boldsymbol{\mu} d\ell, \quad (74)$$

The variables \mathbf{r}, \mathbf{u} are the vector position and velocity coordinates (u_r, u_ℓ, u_b) in phase space relative to the Local Standard of Rest, while $\mathbf{r} = (R, \Phi, z)$ and $\mathbf{v} = (v_R, v_\Phi, v_z)$ are those relative to the Galactic centre. In particular, the radius r (within dr) corresponds to the distance along the line of sight in the direction given by the Galactic longitudes and latitudes (ℓ, b) (within the solid angle $d\ell \cos(b) db$).

These velocities are given as a function of the velocities measured in the frame of the sun by

$$\begin{aligned} v_\Phi &= \frac{1}{R} (r_\odot \sin(b) \sin(\ell) u_b - r_\odot \cos(b) \sin(\ell) u_r - \\ & r_\odot \cos(\ell) u_\ell + r \cos(b) (u_\ell - \sin(\ell) u_\odot) + (r_\odot + r \cos(b) \cos(\ell)) v_\odot), \\ v_R &= \frac{1}{R} \{ (r \cos(b) - r_\odot \cos(\ell)) \sin(b) u_b - r_\odot \sin(\ell) u_\ell - \\ & \cos(b) (r \cos(b) - r_\odot \cos(\ell)) u_r + \\ & r_\odot u_\odot - r \cos(b) \cos(\ell) u_\odot + r \cos(b) \sin(\ell) v_\odot \}, \\ v_z &= \sin(b) u_r + \cos(b) u_b + w_\odot, \end{aligned} \quad (75)$$

where

$$\Phi = \tan^{-1} \left(\frac{r \cos(b) \sin(\ell)}{R}, \frac{r_\odot - r \cos(b) \cos(\ell)}{R} \right),$$

$$R = \sqrt{r_\odot^2 - 2r_\odot r \cos(b) \cos(\ell) + r^2 \cos(b)^2}, \quad \text{and}$$

$$z = r \sin(b). \quad (76)$$

R measures the projected distance (in the meridional plane) to the Galactic centre, Φ the angle in the meridional plane between the star and the Galactic centre, while z is the height of the star. Here $u_\odot, v_\odot, w_\odot$ and r_\odot are respectively the components of the Sun's velocity and its distance to the Galactic centre.

Recall that Eq. (6) together with Eq. (18) provides us with the full phase space distribution of the infall as a function of the actions of the unperturbed halo. Let us call $f_{\mathbf{n}}$, the phase space basis defined by

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) \triangleq \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \tau + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}}^{[n]}(\mathbf{I}), \quad (77)$$

so that the perturbation at time t and position (\mathbf{r}, \mathbf{v}) reads

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{n}} \int_{-\infty}^t d\tau f_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau - t) a_{\mathbf{n}}(\tau). \quad (78)$$

We may now seek the characteristic signature in observed phase space (today *i.e.* at $t = 0$), of a given perturbation.

$$A(\ell, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{\mathbf{n}} \int d\tau a_{\mathbf{n}}(\tau) \int dr r^4 \int du_r f_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}[\ell, r], \mathbf{v}[r\boldsymbol{\mu}, u_r], \tau), \quad (79)$$

where $\mathbf{v}[r\boldsymbol{\mu}, u_r]$ is given by Eq. (75), and $\mathbf{r}[\ell, r]$ is given by Eq. (76). In particular, we may compute the autocorrelation of the kinematic count defined by

$$C_A^\mu(\Delta\ell, \Delta\boldsymbol{\mu}) \triangleq \langle A(\ell + \Delta\ell, \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}) A(\ell, \boldsymbol{\mu}) \rangle. \quad (80)$$

It involves an integral over time of the autocorrelation of the coefficients, $\langle a_{\mathbf{n}}(\tau) a_{\mathbf{n}'}(\tau') \rangle$ as

$$C_A^\mu = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \iint d\tau d\tau' \langle a_{\mathbf{n}}(\tau) a_{\mathbf{n}'}(\tau') \rangle \iint r^4 dr r'^4 dr' \iint du_r du_r' \times f_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}[\ell, r], \mathbf{v}[r\boldsymbol{\mu}, u_r], \tau) f_{\mathbf{n}'}(\mathbf{r}[\ell + \Delta\ell, r'], \mathbf{v}[r'\boldsymbol{\mu} + \mathbf{r}'\Delta\boldsymbol{\mu}, u_r'], \tau').$$

Recall that $\langle a_{\mathbf{n}}(\tau) a_{\mathbf{n}'}(\tau') \rangle$ can be reexpressed in terms of the coefficients of $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^{*\top} \rangle$ and $\langle \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$ and $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$ via Eq. (28). The width of the correlation, $C_A^\mu(\Delta\ell, \Delta\boldsymbol{\mu})$, both in velocity space and in position space accounts for the expected cosmic size of structures within the Galactic halo.

5.3.2 Angular extend of tidal tails

The marginal distribution over proper motions of Eq. (74) yields the projection on the sky of the perturbation:

$$A(\ell, t) \triangleq \iint A(\ell, \boldsymbol{\mu}, t) d\boldsymbol{\mu} = \iint du_r r^4 dr f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\boldsymbol{\mu}, \quad (81)$$

which can be derived from Eq. (79) but is also found directly via integration over the density as

$$A(\ell, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t) \int \tilde{\rho}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \ell) r^2 dr, \quad \text{given} \quad \tilde{\rho}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \ell) \triangleq \rho_{\mathbf{n}}(R(\mathbf{r}, \ell), \Phi(\mathbf{r}, \ell), z(\mathbf{r}, \ell)), \quad (82)$$

where $\rho_{\mathbf{n}}$ is given by Eq. (8) and *e.g.* $R(\mathbf{r}, \ell)$ is given by Eq. (76). Note the generic difference between Eq. (79) and

(82): the former involves the explicit cumulative knowledge of $a_n(\tau)$ for all τ since it involves a kinematical (inertial) quantity, μ , while the latter only require the knowledge of the current $a_n(t)$. This difference is weaker than it seems in practice, since self-gravity implies that $a_n(t)$ depends in turn on the previous $a_n(\tau)$ via Eq. (17). The corresponding angular correlation reads

$$C_A(\Delta\ell) \triangleq \langle A(\ell + \Delta\ell)A(\ell) \rangle = \sum_{n,n'} \langle a_n(t) a_{n'}(t) \rangle \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' r^2 r'^2 \tilde{\rho}_n[r, \ell] \tilde{\rho}_{n'}[r', \ell + \Delta\ell]. \quad (83)$$

The FWHM of the correlation defined by Eq. (83) corresponds to the “cosmic” width of tidal stream projected on the sky.

5.4 Past history of galaxies : dynamical inversion

Let us now see how the theoretical framework presented in Section 2 and Section 3 may be applied to invert observed properties of galaxies back in time and constrain the past infall and the tidal field on a given dark matter halo. In short, the idea is to notice that the perturbation theory provides an explicit relationship between the response and the excitation of the inner halo which we can tackle as an integral equation for the source.⁷ Let us present first the inversion for our Milky Way (Section 5.4.1), then to extra galactic stellar streams (Section 5.4.2).

5.4.1 The Galactic inverse problem

Let us rewrite formally Eq. (79) as $A(\ell, \mu) = \mathcal{A}^{\ell, \mu} \cdot \mathbf{a}$, where the dot product accounts for both the summation over \mathbf{n} and the integration over τ (cf. Eq. (44)). Let us assume that we have access to kinematic star counts, i.e. to a set of measurements $\{A_i \triangleq A(\ell_i, \mu_i)\}_{i \leq n}$. We want to minimize

$$\chi^2 = \sum_i \left(A_i - \mathcal{A}_i^{\ell, \mu} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}) \right)^2, \quad (84)$$

subject to some penalty function. Recall that \mathbf{R}_1 is given by Eq. (46) and accounts for the self-gravity of the halo. Let us formally rewrite again $\mathcal{A}_i^{\ell, \mu} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{c}) \triangleq \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{b}}$, with $\tilde{\mathbf{b}} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Let us also write $\mathbf{A} = (A_i)_{i \leq n}$. The solution to the linear minimisation, Eq. (84) reads

$$\tilde{\mathbf{b}} \triangleq \mathbf{M}_\lambda^{(-1)} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{M} + \lambda \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{A}, \quad (85)$$

where \mathbf{P} is some penalty which should impose smoothness for \mathbf{b} and \mathbf{c} both angularly and as a function of time. For instance, For the \mathbf{b} field we could use (see, e.g. Pichon et al. (2002)):

$$P[b_{\ell m}] = \sum_\ell [(\ell + 1)\ell]^2 \int d\omega \omega^2 |\hat{C}_\ell|, \quad \text{where} \quad \hat{C}_\ell(\omega) \triangleq \langle |\hat{b}_{\ell m}|^2 \rangle,$$

(so that large ω and ℓ are less likely in the solution) and a similar expression for the \mathbf{c} field which should also impose smoothing along velocities. The penalty coefficient, λ , should

⁷ Since our treatment of the dynamics (including the self-consistent gravity polarisation) is linear order by order, we may in principle recover the history of the excitation.

be tuned so as to provide the appropriate level of smoothing. In practice, it might be necessary to impose further non-linear constraints on the solution, $\tilde{\mathbf{b}}$, such as requiring that the excitation is locally as compact and connex as possible on the R_{200} sphere. This can be done via some form of non-linear band pass filter in the prior, in order to limit the effective degrees of freedom in $\tilde{\mathbf{b}}$.

Accounting for non-linearities.

The non-linear solution, Eq. (50) may be formally rewritten as $\mathbf{a}_2 \triangleq \mathbf{M}_2 \cdot \tilde{\mathbf{b}} \otimes \tilde{\mathbf{b}}$, so that the perturbative inverse reads

$$\tilde{\mathbf{b}} \triangleq \mathbf{M}_\lambda^{(-1)} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{M}_\lambda^{(-1)} \cdot \mathbf{M}_2 \cdot (\mathbf{M}_\lambda^{(-1)} \cdot \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{M}_\lambda^{(-1)} \cdot \mathbf{A}), \quad (86)$$

(where $\mathbf{M}_\lambda^{(-1)}$ is defined by Eq. (85)) provided the regime for the perturbative expansion applies. If not, we may still find the best non-linear solution to the penalised likelihood problem of jointly minimizing $\|\mathbf{A} - \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{M}_2 \cdot \tilde{\mathbf{b}} \otimes \tilde{\mathbf{b}}\|^2 + \lambda \mathbf{P}$, while using Eq. (86) as a starting point.

When proper motions measurements are not available (i.e. we only have access to star counts), Eqs. (84)-(86) still apply with some straightforward modifications, but the conditioning of the problem should decrease significantly, since the dynamics is less constrained.

For a data set such as GAIA, we shall have access to the full 6-dimensional description of phase space for some of the stars (via radial velocity measurements and parallax) or at least 5 dimensionnal measurements ($\ell, b, \mu_\ell, \mu_b, u_r$).

Recall that in practice, the fields, \mathbf{b} and \mathbf{c} are respectively three-dimensional (2 angles and time) and 5 -dimensional (2 angles, time and 3 velocities). Consequently the inverse problem is generically very ill-conditioned since data space is either two (ℓ, b), four (ℓ, b, μ_ℓ, μ_b), five -dimensional ($\ell, b, \mu_\ell, \mu_b, \pi$), or six dimensionnal ($\ell, b, \mu_\ell, \mu_b, \pi, v_r$). In fact it is anticipated that the conditioning is even poorer because the dynamical evolution involves damped modes, implying an exponential decay (which corresponds to a major challenge for extrapolation). It remains that the weakly damped modes should be tractable back in time up to some horizon, which will depend on the nature of the halo (via the conditioning of \mathbf{M}_λ defined in Eq. (85)), the volume of data, and the signal to noise ratio in the measurements.

Let us close this discussion of the inverse problem by emphasizing again the true complexity of the implementation: Eq. (85), and its non-linear counterpart, Eq. (86), include via the dot product large sums over \mathbf{n} and integrals over τ . \mathbf{M} and \mathbf{M}_2 are functions of $\mathcal{A}^{\ell, \mu}$ (which require a couple of integrals) and A_{bb} etc... which are themselves functions of \mathbf{K}_i (Eq. (52)) (which involves the underlying distribution function, $F_0(\mathbf{I})$, and the basis function, $\psi^{[n]}(\mathbf{r})$ via Eqs (40), (41) and (46)).

5.4.2 Extra galactic inverse problem

Streamers (or tidal tails) in external galaxies may also be integrated backwards through the same procedure. It will involve the deprojection of the stream and of the underlying halo. Observationally we have access to $\sigma(\mathbf{R}, t_0)$ the surface density of the streamer (or $\sigma(\mathbf{R}, v_r, t_0)$ if integral field spectroscopy is available), and $\Sigma(R)$ the projected surface density of the halo. Deprojection of Σ gives ρ and in turn $F(E)$ if the halo is assumed to be isotropic, stationary and spherical. The projected distribution reads in terms of the underlying a_n :

$$\sigma(\mathbf{R}, v_r) = \sum_{\mathbf{n}} \iint d\mathbf{v}_{\perp} dz \int^t d\tau f_{\mathbf{n}}(\mathbf{R}, z, v_r, \mathbf{v}_{\perp}, \tau - t) a_{\mathbf{n}}(\tau). \quad (87)$$

We may rewrite formally Eq. (87) as $\sigma = \mathbf{A}^{\sigma} \cdot \mathbf{a}$ where $\sigma_i \triangleq \sigma(\mathbf{R}_i, v_{r,i})$, so that the left-hand side corresponds to a cube of data. Recall once again the dot product correspond to both a summation over \mathbf{n} and an integration over time. Eq. (87) then reads in terms of \mathbf{b} and \mathbf{c} (via Eq. (17)):

$$\sigma = \mathbf{A}^{\sigma} \cdot \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}),$$

Following exactly the same route as Section 5.4.1, we may invert (linearly or non linearly) this equation for \mathbf{b} and \mathbf{c} given some prior on the smoothness of \mathbf{b} and compactness of \mathbf{c} . Such a procedure could be applied to, say, the M31 stream or the antenna galaxy.

In contrast to the Galactic inverse problem, it will in principle be possible to reproduce the inversion process on a statistical set of halos, which would allow us to compare directly to the predicted statistical properties of the \mathbf{b} and the \mathbf{c} (though clearly the bias introduced by the penalised inversion would have to be accounted for).

This completes our rapid survey of possible applications for the perturbative treatment of the dynamics of an open halo.

6 CONCLUSION

In the last few years, with the observational convergence towards the concordant cosmological model ($\Omega_{\Lambda} = 0.7$, $\sigma_8 = 0.9$ etc...), a significant fraction of the interest has shifted towards smaller scales. Indeed it now becomes possible to project down to these scales some of the predictions of the model. This in turn offers the prospect of transposing there what has certainly been a key asset of modern cosmology, both observationally and theoretically: statistics. This is a requirement both from the point of view of the (often understated) variety of objects falling onto an L_{\star} galaxy, but also because of the sheer size of the configuration space for infall. It is also a requirement from the point of view of the non-linear dynamics within the dark matter halo in order to account for the relative time ordering of accretion events. Because of the continuous infall, halos are typically not in fully phase mixed equilibria, and the resulting fluctuation spectrum may seed or excite the observed properties of galaxies.

In this paper, we aimed at constructing a self-consistent description of dynamical issues for dark matter halos embedded in a moderately active cosmic environment. It relied entirely on the assumption that the statistics of the infall is well characterized, as described in Aubert & Pichon (2005a,b), and that the mass of the infalling material (or to a lesser extent that of the fly-by) should be small compared to the mass of the halo. It also assumed that the halo was spherical and static or evolving adiabatically (Section 4). The emphasis was on the theoretical framework, rather than the details of the actual implementation. In other words, we aimed at describing a self-consistent setting which allows us to propagate the cosmological environment into the core of galactic halos.

In Section 2, we derived the dynamical equations governing the linear evolution of the induced perturbation by direct infall or tidal excitation of a spherically symmetric (integrable) stationary dark matter halo. The simplified geometry

of the initial state allowed us to focus on the specificities of an open system. Specifically, we revisited the influence of the external perturbations on the spherical halo, and extended the results of the literature by considering an advection term in the Boltzmann equation. This approach was compared to the classical Green solution in Appendix A. Note that both the intrinsic properties of the halo, via the distribution function, F (Eq. (15)), and the environment, via (s^e, ψ^e) (Eq. (16)), of the the infall and the tidal distortion were accounted for. Clearly the subclass of problems corresponding to tidal perturbations only will turn out to be easier to implement at first. Appendix B presents the details of the angle action variables on the sphere together with an explicit expression for the kernel, \mathbf{K} .

In Section 3, we derived the non-linear response of the galactic halo to second-order (Eq. (43)) in the perturbation (and to order n in Appendix D together with the corresponding N -point correlation function) to account for tidal stripping and dynamical friction. The dynamics was “solved” iteratively, in the spirit of the successful approach initiated in cosmology by Fry (1984) and considerably extended by Bernardeau (1992). In particular we presented and illustrated a set of diagrams (Fig. (3), (D1)), each corresponding to the contribution of the perturbation expansion. Though the actual implementation of the non-linear theory is going to be CPU intensive, we argue that it will improve our understanding of the competing dynamical processes within a galactic halo. In particular, we discussed how this non-linear theory provides the setting in which substructure evolution (and destruction) will have to be carried, in order to account for e.g. tidal stripping.

In Section 4 we presented the Fokker Planck equation governing the quasilinear evolution of the mean profile of the ensemble average halo embedded in its cosmic environment. Specifically we showed how the infall, drift and diffusion coefficients (Eqs. (C13)-(C15)) are related to the two-point correlation of the tidal field, and incoming fluxes. Appendix C gave a derivation of this equation from first principle, while in the main text, we focussed on the bibliographic context and possible applications. The key physical ingredient behind this secular evolution theory was the stochastic fluctuation caused by the incoming cosmic substructures. The key technical assumption was that the two time scales corresponding to the relaxation processes and the dynamical evolution decouple. Hence we could assume a hierarchy in time so that the distribution function is constant in time when computing the polarization.

Finally, in Section 5 we considered in turn a few classical probes of the large-scale structures which had been used in the past to constrain the main cosmological parameters and the initial power spectrum, which we transposed to the galactocentric context. Note that these are built upon observables, hence they may be used to constrain the boundary powerspectrum of the $a_{\mathbf{n}}$. Since Eq. (64), (70), (E1), and (E10) involve different combinations of $\langle a_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}'} \rangle$, they will constrain them at different scales with different biases, which should ultimately allow us to better characterize the power spectrum. This situation is the direct analogue of the cosmic situation, where the different tracers (weak lensing, Ly- α forest, CMB etc.), constrain different scales of the cosmological power spectrum (with different biases). Note also that our knowledge of the statistical properties of the boundary (via

the b_n and c_n coefficients) together with some assumptions on the equilibrium F_0 allows us to generate given realizations of the a_n as shown in [Aubert & Pichon \(2005a\)](#) and therefore virtual observables for any of these data sets, for the purpose of *e.g.* validating inverse methods. We investigated the consequences of the infall down to galactic scales and showed how it could be used to account for the observed distribution of disk properties (spiral winding, warps *etc.*). We demonstrated how the analytical model (both linear and non-linear) are quite useful when attempting to “invert” the observations for the past accretion history a given galaxy.

Again let us emphasize that Eq. (17) and its non-linear generalization (D3) and (C7) yield in principle the detailed knowledge of the full distribution (inside R_{200}) at later times. Hence we should be in a position to weigh the relative importance of the environment (via s^e and ψ^e) against the inner properties of the galaxy: the unperturbed distribution function of the halo, $F(I)$, (its level of anisotropy, the presence of a central cusp *etc.*) the disk, (its mass, its profile, its distribution function, $F(J)$ *etc.*).

The work presented here derives from the fact that it was realized that the biorthogonal projection pioneered by [Kalnajs \(1976\)](#) could be applied order by order to the perturbative expansion of the dynamical equations. Yet this in turn required the knowledge of the relative phases involved in the perturbation, which involves characterizing the properties of the perturber. The characterization only made sense statistically in order to retain the generality of the approach of [Kalnajs \(1976\)](#). Hence the emphasis on statistics.

6.1 discussion & Prospects

Our purpose in this paper was to address in a statistically representative manner dynamical issues on galactic scales. We also advocated using perturbation theory in angle-actions in order to propagate this cosmic boundary inwards. As was demonstrated here, this task remains in many respects quite challenging.

One of the limitations of the above method is the reliance on numerous expansions combined to the special care required in their implementation. One could argue that this level of sophistication might not be justified in the light of the weakness of some of the assumptions. Indeed, we are limited to systems with spherical geometry whereas galaxies most likely come in a variety of shapes. We assumed here that the perturbation was relatively light, which excludes a fraction of cosmic event which might dominate the distribution of some of the observables.

Section 4.2, Section 5 and Appendix E presented a few possible applications for the framework described here and in [Aubert & Pichon \(2005a\)](#). These galactic probes would need to be further investigated, in particular in terms of observational and instrumental constraints. The biasing specific to each tracer should be accounted for. Our analysis of dynamical friction in the perturbative framework deserves a proper investigation. The second-order perturbation theory needs to be implemented in practice together with the diffusion coefficients of Section 4, following Section B. Similarly, the identification and evolution of substructures within the halo mentioned in Section 3.3.1 deserves more work. In [Aubert et al. \(2004\)](#), we showed that the accretion onto

L^* halos was anisotropic; the dynamical implication of this anisotropy will require some specific work in the future.

We will need to demonstrate against N-body simulations the relevance of perturbation theory for dynamical friction; in particular, we should explore the regime in which the second-order truncation is appropriate, and at what cost? Note that truncated perturbation theory implies that modes will ring forever. At some stage, one will therefore have to address the problem of energy dissipation.

Implementing a realistic treatment of the infalling gas will certainly be amongst the more serious challenges ahead of us. This is a requirement both from the point of view of the dynamics but also from the point of view of converting the above predictions into baryon-dependent observables. The description of the gas will require a proper treatment of the various cooling processes, which can be quite important on galactic scales. In particular, the thickening of galactic disks is most likely the result of a fine-tuning between destructive processes such as the tidal disruption of compact substructures on the one hand, and the adiabatic coplanar infall of cold gas within the disk. In fact, the nonlinear theory presented in Section 3 and Section 4 could be extended to the geometry of disks to account for the adiabatic polarization towards the plane of the disk.

Note that we assumed here that transients corresponding to the initial conditions where damped out so that the response of the system was directly proportional to the excitation. The underlying picture is that of a calmer past, which in fact is very much in contradiction with both our measurements and common knowledge on the more violent past accretion history of galaxies. Indeed, infalling subclumps will contribute via the external tidal potential at some earlier time, and the larger the lookback time, the relatively stronger the importance of the perturbation (since the intensity of infall is in fact an increasing function of lookback time). We are therefore facing a partially divergent boundary condition. Because of the characteristics of hierarchical clustering, the actual bootstrapping of the analytical framework is therefore challenging. This could be a problem in particular for non linear dynamics, where the coupling of transients may turn out to be as important as the driven response. The importance of these shortcomings will need to be addressed in the future.

Finally let us note that the theory described in Section 2, Section 3 and Section 4 describe perturbative solutions to the collisionless Boltzmann Poisson equation in angle action variables, and as such are not specific to the description of dark matter halos. It could straightforwardly be transposed to other situations or geometries provided the system remains integrable. As mentioned in Section 2.3, the stellar dynamics around a massive black hole would seem to be an obvious context in which this theory could be applied.

Let us close this paper by a summary of the pros and cons of the theory presented here.

Possible assets:

- fixed boundary: localized statistics;
- fluid description : no *a priori* assumption on the possibly time- dependent nature of the objects;
- non-linear treatment of the dynamics: proper account of

the self-gravity of incoming objects and statistical accounting of causality;

- dynamically-consistent statistically-representative treatment of the cosmic environment;
- customized description of resonant processes within the halo via angle action variables of universal profile;
- ability to construct one- and two-point statistics for a wide range of galactic observables.
- theoretical framework for dynamical inversion and secular evolution

Possible drawbacks:

- weak perturbation w.r.t. spherical stationary equilibrium: not representative of *e.g.* equal mass mergers;
- complex time dependent 5D boundary condition;
- *ad hoc* position of the boundary;
- no obvious truncation of two-entry perturbation theory;
- no account of baryonic processes;
- inconsistency in relative strength of merging events versus time;
- non-Gaussian environment probably untractable;
- finite temporal horizon given finite ℓ_{\max} ;
- no statistical accounting of linear instabilities.

Acknowledgments

We are grateful to S. Colombi, J. Devriendt, J. Heyvaerts, A. Kalnajs, J. Magorrian, D. Pogosyan, S. Prunet, A. Siebert, & E. Thiébaud, for useful comments and helpful suggestions. Support from the France-Australia PICS is gratefully acknowledged. DA thanks the Institute of Astronomy for their hospitality and funding from a Marie Curie studentship.

REFERENCES

Aoki S., Noguchi M., Iye M., 1979, *Astron. Soc. of Japan Publications*, 31, 737 68
Aubert D., Pichon C., 2005a, in prep. 68, 69, 70, 71, 76, 77, 78, 80, 81, 85, 86
Aubert D., Pichon C., 2005b, in prep. 68, 80, 85
Aubert D., Pichon C., Colombi S., 2004, *MNRAS*, 352, 376 69, 70, 71, 77, 80, 81, 86
Balescu R., 1963, *Statistical Mechanics of Charged Particles*. Wiley, New York 78, 89
Bernardeau F., 1992, *ApJ*, 392, 1 76, 85
Bernardeau F., Colombi S., Gaztañaga E., Scoccimarro R., 2002, *Phys. Rep.*, 367, 1 68
Bertin G., Pegoraro F., Rubini F., Vesperini E., 1994, *ApJ*, 434, 94 68
Binney J., 2004, *MNRAS*, 350, 939 68
Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p. 90
Bogolyubov N., Gurov K., 1947, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 17, 615 78, 89
Diemand J., Moore B., Stadel J., 2004, *MNRAS*, 353, 624 68
Earn D. J. D., Tremaine S., 1991, in *Dynamics of Disc Galaxies Exact Solutions for Hamiltonian Systems Using Integer Arithmetic*. pp 137–+ 68
Fillmore J. A., Goldreich P., 1984, *ApJ*, 281, 9 77

Fry J. N., 1984, *ApJ*, 279, 499 76, 85
Gilbert I. H., 1970, *ApJ*, 159, 239 78, 79, 89
Gill S. P. D., Knebe A., Gibson B. K., Dopita M. A., 2004, *MNRAS*, 351, 410 68
Howard S., Byrd G. G., 1990, *AJ*, 99, 1798 68
Ichimaru S., 1973, *Basic Principles of Plasma Physics: A Statistical Approach*. (Reading: Addison-Wesley) 88, 89
Jiang L., Binney J., 1999, *MNRAS*, 303, L7 68, 82
Kalnajs A. J., 1971, *ApJ*, 166, 275 69, 70
Kalnajs A. J., 1976, *ApJ*, 205, 745 68, 69, 86
Kalnajs A. J., 1977, *ApJ*, 212, 637 69
Klimontovich Y., 1967, *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*. (Cambridge: MIT Press) 89
Knebe A., Gill S. P. D., Gibson B. K., Lewis G. F., Ibata R. A., Dopita M. A., 2004, *ApJ*, 603, 7 68
López-Corredoira M., Betancort-Rijo J., Beckman J. E., 2002, *AAP*, 386, 169 68, 82
Langevin P., 1908, *Comptes Rendu*, 146, 530 79
Lenard A., 1961, *J. Math. Phys.*, 2, 682 78, 89
Ma C., Bertschinger E., 2004, *ApJ*, 612, 28 78, 79, 89, 90
Murali C., 1999, *ApJ*, 519, 580 68, 69, 89
Peacock J. A., 1999, *Cosmological physics. Cosmological physics*. Publisher: Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0521422701 81, 96
Peebles P. J. E., 1980, *The large-scale structure of the universe*. Research supported by the National Science Foundation. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1980. 435 p. 68
Pichon C., Cannon R. C., 1997, *MNRAS*, 291, 616 82
Pichon C., Siebert A., Bienaymé O., 2002, *MNRAS*, 329, 181 83, 84
Pichon C., Vergely J. L., Rollinde E., Colombi S., 2001, *MNRAS*, 326, 597 97
Power C., Navarro J. F., Jenkins A., Frenk C. S., White S. D. M., Springel V., Stadel J., Quinn T., 2003, *MNRAS*, 338, 14 67
Risken H., 1989, *The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications*. Springer Series in Synergetics, Berlin, New York: Springer, 1989, 2nd ed. 78, 79
Stoehr F., White S. D. M., Springel V., Tormen G., Yoshida N., 2003, *MNRAS*, 345, 1313 96
Toomre A., Toomre J., 1972, *ApJ*, 178, 623 68
Tremaine S., Weinberg M. D., 1984, *MNRAS*, 209, 729 68, 69
Vauterin P., Dejonghe H., 1996, *AAP*, 313, 465 68
Weinberg M. D., 1989, *MNRAS*, 239, 549 89
Weinberg M. D., 1993, *ApJ*, 410, 543 78, 89
Weinberg M. D., 1998a, *MNRAS*, 299, 499 82
Weinberg M. D., 1998b, *MNRAS*, 297, 101 68
Weinberg M. D., 2001a, *MNRAS*, 328, 321 78, 79, 89, 90
Weinberg M. D., 2001b, *MNRAS*, 328, 321 79, 80

APPENDIX A: LINEAR PROPAGATOR IN ACTION ANGLE

As mentioned in Section 2.4.1, it is useful to regard the open collision-less system as a segmentation of the source for the propagator (ie the Green function of the coupled Poisson Boltzmann equation), where one distinguishes two contributions for the initial distribution: the contribution at R_{200} with $v_r < 0$ (what we describe as the source term in Eq. (5)) and the contribution beyond R_{200} or at R_{200} with $v_r > 0$ (what we describe as the tidal field in the main text). In order to make this comparison, let us derive generally (without any reference to a boundary for now) the Green function satisfying the *linearized* Boltzmann Poisson equation. Let us call $G(\mathbf{w}, \mathbf{I}, t | \mathbf{w}', \mathbf{I}', t')$ this Green function; it obeys:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_{\mathbf{w}} G + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot \nabla_{\mathbf{w}} \int \frac{d\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}|} d\mathbf{v}'' G(\mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t | \mathbf{w}', \mathbf{I}', t') = \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{w} - \mathbf{w}') \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{I} - \mathbf{I}') \delta_{\mathbf{D}}(t - t'), \quad (\text{A1})$$

so that the distribution function at $(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$ reads

$$f(\mathbf{w}, \mathbf{I}, t) = \int dt' \int d\mathbf{w}' \int d\mathbf{I}' G(\mathbf{w}, \mathbf{I}, t | \mathbf{w}', \mathbf{I}', t') f(\mathbf{w}', \mathbf{I}', t'). \quad (\text{A2})$$

Let us define the linear propagator, $U_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w}_0}(\mathbf{I} | \mathbf{I}')$, as:

$$U_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w}_0}(\mathbf{I} | \mathbf{I}') = \frac{\delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{I} - \mathbf{I}')}{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega} - \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot \mathbf{k} \frac{\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I})}{(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega)} \left((1 - \hat{\mathbf{K}}[\omega])^{-1} \right)_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\psi_{\mathbf{k}'}^{[\mathbf{n}']}(\mathbf{I}')}{(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}' - \omega)} \exp(i\mathbf{w}_0 \cdot [\mathbf{k} - \mathbf{k}']), \quad (\text{A3})$$

so that the distribution function, $f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$, at time t , with action \mathbf{I} and angles \mathbf{w} induced by the propagation of the distribution at earlier time t' , with action \mathbf{I}' , and angles \mathbf{w}' reads

$$f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) = \int dt' \int d\mathbf{I}' \int d\mathbf{w}' \sum_{\mathbf{k}} \int d\omega \exp(i\omega[t - t'] - i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{w} - \mathbf{w}']) U_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w}_0}(\mathbf{I} | \mathbf{I}') f(\mathbf{I}', \mathbf{w}', t'). \quad (\text{A4})$$

It is interesting to contrast Eq. (A3) to the propagator found by Ichimaru (1973) for the uniform plasma. In particular, the gradient of the density profile breaks the stationarity in $\mathbf{w} - \mathbf{w}_0$ of the propagator, Eq. (A3). Note also that the first term on the r.h.s. of Eq. (A3) corresponds to free streaming inside the halo (*i.e.* dark matter particles describing their unperturbed orbits), and reads in real space

$$G_{\text{free}}(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t | \mathbf{I}', \mathbf{w}', t') = \sum_{\mathbf{k}} \int d\omega \exp(i\omega[t - t'] - i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{w} - \mathbf{w}']) \frac{\delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{I} - \mathbf{I}')}{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega} = \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{I} - \mathbf{I}') \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{w} - \mathbf{w}' - \boldsymbol{\omega}[t - t']),$$

while the second term in Eq. (A4) corresponds to the self-gravitating polarization of the halo induced by the perturbation. Note that since the field dynamical equation is solved with a right-hand side (*i.e.* a source breaking the mass conservation in phase space), Liouville's theorem is not obeyed anymore: a new fluid is injected into the halo. We may now assume that in Eq. (A2), $f(\mathbf{I}', \mathbf{w}', t') = f(\mathbf{w}', \mathbf{I}', t')$ is split in two: one contribution from dark matter particles exiting R_{200} or beyond R_{200} ; another contribution describing particles on R_{200} with negative radial velocity. The former component may then be resumed over the corresponding region of phase space with a $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ weight, and yields ψ^e . The latter corresponds to $s^e(t')$.

APPENDIX B: IMPLEMENTATION

Let us describe in this appendix in greater details how Section 2 and Section 3 are implemented in practice, while focussing here on a simple isotropic halo (*i.e.* $F(\mathbf{I}) = F(E)$, where $E = v^2/2 + \Psi(r)$ is the energy, and $\Psi(r)$ the unperturbed potential). We will show here how to compute the operator, \mathbf{K} , (defined by Eq. (15)) and elements of \mathbf{Q} (defined by Eq. (16)), for the corresponding basis. Similarly, we could compute the non-linear coefficients, $\llbracket \rrbracket$ entering Eq. (38). Note that the three-dimensional nature of galactic halo makes the implementation slightly more complicated than one would think at first sight. The assumption that the halo is spherical allow us to assume that the equilibrium is integrable. Hence the action space is effectively at most two-dimensional, but configuration space remains three-dimensional (though one angle is mute). In practice, this implies that integration over action space, occurring in *e.g.* Eq. (40) is effectively two-dimensional. On the other hand, the sum over \mathbf{k} involves three indices, each corresponding to a degree of freedom.

Let us define I_1 as the radial action, $I_2 \triangleq L$ as the total angular momentum and $I_3 \triangleq L_z$ as the z-component of the angular momentum, so that

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{r_p}^{r_a} dr \sqrt{2[E - \Psi(r)] - I_2^2/r^2}.$$

Here r_a and r_p are respectively the apoapses and periapses of dark matter particles. This defines $\mathbf{I} \triangleq (I_1, I_2, I_3)$ introduced in Section 2.1. Similarly, Let us define the corresponding angles, $\mathbf{w} \triangleq (w_1, w_2, w_3)$ (see Fig. (1)) given by:

$$w_1 = \omega_1 \int_{r_p(\mathbf{I})}^r \frac{dr}{\sqrt{2[E - \Psi(r)] - I_2^2/r^2}}, \quad w_2(\mathbf{I}, w_1) = \chi - \int_{r_p(\mathbf{I})}^{r(\mathbf{I}, w_1)} \frac{dr(\omega_2 - I_2/r^2)}{\sqrt{2[E - \Psi(r)] - I_2^2/r^2}}, \quad w_3 = \phi - \text{asin}(\cot(\beta) \cot(\theta)), \quad (\text{B1})$$

where $\cos \beta = L_z/L$.

B1 Computing the linear response operator

Following very closely the notation of [Murali \(1999\)](#), let us introduce a bi-orthogonal basis constructed around spherical harmonics:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\ell mn} a_{\ell mn}(t) d_n^{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\mathbf{\Omega}), \quad \text{and} \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\ell mn} a_{\ell mn}(t) u_n^{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\mathbf{\Omega}), \quad (\text{B2})$$

for respectively the density and the potential. [Weinberg \(1989\)](#) suggests the following potential-density pair

$$u_n^{\ell m}(r) = -\frac{4\pi G \sqrt{2}}{\alpha_n |j_\ell(\alpha_n)|} R^{-1/2} j_\ell(\alpha_n r/R), \quad \text{and} \quad d_n^{\ell m}(r) = -\frac{\alpha_n \sqrt{2}}{|j_\ell(\alpha_n)|} R^{-5/2} j_\ell(\alpha_n r/R), \quad (\text{B3})$$

where j_ℓ stands for the spherical Bessel function and where α_n obeys the relation $\alpha_n j_{\ell-1/2}(\alpha_n) = 0$. Here R is the truncation radius of the basis. The action angle transform of the potential basis is given by :

$$W_{\mathbf{k}}^{\ell n}(\mathbf{I}) \triangleq \psi_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{I}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dw_1 \exp(-ik_1 w_1) u_n^{\ell k_3}(r) \exp[ik_2(\chi - w_2)], \quad (\text{B4})$$

We may now rewrite Eq. (15) as

$$K_{\mathbf{n}}^{\ell n'}(\tau - t) = -\delta_{\ell'}^{\ell} \delta_{m'}^m \frac{(2\pi)^3}{4\pi G} \iint dE \frac{LdL}{\omega_1} \frac{dF}{dE} \sum_{\mathbf{k}} C_{\ell k_2} i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \exp[i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t)] W_{\mathbf{k}}^{*\ell n'}(\mathbf{I}) \left[W_{\mathbf{k}}^{\ell n}(\mathbf{I}) + \frac{4\pi}{3} \delta_{\ell}^1 p_n^{\ell m} X_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}) \right], \quad (\text{B5})$$

where

$$p_n^{1m} = \int dr r^2 d_n^{1m}(r) \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (\text{B6})$$

and where

$$C_{\ell k_2} = \frac{2^{2k_2-1}}{\pi^2} \frac{(\ell - k_2)!}{(\ell + k_2)!} \frac{\Gamma^2[1/2(\ell + k_2 + 1)]}{\Gamma^2[1/2(\ell - k_2 + 1)]}, \quad \text{if } \ell + k_2 \text{ even, else } 0. \quad (\text{B7})$$

Here Γ is the standard Gamma function. Note that $X_{\mathbf{k}}(\mathbf{I})$ accounts for the fact that the response is computed in a non inertial referential frame. To take into account the barycentric drift of the halo, the perturbed Hamiltonian should include the induced inertial potential $\mathbf{a}_b \cdot \mathbf{r}$, where \mathbf{a}_b is the acceleration of the barycenter in the frame of the unperturbed halo. Its action-angle transform is given by :

$$X_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dw_1 \exp(-ik_1 w_1) r \exp[ik_2(\psi - w_2)]. \quad (\text{B8})$$

As can be seen from Eq. (B5), this inertial contribution is limited to the dipole component ($\ell = 1$) of the response : as expected, it is equivalent to a spatially homogeneous field force.⁸

APPENDIX C: SECULAR EVOLUTION WITH INFALL

Let us derive in this appendix the secular equation for the evolution of the ensemble average halo embedded in a typical cosmic environment (with infall and tidal field). This follows the pioneering work of [Weinberg \(2001a\)](#) and [Ma & Bertschinger \(2004\)](#). The settings in which they derive their coefficients differ: their starting point is the kinetic closure relation given by [Klimontovich \(1967\)](#), [Ichimaru \(1973\)](#), [Gilbert \(1970\)](#) who note that the Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY) hierarchy may be closed while assuming that the two-point correlation function will relax on a shorter dynamical time scale, whereas the one point distribution function evolves on a longer secular time scale⁹. Hence if one assumes that the distribution function F entering the linearized equation, Eq. (5), can be considered to be constant, then the second-order equation in the BBGKY hierarchy is automatically satisfied while the r.h.s. of the first equation is proportional to the propagated (via Eq. (A3)) excess correlation induced by the dressed clumps. This kinetic theory has been successfully applied in plasma physics, leading to the so called Lenard-Balescu ([Lenard \(1961\)](#), [Balescu \(1963\)](#)) collision term, and was also transposed by [Weinberg \(1993\)](#) for a multiperiodic "stellar" system.

Note that the BBGKY hierarchy is a $1/N$ expansion, where N is the number of particles in the system. Formally it would make sense here to identify N as a measure of the clumpiness of the medium, but this definition is qualitative only. We rely here on the same time ordering hierarchy, but the degree of clumpiness in the system is explicitly imposed by the boundary condition. In this appendix, the derivation is carried from first principles, while relying on an explicit infall and tidal field.

⁸ Technically speaking, the $\delta_{\ell 1}$ dependence arise from the fact that \mathbf{r} is expressed as a function of $Y_{1m}(\mathbf{\Omega})$ spherical harmonics.

⁹ This time ordering is originally due to [Bogolyubov & Gurov \(1947\)](#)

C1 Quasi linear equations in angle action variables

The collisionless Boltzmann equation of an open system may be written as:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = S^e + s^e, \quad \text{with} \quad H = \frac{v^2}{2} + \Psi(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t, T), \quad (\text{C1})$$

where F is defined by

$$F(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t, T) = F(\mathbf{I}, T) + f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t), \quad \text{and} \quad \Psi(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t, T) = \Psi_0(\mathbf{I}, T) + \psi(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) + \psi^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t), \quad (\text{C2})$$

with F describing the secular evolution of the DF and f describing the fluctuations of the DF over this secular evolution. In Eq. (C1), the r.h.s. stands for the incoming infall, both fluctuating ($s^e[\mathbf{I}, \mathbf{w}, t]$) and secular ($S^e(\mathbf{I}, T)$). Since this system evolves secularly because of its environment, these actions are not conserved. The last two term on the r.h.s. of Eq. (C2) represents the fluctuating component tracing the motions of clumps within the environment of the halo¹⁰. Note that since $F(\mathbf{I}, T)$ is assumed to depend here only on the action, it represents a coarse-grained distribution function (averaged over the angles) for which we make no attempt to specify where each star is along its orbit nor how oriented the orbit is. Note also that the canonical variables \mathbf{I} and \mathbf{w} are the actions and the angles of the *initial* system. Developing the collisionless Boltzmann equation, Eq. (C1), over the secular and the fluctuating expansion leads to:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \right) - \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{w}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \right) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{I}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} = S^e + s^e. \quad (\text{C3})$$

This equation involves two time scales, t and T . On the fluctuation time scale, t , secular quantities can be described as static, leaving only the linearised open collisionless Boltzmann equation (Eq. (5)):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{w}} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} = s^e, \quad (\text{C4})$$

where the amplitude of f is of first-order compared to F and involves only the fluctuating part of the external forcing, $s^e(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t)$. On a longer time scale, T , the Boltzmann equation, Eq. (C3) can be T -averaged, considering that the average of fluctuations are zero on such time scales. This leads to a second equation:

$$\frac{\partial \langle F \rangle}{\partial T} = \left\langle \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{w}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \right\rangle_T - \left\langle \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{I}} + \frac{\partial \psi^e}{\partial \mathbf{I}} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right\rangle_T + \langle S^e \rangle_T. \quad (\text{C5})$$

The brackets denotes averaging over a time longer than the typical time scale of fluctuations:

$$\langle Y \rangle_T \triangleq 1/\Delta T \int_{T-\Delta T/2}^{T+\Delta T/2} dt Y(t).$$

The time interval, ΔT , should be chosen so that a given dark matter particle describing its orbit will encounter a few times the incoming clump at various phases along its orbit. Because the incoming clump is subject to dynamical friction, the resonance will only last so long, and induce a finite but small kick, $\Delta \mathbf{I}$ during ΔT . Because the infall displays some degree of temporal and spatial coherence, we may not assume that the successive kicks are uncorrelated, in contrast to the situation presented by Weinberg (2001a), Ma & Bertschinger (2004) or the classical image described in Brownian motion. In other words, when we write an effective microscopic Langevin counterpart to the corresponding Fokker Planck equation, it will involve a coloured 3D random variable (see Eq. (59)).

Derivative and averaging may be exchanged considering that F and Ψ evolve slowly with respect to time. Terms involving the product of two first-order quantities survive to the time averaging because we cannot presume that the response in distribution function and potential within R_{200} are uncorrelated. In order to evaluate those quadratic terms, we may integrate Eq. (C4), while assuming that $F(\mathbf{I}, T)$ is effectively constant w.r.t. time t . The solution, Eq. (6), may then be reinjected into the quadratic terms in Eq. (C5) so that they involves terms such as

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{w}} = & - \left(\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{w}} \psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{I}, t) \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \omega(\tau-t)} \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{I}, \tau) \mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_2 \right) : \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{I}^2} - \\ & \left(\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{w}} \mathbf{k}_1 \psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{I}, t) \mathbf{k}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \omega(\tau-t)} \psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{I}, \tau) \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}}. \end{aligned} \quad (\text{C6})$$

where we may factor the action derivative of $F(\mathbf{I}, T)$ out of the τ -time integral because the secular distribution is assumed to be constant over a few dynamical times. Since the l.h.s. of Eq. (C5) does not depend on \mathbf{w} , we may average its r.h.s. over $d\mathbf{w}$. This implies that in Eq. (C6), only the $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ terms remain. We rely effectively on the averaging theorem (Binney & Tremaine (1987)) to convert orbit averages into angle average. The corresponding evolution equation hence depends on the actions only, as expected. Note that in doing so, we assume that no other resonances matter. The secular equation, Eq. (C5), becomes finally after some similar algebra for the other contributions.¹¹

¹⁰ We neglect here the secular drift of the external potential which should slowly shift the frequencies, ω in Eq. (C3)

¹¹ note that when $S^e = s^e = 0$ this equation is conservative by construction.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \langle D_0(\mathbf{I}) \rangle - \langle \mathbf{D}_1(\mathbf{I}) \rangle \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} - \langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}) \rangle : \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{I}^2}, \quad (\text{C7})$$

where

$$\langle D_0(\mathbf{I}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle S_e \rangle_T d\mathbf{w} + \left\langle \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left([\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\mathbf{I}, t)] \int_{-\infty}^t e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}(\tau-t)} s_e(\mathbf{k}, \mathbf{I}, \tau) d\tau \right) \right\rangle_T, \quad (\text{C8})$$

while the drift coefficient, \mathbf{D}_1 , obeys

$$\langle \mathbf{D}_1(\mathbf{I}) \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left([\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\mathbf{I}, t)] \int_{-\infty}^t e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{I}(\tau-t)} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] d\tau \right) \right\rangle_T, \quad (\text{C9})$$

and the diffusion coefficient, \mathbf{D}_2 , is given by

$$\langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}) \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} [\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) + \psi_{\mathbf{k}}^{e*}(\mathbf{I}, t)] \int_{-\infty}^t e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{I}(\tau-t)} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] d\tau \right\rangle_T. \quad (\text{C10})$$

Note that the infall coefficient, D_0 , includes both the secular infall, and a contribution arising from the possible correlation between the fluctuating tidal field and the fluctuating infall. It may be an explicit function of time, T , reflecting the fact that, as more mass is accreted, the profile of dark matter changes with time. The coefficients D_0 , \mathbf{D}_1 and \mathbf{D}_2 are also an implicit function of time because of the time average, $\langle \rangle_T$ and via the secular distribution function, $F(\mathbf{I}, T)$ which occurs in $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t)$ through Eq. (17). Clearly, if the potential, and/or the source term are completely decorelated in time, so that $\langle \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, \tau) \rangle_T \propto \delta_D(t - \tau)$ and $\langle \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{I}, t) s_e^*(\mathbf{I}, \tau) \rangle_T \propto \delta_D(t - \tau)$, Eq. (C10) or (C9) would vanish. Provided ΔT is long compared to the typical correlation time of the potential (and/or the source term), we may take the limit $t \rightarrow \infty$ in the integrals entering Eqs. (C8)-(C10). Note finally that Eq. (C7) does not derive from a kinetic theory in the classical sense, in that it does not rely on a diffusion process in velocity space induced by the discrete number of particles in the system.

C2 Linking the infall, drift and diffusion to the cosmic two-point correlations

Up to this point we investigated the secular evolution of a given (phase averaged) halo, undergoing a given inflow and tidal field accretion history. Let us now invoke ergodicity so as to replace temporal averages by ensemble averages in Eqs. (C8)-(C10). In doing so, we now try and describe a *mean* galactic halo embedded in the typical environment presenting the most likely correlations. This involves replacing $\langle \rangle_T$ with $\langle \rangle \triangleq E\{ \}$. Let us use Eq. (9) to expand Eq. (C10). This yields:

$$\langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}, T) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle a_{\mathbf{n}'}^*(t) a_{\mathbf{n}}(\tau) \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}(\tau-t)} d\tau \right) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}']*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}), \quad (\text{C11})$$

where $a_{\mathbf{n}}(t) \triangleq a_{\mathbf{n}}(t) + b_{\mathbf{n}}(t)$ corresponds to the coefficient of the total (self-consistent plus external) potential. If the first-order perturbations are stationary, let us write the two-point cross-correlation of the temporal fields, $\langle a_{\mathbf{n}}(t), a_{\mathbf{n}'}(\tau) \rangle$ as $C[a_{\mathbf{n}}, a_{\mathbf{n}'}](t - \tau)$ so that the integral in Eq. (C11) may be carried as (assuming parity for the correlation function):

$$\int_0^{\infty} C[a_{\mathbf{n}}, a_{\mathbf{n}'}](\Delta\tau) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}\Delta\tau} d\Delta\tau = P_a^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}], \quad (\text{C12})$$

giving the temporal power spectrum evaluated at the temporal frequency, $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Consequently, the diffusion coefficient becomes:

$$\langle \mathbf{D}_2(\mathbf{I}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}']*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) P_a^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \quad (\text{C13})$$

The same procedure may be applied to the other coefficient:

$$\langle \mathbf{D}_1(\mathbf{I}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left(\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}']*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) P_a^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}] \right), \quad (\text{C14})$$

while, for the secular correlation, Eq. (C8):

$$\langle D_0(\mathbf{I}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle S_e \rangle_T d\mathbf{w} + \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \left(\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}']*}(\mathbf{I}) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}], e}(\mathbf{I}) P_{ac}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}] \right), \quad (\text{C15})$$

where $P_{ac}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\boldsymbol{\omega}]$ is the mixed power spectrum given by $\langle \hat{a}_{\mathbf{n}}^* \hat{c}_{\mathbf{n}} \rangle = \langle [\hat{a}_{\mathbf{n}}^* + \hat{b}_{\mathbf{n}}^*] \hat{c}_{\mathbf{n}} \rangle$. Hence

$$P_{ac}^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}] = \left((\hat{A}_b + 1) \times (1) \cdot \langle \hat{\mathbf{b}}^* \otimes \hat{\mathbf{c}} \rangle + \hat{A}_c \times (1) \cdot \langle \hat{\mathbf{c}}^* \otimes \hat{\mathbf{c}} \rangle \right) [\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \quad (\text{C16})$$

Recall also that (given Eq. (18) and Eq. (48))

$$P_a^{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}] = \left((\hat{A}_b + 1) \times (\hat{A}_b^* + 1) \cdot \langle \hat{\mathbf{b}} \otimes \hat{\mathbf{b}}^* \rangle + \hat{A}_c \times \hat{A}_c^* \cdot \langle \hat{\mathbf{c}} \otimes \hat{\mathbf{c}}^* \rangle + (\hat{A}_b + 1) \times \hat{A}_c^* \cdot \langle \hat{\mathbf{b}} \otimes \hat{\mathbf{c}}^* \rangle + \hat{A}_c \times (\hat{A}_b^* + 1) \cdot \langle \hat{\mathbf{c}} \otimes \hat{\mathbf{b}}^* \rangle \right) [\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \quad (\text{C17})$$

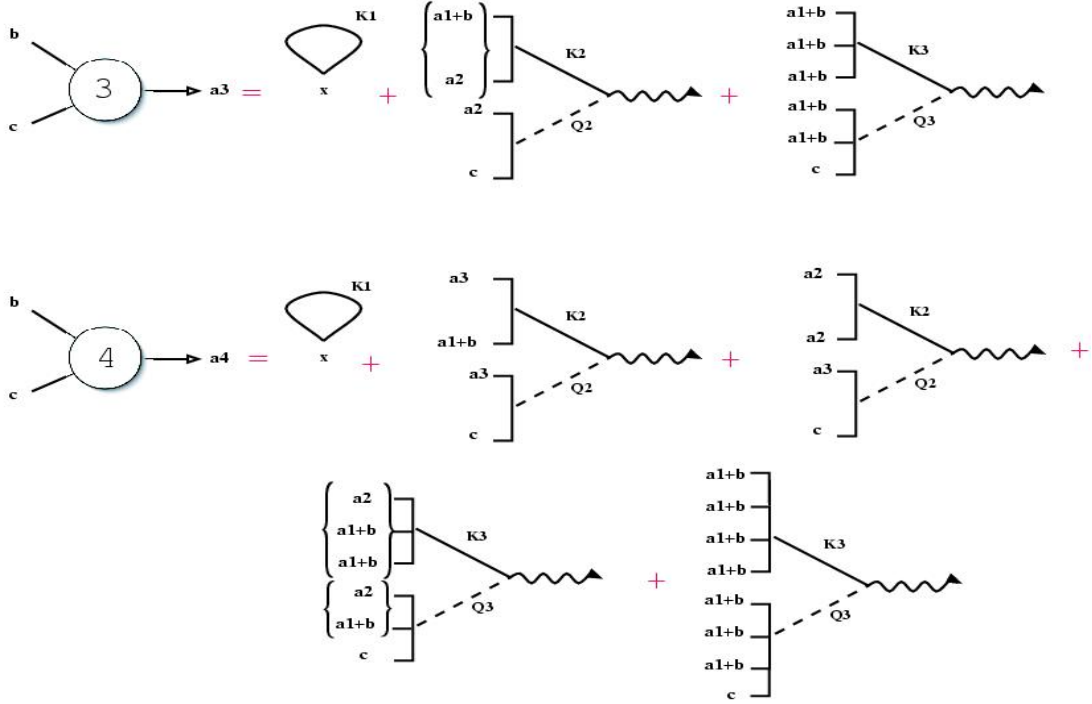


Figure D1. diagrammatic representation of the expansion to third (*top diagram*, corresponding to Eq. (D5)) and fourth (*bottom diagram*, given Eq. (D6)) order; again (see Fig. (3) for details) the coupling of the tidal interaction (through the b_n coefficients) and the incoming infall (expanded over the c_n coefficients) yields the coefficient of the response inside R_{200} . The coupling is achieved via the operator K_i and Q_i as explained in Fig. (4); the curly brace in front of the diagrams account for the number of such diagrams entering the expansion, corresponding to the permutation of the input (recalling that the order matters). Note also for each branch the sum of the order of the sub branch correspond to the order of the expansion.

where A_b and A_c involve \mathbf{K} and therefore the secular distribution function, F , via Eq. (15). Recall that A_b and A_c involve $(1 - \hat{\mathbf{K}})^{-1}$, which reflects the fact that the perturbation is dressed by the self-gravity of the halo. Eq. (C7), together with Eqs. (C13)-(C14) and Eq. (C17) provides a consistent framework in which to evolve secularly the mean distribution of a galactic halo within its cosmic environment. Note that it is possible via Eq. (50) to apply non-linear corrections to the induced correlation within R_{200} .

APPENDIX D: PERTURBATION THEORY TO HIGHER ORDER

D1 Perturbative dynamical equations

In this section, we “solve” the dynamical equation to order n , which will allow us in the next section to present the N -point correlation to order n .

D1.1 Perturbation theory to all orders

Recall that for $n \geq 2$, $f_{\mathbf{k}}^{(n)}(\mathbf{I}, t)$ obeys Eq. (33). Given Eq. (14) it follows that

$$a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) = \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \int d\tau \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau - t]) [a_{\mathbf{q}}^{(n)}(\tau) + \delta_1^n b_{\mathbf{q}}(\tau)] \left([2\pi]^3 \int d\mathbf{I} \psi_{\mathbf{k}}^{[n]}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*}(\mathbf{I}) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \int d\tau \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau - t]) [a_{\mathbf{q}}^{(k)}(\tau) + \delta_1^k b_{\mathbf{q}}(\tau)] \left([2\pi]^3 \int d\mathbf{I} \left\{ \psi_{\mathbf{q}}^{[q]}(\mathbf{w}, \mathbf{I}), f^{(n-k)}(\mathbf{w}, \mathbf{I}, t) \right\}_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^{[p]*}(\mathbf{I}) \right), \quad (\text{D1})$$

where the first term in Eq. (D1) corresponds to the usual self-gravity coupling at order n , and the sum corresponds to the feed of lower order potential coupling into the n^{th} order equation. Here $f_{\mathbf{k}}^{(n)}(\mathbf{I}, t)$ obeys

$$f_{\mathbf{k}}^{(n)}(\mathbf{I}, t) = \sum_{\mathbf{q}} \int d\tau \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau - t]) \times \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k} \psi_{\mathbf{k}}^{[q]} [a_{\mathbf{q}}^{(n)}(\tau) + \delta_1^n b_{\mathbf{q}}(\tau)] + \sum_{k=1}^{n-1} [a_{\mathbf{q}}^{(k)}(\tau) + \delta_1^k b_{\mathbf{q}}(\tau)] \{ f^{(n-k)}, \psi_{\mathbf{k}}^{[q]} \}_{\mathbf{k}} \right] +$$

$$\sum_{\mathbf{q}} \int d\tau \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau - t]) c_{\mathbf{q}}(\tau) \delta_{\mathbf{n}}^1 \sigma_{\mathbf{k}}^{e, [\mathbf{q}]} . \quad (\text{D2})$$

Note that the response in Eq. (D2) is as expected out of phase with respect to the potential excitation, $a_{\mathbf{n}}(\tau)$ because of inertia (hence the modulation in $\exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t))$). Now, to n^{th} order Eq. (D1), (D2) may be rewritten formally as (using the contraction rule Eq. (45)):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(n)} = & \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{a}^{(n)} + \mathbf{K}_2 \cdot \left(\sum_{i_1+i_2=n} [\mathbf{a}^{(i_1)} + \delta_{i_1}^1 \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(i_2)} + \delta_{i_2}^1 \mathbf{b}] \right) + \dots + \mathbf{K}_j \cdot \left(\sum_{i_1+\dots+i_j=n} \bigotimes_j [\mathbf{a}^{(i_1)} + \delta_{i_1}^1 \mathbf{b}] \right) \dots + \mathbf{K}_n \cdot \bigotimes_n [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] + \\ & \mathbf{Q}_2 \cdot (\mathbf{a}^{(n-1)} \otimes \mathbf{c}) + \dots + \mathbf{Q}_j \cdot \left(\sum_{i_1+\dots+i_j=n-1} \left[\bigotimes [\mathbf{a}^{(i_1)} + \delta_{i_1}^1 \mathbf{b}] \right] \otimes \mathbf{c} \right) + \dots + \mathbf{Q}_n \cdot \left[\bigotimes_{n-1} [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \right] \otimes \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (\text{D3})$$

where the Kernels \mathbf{K}_1 and \mathbf{K}_2 are given by Eqs. (40)-(41), while $\mathbf{K}_n, n \geq 2$ obey formally:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_n)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n} [\tau_1 - t, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}] = & [2\pi]^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_1 - t]) \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \llbracket \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_2 - \tau_1]) \dots \times \\ & \sum_{\mathbf{k}_{2n-1} + \mathbf{k}_{2n} = \mathbf{k}_n} \left\llbracket \exp(i\mathbf{k}_{2n-3} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau_n - \tau_{n-1}]) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k}_{2n-3} \psi_{\mathbf{k}_{2n-3}}^{[\mathbf{q}_n]}, \psi_{\mathbf{k}_{2n-2}}^{[\mathbf{q}_{n-1}]} \right\rrbracket \dots, \psi_{\mathbf{k}_4}^{[\mathbf{q}_2]} \right\rrbracket, \psi_{\mathbf{k}_2}^{[\mathbf{q}_1]} \right\rrbracket \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}. \end{aligned} \quad (\text{D4})$$

Note that the n^{th} order Kernel involves “only” one integral over action space, but n coupling in configuration space and $n+1$ time ordered instants $(t, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Note also that Eq. (D1) implies that secular perturbation theory accounts for both the rate of change in frequency of the system, via $\partial^n \boldsymbol{\omega} / \partial \mathbf{I}^n$, the rate of change in equilibrium via $\partial^n F / \partial \mathbf{I}^n$ but also the rate of change in the incoming flow via $\partial^n \sigma^{[\mathbf{p}]} / \partial \mathbf{I}^n$. Note also that the relative phases (causality) are accounted for via the ordered time integrals. For instance Eq. (D3) reads to third order:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(3)} = & \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{a}^{(3)} + \mathbf{K}_2 \cdot \left([\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{a}^{(2)} + \mathbf{a}^{(2)} \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \right) + \\ & \mathbf{K}_3 \cdot \left([\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \right) + \mathbf{Q}_3 \cdot \left([\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{c} \right) + \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{a}^{(2)} \otimes \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (\text{D5})$$

and is illustrated in Fig. (D1) together with $\mathbf{a}^{(4)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(4)} = & \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{a}^{(4)} + \mathbf{K}_2 \cdot \left(\mathbf{a}^{(3)} \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] + [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{a}^{(3)} + \mathbf{a}^{(2)} \otimes \mathbf{a}^{(2)} \right) + \\ & \mathbf{K}_3 \cdot \left(\mathbf{a}^{(2)} \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] + [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{a}^{(2)} \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] + [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{a}^{(2)} \right) + \\ & \mathbf{K}_4 \cdot [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] + \\ & \mathbf{Q}_2 \cdot (\mathbf{a}^{(3)} \otimes \mathbf{c}) + \mathbf{Q}_3 \cdot (\mathbf{a}^{(2)} \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{c} + [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{a}^{(2)} \otimes \mathbf{c}) + \mathbf{Q}_4 \cdot [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes [\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}] \otimes \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (\text{D6})$$

Note that Eq. (D6) depends recursively on Eq. (D5) and both depends recursively on Eq. (43) and (42). When the recursion is carried through, (see Fig. (4)) the expected relative complexity of the non-linear evolution appears clearly.

D1.2 Reordering to higher order

In the main text, we give in Eq. (52) and above the first- and second-order reshuffling of the perturbation in \mathbf{b} and \mathbf{c} . Similarly, the third-order term reads in terms of products of \mathbf{b} and \mathbf{c} as

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(3)} = & A_{bbb} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + A_{ccc} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + A_{bbc} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + A_{ccb} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} + \\ & A_{bcb} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} + A_{cbb} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + A_{bcc} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + A_{cbc} \cdot \mathbf{c} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \end{aligned}$$

where (following the same convention as in the main text for the brackets)

$$\begin{aligned} A_{bbb} &= \mathbf{K}_3' \circ \mathbf{K}_1'' + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_2' \circ \mathbf{K}_1''] + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_2' \circ \mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_1''], \\ A_{ccc} &= \mathbf{K}_3' \circ \mathbf{Q}_1' + \mathbf{K}_2' \circ \{ [\mathbf{Q}_1', \mathbf{K}_2' \circ \mathbf{Q}_1' + \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{Q}_1', 1]] + [\mathbf{K}_2' \circ \mathbf{Q}_1' + \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{Q}_1', 1], \mathbf{Q}_1'] \} + \mathbf{Q}_3' \circ [\mathbf{Q}_1', \mathbf{Q}_1', 1] + \\ & \quad \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{K}_2' \circ \mathbf{Q}_1' + \mathbf{Q}_2' \circ \mathbf{Q}_1', 1, 1], \\ A_{bbc} &= \mathbf{K}_3' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_1'', \mathbf{Q}_1'] + \mathbf{Q}_3' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_1'', 1] + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{Q}_1'] + \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', 1]], \\ A_{bcb} &= \mathbf{K}_3' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{Q}_1', \mathbf{K}_1''] + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{Q}_1'] + \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', 1], \mathbf{K}_1''], \\ A_{ccb} &= \mathbf{K}_3' \circ [\mathbf{Q}_1', \mathbf{Q}_1', \mathbf{K}_1''] + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{Q}_1', \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{Q}_1', \mathbf{K}_1'']], \\ A_{cbb} &= \mathbf{K}_3' \circ [\mathbf{Q}_1'', \mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_1''] + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{Q}_1', \mathbf{K}_2' \circ \mathbf{K}_1''], \\ A_{bcc} &= \mathbf{K}_3' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{Q}_1', \mathbf{Q}_1'] + \mathbf{Q}_3' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{Q}_1', 1] + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_2' \circ \mathbf{Q}_1' + \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{Q}_1', 1]] + \mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{K}_2' \circ \mathbf{Q}_1' + \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{Q}_1', 1]] + \\ & \quad \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{K}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', \mathbf{Q}_1'] + \mathbf{Q}_2' \circ [\mathbf{K}_1'', 1], 1], \end{aligned}$$

$$A_{cbc} = \mathbf{K}'_3 \circ [\mathbf{Q}'_1, \mathbf{K}'_1, \mathbf{Q}'_1] + \mathbf{Q}'_3 \circ [\mathbf{Q}'_1, \mathbf{K}'_1, \mathbf{1}] + \mathbf{K}'_2 \circ [\mathbf{K}'_2 \circ [\mathbf{Q}'_1, \mathbf{K}'_1], \mathbf{K}'_1] + \mathbf{K}'_2 \circ [\mathbf{Q}'_1, \mathbf{K}'_2 \circ [\mathbf{K}'_1, \mathbf{Q}'_1] + \mathbf{Q}'_2 \circ [\mathbf{K}'_1, \mathbf{1}]] + \mathbf{Q}'_2 \circ [\mathbf{K}'_2 \circ [\mathbf{Q}'_1, \mathbf{K}'_1], \mathbf{1}]. \quad (\text{D7})$$

Generically, after reordering, Eq. (52) becomes

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^{(n)}(t) &= \left(\sum_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n \in [\mathbf{b}, \mathbf{c}]} A_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n} \cdot (\mathbf{i}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_n) \right)_{\mathbf{p}}(t), \\ &= \sum_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n \in [\mathbf{b}, \mathbf{c}]} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{\tau_n-1} d\tau_n \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} [A_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n}]_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} (t - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}) [\mathbf{i}_1]_{\mathbf{q}_1}(\tau_1) \dots [\mathbf{i}_n]_{\mathbf{q}_n}(\tau_n), \end{aligned} \quad (\text{D8})$$

which involves 2^n terms. Here $[A_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n}]_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ is some linear tensor of order $n+1$ which returns the n^{th} order response to the excitation $b_i(\theta), c_j(\theta)$ at various times $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$. Note that it involve the equilibrium distribution function, F_0 and its derivatives with respect to the actions, \mathbf{I} , together with the properties of the basis function.

D2 The N-point correlation function

In the main text, we presented the calculation of the two-point correlation of the fields within the R_{200} sphere. More generally we are interested in the N-point correlation of, say, the density (at various times):

$$\begin{aligned} C_N &\triangleq \langle \rho(x_1) \rho(x_2) \dots \rho(x_N) \rangle = \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{p_1+p_2+\dots+p_N=n} \langle \rho^{(p_1)}(x_1) \rho^{(p_2)}(x_2) \dots \rho^{(p_N)}(x_N) \rangle, \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{p_1+p_2+\dots+p_N=n} \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N} \rho^{[\mathbf{q}_1]}(\mathbf{r}_1) \dots \rho^{[\mathbf{q}_N]}(\mathbf{r}_N) \langle a_{\mathbf{q}_1}^{(p_1)}(\tau_1) \dots a_{\mathbf{q}_N}^{(p_N)}(\tau_N) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D9})$$

Now, solutions to the n^{th} order perturbation theory are given by Eq. (D8). It follows that

$$\begin{aligned} \langle a_{\mathbf{q}_1}^{(p_1)}(\tau_1) \dots a_{\mathbf{q}_N}^{(p_N)}(\tau_N) \rangle &= \sum_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_{p_1} \in [\mathbf{b}, \mathbf{c}]} \dots \sum_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_{p_N} \in [\mathbf{b}, \mathbf{c}]} \sum_{\mathbf{q}_{1,1}, \dots, \mathbf{q}_{p_N, p_N}} \int d^{p_1} \theta [A_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_{p_1}}]_{\mathbf{q}_{1,1}, \dots, \mathbf{q}_{1, p_1}}(\tau_1, \theta_{1,1}, \dots, \theta_{1, p_1}) \dots \times \\ &\quad \int d^{p_N} \theta [A_{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_{p_N}}]_{\mathbf{q}_{p_N,1}, \dots, \mathbf{q}_{p_N, p_N}}(\tau_N, \theta_{p_N,1}, \dots, \theta_{p_N, p_N}) \times \\ &\quad \langle [\mathbf{i}_1]_{\mathbf{q}_{1,1}}(\theta_{1,1}) \dots [\mathbf{i}_{p_1}]_{\mathbf{q}_{1, p_1}}(\theta_{p_N,1}) \dots [\mathbf{i}_{p_N}]_{\mathbf{q}_{1, p_N}}(\theta_{1, p_N}) \dots [\mathbf{i}_{p_N}]_{\mathbf{q}_{p_N, p_N}}(\theta_{p_N, p_N}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D10})$$

If the perturbation is a centred Gaussian random field, Wick's theorem states that:

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{i}_1]_{\mathbf{q}_{1,1}}(\theta_{1,1}) \dots [\mathbf{i}_{p_1}]_{\mathbf{q}_{1, p_1}}(\theta_{p_N,1}) \dots [\mathbf{i}_{p_N}]_{\mathbf{q}_{1, p_N}}(\theta_{1, p_N}) \dots [\mathbf{i}_{p_N}]_{\mathbf{q}_{p_N, p_N}}(\theta_{p_N, p_N}) \rangle &= \\ \sum_{\text{all permutations}} \prod \langle [\mathbf{i}_1]_{\mathbf{q}_{1,1}}(\theta_{1,1}) [\mathbf{i}_{p_1}]_{\mathbf{q}_{1, p_1}}(\theta_{p_N,1}) \rangle \dots \langle [\mathbf{i}_{p_N}]_{\mathbf{q}_{1, p_N}}(\theta_{1, p_N}) [\mathbf{i}_{p_N}]_{\mathbf{q}_{p_N, p_N}}(\theta_{p_N, p_N}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D11})$$

Putting Eqs. (D10)-(D11) into Eq. (D9) yields formally the N-point correlation function to arbitrary order. A special case is given in the main text corresponding to third order expansion of the two-point correlation, Eq. (53). The N-point correlation of other (possibly mixed) moments of the distribution function may be computed following the same route.

D3 Perturbation theory in the complex Fourier plane

Let us close this appendix by a presentation of the perturbative solutions in the complex Fourier plane. In frequency space, Eq. (38) reads:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{(2)}(\omega) &= \sum_{\mathbf{q}_1} \hat{a}_{\mathbf{q}_1}^{(2)}(\omega) \left([2\pi]^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{q}_1]}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{I}) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot \mathbf{k} \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \omega - \omega} \right) + \\ &\quad [2\pi]^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \int d\omega' [\hat{a}_{\mathbf{q}_1}^{(1)}(\omega') + \hat{b}_{\mathbf{q}_1}(\omega')] \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \omega - \omega'} \times \\ &\quad \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \left[\frac{1}{\mathbf{k}_1 \cdot \omega - (\omega - \omega')} \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot \mathbf{k}_1 \psi_{\mathbf{k}_1}^{[\mathbf{q}_2]}(\mathbf{I}) [\hat{a}_{\mathbf{q}_2}^{(1)}(\omega') + \hat{b}_{\mathbf{q}_2}(\omega')] + \sigma_{\mathbf{k}_1}^{e, [\mathbf{q}_2]}(\mathbf{I}) \hat{c}_{\mathbf{q}_2}[\omega'] \right], \psi_{\mathbf{k}_2}^{[\mathbf{q}_1]} \right] \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]}. \end{aligned} \quad (\text{D12})$$

Following Eq. (44), let us also define in frequency space the contraction rule:

$$(\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{Z}})_{\mathbf{p}}(\omega) \triangleq \sum_{\mathbf{q}} \hat{K}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(\omega) \hat{Z}_{\mathbf{q}}(\omega), \quad (\text{D13})$$

(note that Eq. (D13) only involve a sum and no integral) and the higher order contraction rule (cf. Eq. (45)):

$$(\hat{\mathbf{K}}_n \cdot \hat{\mathbf{Z}}^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{Z}}^n)_{\mathbf{p}}(\omega) \triangleq \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} \int d\omega_1 \cdots \int d\omega_n \hat{K}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n}(\omega_1, \dots, \omega_n) \delta_D(\omega - \sum_{i=1}^n \omega_i) \hat{Y}_{\mathbf{q}_1}^1(\omega_1) \cdots \hat{Y}_{\mathbf{q}_n}^n(\omega_n). \quad (\text{D14})$$

The operator, $\hat{\mathbf{K}}_n[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$, obeys

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{K}}_n)_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] &= [2\pi]^3 \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega_1} \times \\ &\sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \left[\frac{1}{\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega_2} \cdots \sum_{\mathbf{k}_{2n-1} + \mathbf{k}_{2n} = \mathbf{k}_n} \left[\frac{1}{\mathbf{k}_{2n-3} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega_n} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} \cdot i\mathbf{k}_{2n-3} \psi_{\mathbf{k}_{2n-3}}^{[\mathbf{q}_n]} \psi_{\mathbf{k}_{2n-2}}^{[\mathbf{q}_{n-1}]} \right] \cdots \psi_{\mathbf{k}_4}^{[\mathbf{q}_2]} \right] \psi_{\mathbf{k}_2}^{[\mathbf{q}_1]} \right] \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]}. \end{aligned} \quad (\text{D15})$$

D4 Dynamical friction versus perturbation expansion

In this appendix let us try and address the following question: can the second-order perturbation be expressed as a first-order on the perturbed orbit? This may be done looking at perturbation theory from the point of view of the equations of motion. In particular

$$\dot{\mathbf{I}} = \partial_{\mathbf{w}}(\psi + \psi^e) \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{q}]}(\mathbf{I}) \int_{-\infty}^t (b_{\mathbf{q}}(\tau) + \sum_n a_{\mathbf{q}}^{(n)}(\tau)) d\tau, \quad (\text{D16})$$

therefore even if ψ^e is zero, the source term will introduce an angle dependent ψ and the actions will not be conserved which implies that the trajectories are changed. Note that the functional form is the same at all orders, i.e.

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_{n-1} + \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{q}]}(\mathbf{I}) \int_{-\infty}^t a_{\mathbf{q}}^{(n)}(\tau) d\tau \quad \text{and} \quad \omega_n = \omega_{n-1} + \sum_{\mathbf{q}} \frac{\partial \psi^{[\mathbf{q}]}(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \int_{-\infty}^t a_{\mathbf{q}}^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (\text{D17})$$

Given the canonical transform, $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{I}, \mathbf{w})$, $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{I}, \mathbf{w})$, the trajectories of all stars is therefore:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{I}_n(t), \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n(t)t + \mathbf{w}_0 \right), \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{I}_n(t), \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n(t)t + \mathbf{w}_0 \right). \quad (\text{D18})$$

Let us replace the expansions Eq. (D18) in Eq. (38)

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{q}} \int^t d\tau \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot [\boldsymbol{\omega} + \varepsilon\boldsymbol{\omega}_1][\tau - t]) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\boldsymbol{\omega} + \varepsilon\boldsymbol{\omega}_1) \sigma_{\mathbf{k}}^{e, [\mathbf{q}]}(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{I}_1) c_{\mathbf{q}}(\tau) = \\ \sum_{\mathbf{q}} \int^t d\tau \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}[\tau - t]) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \sigma_{\mathbf{m}}^{e, [\mathbf{q}]}(\mathbf{I}) c_{\mathbf{q}}(\tau) \left(1 + i\mathbf{k} \cdot \sum_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \log \psi^{[\mathbf{q}]}(\mathbf{I}) \int_{-\infty}^{\tau} [b_{\mathbf{q}}(\tau_2) + a_{\mathbf{q}}^{(1)}(\tau_2)] d\tau_2 + \right. \\ \left. \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \log \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} \log \sigma_{\mathbf{k}}^{e, [\mathbf{q}]}(\mathbf{I}) \right] \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{q}]}(\mathbf{I}) \int_{-\infty}^{\tau} [b_{\mathbf{q}}(\tau) + a_{\mathbf{q}}^{(1)}(\tau)] d\tau \right), \end{aligned} \quad (\text{D19})$$

which indeed involves double integration over time together with anticommutators of ψ^e and s^e .

APPENDIX E: OTHER COSMOLOGICAL PROBES

In this appendix, we discuss other non-linear statistical probes of the cosmic environment of halos, expanding over Section 5.1.

E1 Dark matter desintegration

It has been claimed that dark matter could be made of neutralinos which can be traced indirectly via their disintegration signature, which scales like the square of the local dark matter density (Stoehr et al. (2003)). The total number of γ photons received during integration time, t_γ reads

$$N_a(\mathbf{\Omega}, t_\gamma) = D_{\text{eff}} t_\gamma \frac{N_{\text{cont}} \langle \sigma v \rangle}{2} \frac{\Delta \Omega}{m_\chi^2} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\Delta \Omega} \int d\mathbf{\Omega} \int dr \rho_{\text{DM}}^2(r),$$

$$\triangleq W_\chi \int d\mathbf{\Omega} \int dr \rho_{\text{DM}}^2(r), \quad (\text{E1})$$

where D_{eff} is the effective size of the telescope, $\Delta \Omega$ the angular resolution of the telescope, and $N_{\text{cont}}(E_\gamma)$ is the number of continuum photons and $\langle \sigma v \rangle$ is the continuum cross-section of neutralinos of mass, m_χ . The integral accounts for measured flux of γ photons arising from neutralinos desintegrating in the direction, $\mathbf{\Omega}$. (See Stoehr et al. (2003) for details about the computation of N_{cont} , D_{eff} and $\langle \sigma v \rangle$). Since the $N_a(\mathbf{\Omega}, T)$ scales like the line integral of the square of the density along the line of sight, it is straightforward to propagate the statistical properties of the density fluctuations to that of N_a . For instance, the cosmic mean will scale like

$$\langle N_{\text{annih}}(\mathbf{\Omega}) \rangle = W_\chi \int dr \langle \rho_{\text{DM}}(\mathbf{r}) \rangle^2 + W_\chi \int dr \langle \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{r}) \rangle, \quad (\text{E2})$$

where

$$\langle \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \langle a_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}'} \rangle \rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}) \rho^{[\mathbf{n}']}(\mathbf{r}). \quad (\text{E3})$$

Hence we expect an excess of annihilation because of the polarized clumps within the halo. Similarly, we may predict the angular correlation function, or the related variance as a function of smoothed angular scale as

$$\langle \delta N_a(\mathbf{\Omega}) \delta N_a(\mathbf{\Omega}') \rangle = W_\chi^2 \iint dr dr' \langle \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{\Omega}, r) \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{\Omega}', r') \rangle$$

$$= W_\chi^2 \sum_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4} \langle a_{\mathbf{n}_1} a_{\mathbf{n}_2} a_{\mathbf{n}_3} a_{\mathbf{n}_4} \rangle \iint dr dr' \times$$

$$\rho^{[\mathbf{n}_1]}(r, \mathbf{\Omega}) \rho^{[\mathbf{n}_2]}(r, \mathbf{\Omega}) \rho^{[\mathbf{n}_3]}(r', \mathbf{\Omega}') \rho^{[\mathbf{n}_4]}(r', \mathbf{\Omega}'), \quad (\text{E4})$$

where $\delta N_{\text{annih}}(\mathbf{\Omega}) \triangleq N_{\text{annih}}(\mathbf{\Omega}) - \langle N_{\text{annih}}(\mathbf{\Omega}) \rangle$. Note that we assumed here that the resolution of the telescope was effectively infinite (*i.e.* $\Delta \Omega \rightarrow 0$ in Eq. (E1)). Now we may rely on Wick theorem to express the four-point correlation entering Eq. (E4) as products of two-point correlations. Calling $\delta a \triangleq a - \langle a \rangle$, we have $\langle \delta a_{\mathbf{n}_1} \delta a_{\mathbf{n}_2} \delta a_{\mathbf{n}_3} \delta a_{\mathbf{n}_4} \rangle = 0$, and

$$\langle \delta a_{\mathbf{n}_1} \delta a_{\mathbf{n}_2} \delta a_{\mathbf{n}_3} \delta a_{\mathbf{n}_4} \rangle = \langle \delta a_{\mathbf{n}_1} \delta a_{\mathbf{n}_2} \rangle \langle \delta a_{\mathbf{n}_3} \delta a_{\mathbf{n}_4} \rangle +$$

$$\langle \delta a_{\mathbf{n}_1} \delta a_{\mathbf{n}_3} \rangle \langle \delta a_{\mathbf{n}_2} \delta a_{\mathbf{n}_4} \rangle + \langle \delta a_{\mathbf{n}_2} \delta a_{\mathbf{n}_3} \rangle \langle \delta a_{\mathbf{n}_1} \delta a_{\mathbf{n}_4} \rangle. \quad (\text{E5})$$

If the infall is statistically isotropic, Eq. (E4) may be averaged over the direction, $\mathbf{\Omega}$ and reads:

$$\langle \delta N_{\text{annih}}(\mathbf{\Omega}) \delta N_{\text{annih}}(\mathbf{\Omega}') \rangle_\Omega = \sum_\ell C_\ell^{\text{annih}} P_\ell[\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}'], \quad (\text{E6})$$

where

$$C_\ell^{\text{annih}} = W_\chi^2 \sum_\ell C_{\ell_1}^{\text{DM}} C_{\ell_2}^{\text{DM}} U_{\ell_1, \ell_2}^\ell. \quad (\text{E7})$$

Note that the geometric factor, U_{ℓ_1, ℓ_2}^ℓ , only depends on the basis function, $\rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r})$ and possibly the resolution of the telescope if it is not assumed to be infinite:

$$U_{\ell_1, \ell_2}^\ell = \sum_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4} \int d\mathbf{\Omega} Y_{\ell_1}^{m_1}(\mathbf{\Omega}') \int d\mathbf{\Omega}' Y_{\ell_2}^{m_2}(\mathbf{\Omega}') \times$$

$$\iint dr dr' \rho^{[\mathbf{n}_1]}(r, \mathbf{\Omega}) \rho^{[\mathbf{n}_2]}(r, \mathbf{\Omega}) \rho^{[\mathbf{n}_3]}(\mathbf{\Omega}', r') \rho^{[\mathbf{n}_4]}(\mathbf{\Omega}', r'), \quad (\text{E8})$$

given that $\rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}) = u_{\ell m}^n(r) Y_\ell^m(\mathbf{\Omega})$ and given the properties of spherical harmonics, the integral $\int d\mathbf{\Omega} Y_{\ell_1}^{m_1}(\mathbf{\Omega}) Y_{\ell_2}^{m_2}(\mathbf{\Omega}) Y_{\ell_3}^{m_3}(\mathbf{\Omega}') Y_{\ell_4}^{m_4}(\mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}$ can be expressed iteratively in terms of Clebsch-Jordan coefficients. Ensemble average and comparison with the observation is possible at the high ℓ limit corresponding to the small-scale structure of the dark matter halo, for which we may expect independent angular regions of the Galactic halo to be representative of an ensemble average.

E2 Bremsstrahlung X-ray emission of staked halos

Assuming that the gas traces the dark matter, we may reproduce the thought experiment of Section E1, though the ensemble average is constructed while staking projections of halos on the sky rather than in a galactocentric framework.

The emissivity per unit volume at frequency ν , $\varepsilon_\nu(\mathbf{r})$, for a hydrogen plasma is given by (Peacock (1999))

$$\varepsilon_\nu(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\nu = \frac{\epsilon_X n_e^2(\mathbf{r})}{\sqrt{T_e(\mathbf{r})}} \left(1 + \log_{10} \left[\frac{k_B T_e(\mathbf{r})}{h\nu} \right] \right) \times$$

$$\exp \left(-\frac{h\nu}{k_B T_e(\mathbf{r})} \right) d\mathbf{r} d\nu, \quad (\text{E9})$$

where T_e is the temperature in Kelvin, ν the frequency in Hz, k_B the Boltzmann constant, h the Planck constant, and $\epsilon_X \triangleq 6.810^{-32}$ for an emissivity in $\text{Wm}^{-3}\text{Hz}^{-1}$. Let us assume here that the cluster is isothermal, hence the variation of T_e with z are neglected compared to that of n_e squared.¹² Let us also assume that L/M is the mass to light ratio of the cluster is constant. Hence the emissivity per unit surface, σ_ν , is given by

$$\sigma_\nu(\mathbf{R}) = \int dz (L/M)^2 \varepsilon_\nu(\mathbf{R}, z) \triangleq W_X \int dz \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}, z). \quad (\text{E10})$$

Hence, taking an ensemble average yields:

$$\langle \sigma_\nu(\mathbf{R}) \rangle = W_X \int dz \langle \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}, z) \rangle + W_X \int dz \langle \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}, z) \rangle, \quad (\text{E11})$$

where

$$\langle \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}, z) \rangle = \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \langle a_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}'} \rangle \rho^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}) \rho^{[\mathbf{n}']}(\mathbf{r}). \quad (\text{E12})$$

The two-point correlation of the cosmic fluctuation of the emissivity is given by

$$\frac{\langle \delta \sigma_\nu(\mathbf{R}) \delta \sigma_\nu(\mathbf{R}') \rangle}{\langle \sigma_\nu(\mathbf{R}) \rangle^2} = \frac{\iint dz dz' \langle \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}, z) \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}', z') \rangle}{\langle \sigma_\nu(\mathbf{R}) \rangle^2},$$

¹² this is a better approximation than for the SZ effect

where

$$\langle \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}, z) \delta \rho_{\text{DM}}^2(\mathbf{R}', z') \rangle = \sum_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4} \langle a_{\mathbf{n}_1} a_{\mathbf{n}_2} a_{\mathbf{n}_3} a_{\mathbf{n}_4} \rangle \times \rho^{[\mathbf{n}_1]}(\mathbf{R}, z) \rho^{[\mathbf{n}_2]}(\mathbf{R}, z) \rho^{[\mathbf{n}_3]}(\mathbf{R}', z') \rho^{[\mathbf{n}_4]}(\mathbf{R}', z'). \quad (\text{E13})$$

Note the cancellation of the dependence on W_χ (hence T or M/L) in Eq. (E13). Relying again on Wick's theorem, Eq. (E5), we may express the four-point correlations as a products of known (cf. Eq. (E5)) two-point correlations.

E3 Galactic halo's ellipticity

More generally, let us consider a problem which depends non trivially on the perturbed distribution function, *e.g.* the ellipticity, e_H , of the departure from sphericity of the substructures induced by the environment around a given halo. The ellipticity is defined as

$$e_H = \frac{3\lambda_1}{\sum_i \lambda_i} - 1 \triangleq \mathcal{G}(\delta \rho(\mathbf{r})), \quad \text{with } \{\lambda_i\} = \text{Eigenval}(\mathbf{I}_H), \quad (\text{E14})$$

and

$$\mathbf{I}_{H,ij} = \int_{\leq R_{200}} d\mathbf{r} \delta \rho(\mathbf{r}) x_i x_j / \int_{\leq R_{200}} d\mathbf{r} \rho_{\text{NFW}}(\mathbf{r}), \quad (\text{E15})$$

(so that λ_1 is the largest eigenvalue of \mathbf{I}_H and $e_H = 0$ if the halo's perturbation is spherical). Since we know the statistical properties of $\delta \rho(\mathbf{r})$, we may predict the statistical properties of e_H . In practice, assuming \mathcal{G} is a well-behaved function of its arguments, we may Taylor-expand e_H with respect to $\delta \rho$ as :

$$e_H = \sum_n \left(\frac{\partial^n \mathcal{G}}{\partial \delta \rho^n} \right) \cdot [\delta \rho(\mathbf{r}_1) - \langle \delta \rho(\mathbf{r}_1) \rangle] \cdots [\delta \rho(\mathbf{r}_n) - \langle \delta \rho(\mathbf{r}_n) \rangle] \quad (\text{E16})$$

Note that the derivative in Eq. (E16) is a Frechet functional derivative, so that the dot involves an integration over \mathbf{r} . Hence the ensemble average, $\langle e_H \rangle$ will involve N -point correlations, and reads

$$\langle e_H \rangle = \sum_n \sum_{\mathbf{i}_1 \cdots \mathbf{i}_n} \langle a_{\mathbf{i}_1} \cdots a_{\mathbf{i}_n} \rangle \left(\frac{\partial^n \mathcal{G}}{\partial \delta \rho^n} \right) \cdot \rho^{[\mathbf{i}_1]}(\mathbf{r}) \cdots \rho^{[\mathbf{i}_n]}(\mathbf{r}_n), \quad (\text{E17})$$

where, once again, we may rely on Wick's theorem to reexpress $\langle a_{\mathbf{i}_1} \cdots a_{\mathbf{i}_n} \rangle$ as products of two-point correlations. Since the relationship between the density perturbation and the ellipticity is not linear, we expect a non zero ellipticity on average.

Note that in principle, we may reconstruct the full PDF of e . Formally, calling $z \triangleq (e, a_2, \cdots a_n)$ (so that $z = (\mathcal{G}(a_1, \cdots, a_n), a_2, \cdots, a_n) = g(a_1, \cdots, a_n)$), inverting for z as a function of $\{a_i\}$ (provided the ellipticity is not degenerate in a_1), and marginalizing over the other coefficients yields:

$$\text{PDF}(e) = \int da_2 \cdots da_n \text{PDF}(g^{-1}(z)) / \left| \frac{\partial z}{\partial a_n} \right|.$$

Now in practice, Eq. (E17) might not be the simplest procedure to compute $\langle e_H \rangle$, and monte carlo resimulation may turn out to be more practical.

E4 Metal lines in QSO DLA systems

Let us finally consider a more convolved observable, which will depend on both the clump distribution within the haloes, but also on their velocities.

In the red part of a high resolution spectrum of quasars, groups of absorption features are found, corresponding to the physical situation where the light emitted by the quasar is partially absorbed by the metal-rich¹³ clumps which the line of sight happens to intercept. Formally, the normalized flux in a QSO is proportional to minus the log of the optical depth along the line of sight. The optical depth in the metal transition is (Pichon et al. (2001)):

$$\tau(w, \mathbf{R}) = \frac{c \sigma_0}{H(\bar{z}) \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_Z(v, \mathbf{R})}{b(v, \mathbf{R})} \times \exp \left(- \frac{(w - v - v_z(v, \mathbf{R}))^2}{b(v, \mathbf{R})^2} \right) dv, \quad (\text{E18})$$

where c is the velocity of light, σ_0 is the metal absorption cross-section, $H(\bar{z})$ is the Hubble constant at redshift \bar{z} , $n_Z(v, \mathbf{R})$ the ionized metal number density field, $b(v, \mathbf{R})$ the Doppler parameter (accounting for the thermal broadening of the line), and $v_p(v, \mathbf{R})$ is the peculiar velocity, at impact parameter, \mathbf{R} from the centre of the cluster. The observed normalized flux, F , is simply $F = \exp(-\tau)$. If we assume here again constant biasing, so that $n_Z \propto \rho_{\text{DM}}$. This assumption may be lifted once the identification of virialized substructure described in Section 3.3.1 is carried through. The two-point correlation of the optical depth fluctuation will involve statistical properties of both the density and the velocity field in a non trivial manner.

$$\frac{1}{\langle \tau \rangle^2(w, \mathbf{R})} \langle \delta \tau(w, \mathbf{R}) \delta \tau(w', \mathbf{R}') \rangle, \quad (\text{E19})$$

with

$$\delta \tau(w, \mathbf{R}) = \tau(w, \mathbf{R}) - \langle \tau \rangle(w, \mathbf{R}). \quad (\text{E20})$$

Note that the distance to the halo center, $\mathbf{R} \triangleq b(\cos[\theta_b], \sin[\theta_b])$ still occurs in Eq. (E20). Since we do not know in general the impact parameter of the line of sight with respect to the halo center, let us marginalize over its *a priori* probability distribution, which we may infer from *e.g.* the PT model (which at these scales corresponds essentially to the autocorrelation of the unperturbed universal halo profile). Given that we consider systems at the redshift of a damped Lyman- α , we may assume that we fall close to a galactic structure. Calling $p_b(b, \bar{z}, M) db d\bar{z}$ the probability of a given point in space to be at a distance, b within db of an object of mass larger than M , which is at redshift \bar{z} within $d\bar{z}$, we may construct the weighted sum :

$$C_\tau(\Delta w) = \int_0^\infty db \int_0^\infty d\bar{z} \int_0^{2\pi} d\theta_b p_b(b, z, M) \times \langle \delta \tau(w, b \cos[\theta_b], b \sin[\theta_b]) \delta \tau(w + \Delta w, b \cos[\theta_b], b \sin[\theta_b]) \rangle_w. \quad (\text{E21})$$

This quantity may now be compared to the observable. Let us assume some equation of state for the metal phase, so that $b(\mathbf{R}, z) = b_0 (\rho(\mathbf{R}, z) / \bar{\rho})^\gamma$. Eq. (E18) may then be written formally as $\delta \tau(w, \mathbf{R}) = \mathcal{T}[\delta \rho(v, \mathbf{R}), v_z(v, \mathbf{R})]$. Let us Taylor expand this expression in the neighborhood of the mean density fluctuation as:

$$\delta \tau(w, \mathbf{R}) = \sum_n \left(\frac{\partial^n \mathcal{T}}{\partial \delta \rho \cdots \partial \delta v_z} \right).$$

¹³ Since we make predictions at lower redshift we need to concentrate on metals such as Mg_{II} , or Fe_{II} which are found typically at redshift $z \leq 1.5$ in the visible

$$[\delta\rho(\mathbf{r}_1) - \langle\delta\rho(\mathbf{r}_1)\rangle] \cdots [\delta v_z(\mathbf{r}_n) - \langle\delta v_z(\mathbf{r}_n)\rangle] . \quad (\text{E22})$$

Again the derivative in Eq. (E22) is a functional derivative (cf. Section E3). Eqs. (E21)-(E22) together with Eq. (28) yield the expected correlation as a function of the statistical environment.

4

Implémentation du modèle linéaire du halo sphérique

L'objectif de ce chapitre est de décrire en détail la mise en pratique du calcul de la réponse du halo sphérique. Les chapitres précédents ont permis d'exposer quels étaient les principes généraux du calcul de la réponse linéaire. En particulier, il y est montré que l'essentiel de la difficulté consiste à calculer correctement les “noyaux” de couplage qui relient les environnement (champ de marée + source) à la réponse. L'avantage d'une telle approche (pour peu que toutes les hypothèses sous-jacentes soient respectées) est que ce calcul n'est fait qu'une fois pour un type de halo donné. Disposant de ces noyaux, les calculs de la réponse sont immédiats et ceci quelles que soient les perturbations.

Cette efficacité se paie lors du calcul proprement dit de ces noyau. Ainsi, il a été montré que ceux-ci font intervenir les bases de projection de la réponse, exprimées dans l'espace des angles-actions (\mathbf{I}, \mathbf{w}) , qui n'est pas leur espace de représentation naturel et amène donc de premières difficultés. D'autre part, le comportement des noyaux peut s'avérer être très oscillant dans l'espace temporel comme dans l'espace des actions, amenant à écarter d'emblée une intégration “brutale” du noyau dans ces espaces. Ces obstacles sont inhérents à l'implémentation numérique de cette approche et ne peuvent être écartés.

De plus, une des ambitions des travaux présents est d'aborder à terme la problématique de halos de matière noire réalistes dans le régime non-linéaire. Ceci amène à considérer dès à présent des phénomènes à haute résolution temporelle et spatiale. De telles résolutions ne sont accessibles que via un très bon échantillonnage en temps et dans l'espace des phases, augmentant encore sensiblement le défi d'un calcul précis des noyaux.

Ce chapitre expose la manière qui fut retenue pour circumvenir à l'ensemble des points sus-nommés. Durant cette thèse, l'implémentation a été limitée au problème linéaire “fermé” où les interactions sont uniquement de type “champ de marée”. Si elle ne permet pas une application de l'ensemble des développements théoriques présentés dans les chapitres précédents, cette implémentation doit déjà permettre d'aborder la

propagation statistique du potentiel extérieur aux réponses des halos. De plus, une étude des effets de convergence est nécessaire avant d'aborder des problèmes plus complexes de systèmes ouverts non linéaires et celle-ci se fait avec ce premier modèle. La première section aborde le calcul détaillé du calcul de la réponse linéaire, en explicitant notamment la base de projection de la réponse et le passage d'une représentation position-vitesse de l'espace des phases à une représentation angles-actions. La deuxième partie est consacrée à l'intégration pratique du noyau et au calcul de la réponse à proprement dit. La dernière partie expose les premiers tests de validation concluants, à partir de situations simples (dérive d'un halo) et plus complexes (croissance adiabatique d'une sphère).

4.1 Détail du calcul de la réponse du halo

Le détail des calculs présenté ici reprend les démarches précédemment développées par Murali (1999) et Seguin & Dupraz (1994). La réponse linéaire du halo soumis à un champ de marée ψ^e est donnée par (voir le chapitre 2 ainsi que la première partie de l'article ci-joint):

$$\mathbf{a}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \mathbf{K}(\tau - t) \cdot [\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)], \quad (4.1)$$

où le noyau de couplage \mathbf{K} est défini par :

$$K_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(\tau) = \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) i\mathbf{k} \cdot \frac{dF}{d\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}), \quad (4.2)$$

où $\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I})$ désigne génériquement les bases de projection de la réponse et des perturbations. Ces bases projections peuvent être explicitées de la façon suivante :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{m}} a_{j\ell m}(t) Y_{\ell m}(\theta, \phi) d_{j\ell m}(r), \quad (4.3)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{m}} a_{j\ell m}(t) Y_{\ell m}(\theta, \phi) u_{j\ell m}(r), \quad (4.4)$$

$$\psi^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{m}} b_{j\ell m}(t) Y_{\ell m}(\theta, \phi) u_{j\ell m}(r), \quad (4.5)$$

où $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ désigne les harmoniques sphériques et $d_j(r)$ et $u_j(r)$ désignent une base radiale biorthonormale. Les fonctions qui composent cette base satisfont automatiquement la relation de Poisson :

$$\Delta u_{j\ell m}(r) = 4\pi G d_{j\ell m}(r), \quad (4.6)$$

et possèdent la propriété d'orthogonalité suivante¹ :

$$-\frac{1}{4\pi G} \int dr r^2 u_{i\ell m}(r)^* d_{j\ell m}(r) = \delta_{ij}. \quad (4.7)$$

L'application de la relation d'orthogonalité précédente à l'équation (4.3) conduit à :

$$a_{i\ell m}(t) = -\frac{1}{4\pi G} \int d\mathbf{r} u_{i\ell m}^*(r) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \rho(\mathbf{r}, t) \quad (4.8)$$

$$= -\frac{1}{4\pi G} \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{v} u_{i\ell m}^*(r) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \quad (4.9)$$

¹on notera le changement de convention du produit scalaire définissant la biorthogonalité

Transformées en angles-actions

L'équation (4.9) met en jeu les deux types de variables, obligeant le passage d'une description (\mathbf{r}, \mathbf{v}) de la base biorthogonale à une description en angle actions (\mathbf{w}, \mathbf{I}) . Le jeu de variable angle-action étant canonique, l'élément différentiel $d\mathbf{v}d\mathbf{r}$ est remplacé par $d\mathbf{I}d\mathbf{w}$ dans les calculs suivant, i.e. :

$$a_{i\ell m}(t) = -\frac{1}{4\pi G} \sum_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{I}d\mathbf{w} u_{i\ell m}^*(r) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \quad (4.10)$$

Une telle opération est présentée en détail dans Tremaine & Weinberg (1984). Ainsi, la transformée en angle action de la base de projection en potentiel est donnée par :

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) u_{j\ell m}(r) = \sum_{\mathbf{k}} V_{\ell, k_2, k_3}(\beta) W_{i\ell \mathbf{k}}(\mathbf{I}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}), \quad (4.11)$$

où $\beta = \cos^{-1} L_z/L$ est l'angle entre le plan de l'orbite considérée et la direction (arbitraire). La fonction $V_{\ell, k_2, k_3}(\beta)$ est définie par :

$$V_{\ell, k_2, k_3}(\beta) = r_{k_2, k_3}^{\ell}(\beta) Y_{\ell k_2}(\pi/2, 0) i^{k_3 - k_2} \quad (4.12)$$

où la fonction $r_{k_2, k_3}^{\ell}(\beta)$ désigne un opérateur de rotation “ramenant” l'harmonique sphérique dans le plan de l'orbite considérée (cf. par exemple Varshalovich et al. (1988) ou Messiah (1962)). La quantité $W_{i\ell \mathbf{k}}(\mathbf{I})$ est donnée par :

$$W_{i\ell \mathbf{k}}(\mathbf{I}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dw_1 \exp(-ik_1 w_1) u_{j\ell m}(r) \exp(ik_2(\Psi - w_2)). \quad (4.13)$$

Sur une orbite décrite par \mathbf{I} , l'écart entre l'azimut d'un point sur cette orbite Ψ et son “angle moyen” (décrit par w_2) ne dépend que de la phase radiale w_1 . Ainsi, $W_{i\ell \mathbf{k}}(\mathbf{I})$ décrit la transformée de Fourier de la variation radiale de la base de projection sur une orbite.

Intégrales sur les angles et obtention de la réponse

L'intégrale sur les angles $\int d\mathbf{w}$ peut être menée à terme, tandis que l'intégrale sur les actions peut s'écrire :

$$\int d\mathbf{I} = \int dI_r dL dL_z = \int \frac{1}{\Omega_1} dE L dL d\cos\beta. \quad (4.14)$$

L'intégrale sur l'angle β peut être conduite sur les fonctions $V(\beta)$ sachant que (cf. par exemple Edmonds (1960)):

$$\int d\cos\beta V_{\ell', k'_2, k'_3}^*(\beta) V_{\ell, k_2, k_3}(\beta) = C_{\ell k_2} \delta_{\ell \ell'}, \quad (4.15)$$

où :

$$C_{\ell k_2} = \frac{2}{2\ell + 1} |Y_{\ell k_2}(\frac{\pi}{2}, 0)|^2. \quad (4.16)$$

Au final, en combinant les équations (4.7), (4.11) et (4.13) avec la solution de la réponse en densité ((2.70)), on obtient la solution pour les coefficients $a_{j\ell m}$:

$$a_{i\ell m}(t) = \sum_j \int_{-\infty}^t d\tau K_{j\ell m}(\tau - t)(a_{j\ell m}(\tau) + b_{j\ell m}(\tau)). \quad (4.17)$$

Les deux membres de l'équation (4.17) contiennent les coefficients de la réponse en densité, et découlent du traitement auto-consistant de la dynamique du halo. Le calcul non auto-consistant s'effectuera simplement en omettant le coefficient $a_{\ell m j}$ du terme de droite. L'expression du noyau $K_{j\ell m}(\tau - t)$ est donnée par :

$$K_{j\ell m}(\tau - t) = -\frac{2\pi^3}{4\pi G} \int dE \frac{LdL}{\Omega_1} \frac{dF}{dE} \sum_{\mathbf{k}} C_{\ell k_2}(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) W_{\ell i \mathbf{k}}^* W_{\ell j \mathbf{k}} \exp(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\tau - t)) \quad (4.18)$$

Dérive barycentrique

Le calcul précédent ne tient pas compte de la dérive barycentrique du système. Dans le référentiel barycentrique, tout déplacement global du halo se traduit par l'apparition d'une force d'inertie. Le hamiltonien à résoudre devient :

$$H = H_0 + \psi + \psi^e + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{V}_c}{dt}, \quad (4.19)$$

où le dernier terme résulte de la prise en compte de cette force inertielle (cf. par exemple Landau & Lifshitz (1969)). La prise en compte de cette accélération supplémentaire se traduit par la modification suivante du noyau :

$$K_{j\ell m}(\tau - t) = -\frac{2\pi^3}{4\pi G} \int dE \frac{LdL}{\Omega_1} \frac{dF}{dE} \sum_{\mathbf{k}} C_{\ell k_2}(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) W_{\ell i \mathbf{k}}^* (W_{\ell j \mathbf{k}} + \frac{4\pi}{3} \delta_{\ell 1} p_{\ell m j} X_{\mathbf{k}}(\mathbf{I})) \exp(\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\tau - t)), \quad (4.20)$$

où

$$X_{\mathbf{k}}(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dw_1 \exp(-ik_1 w_1) \exp(ik_2(\Psi - w_2))r, \quad (4.21)$$

et

$$p_{\ell m j} = \int dr r^2 d_{j\ell m}(r) \frac{d\Phi_0}{dr}. \quad (4.22)$$

L'utilisation d'un référentiel non inertiel entraîne l'apparition d'un champ de force homogène se manifestant par un potentiel dipolaire ($\ell = 1$) supplémentaire.

Résumé

Le calcul de la réponse $\rho(\mathbf{r}, t)$ d'un système à un potentiel $\psi^e(\mathbf{r}, t)$ se fait par le calcul des coefficients $a_{i\ell m}$. La résolution de l'équation (4.17) se fait en deux étapes :

1. Le calcul du noyau. Ce calcul nécessite entre autres de déterminer quelles sont les actions du système pour un modèle de halo donné.
2. La résolution à proprement dite de (4.17), c'est-à-dire trouver l'évolution temporelle de $a_{i\ell m}$ pour un noyau K et une perturbation $b_{i\ell m}(t)$ donnée.

Le schéma de l'implémentation du calcul est donné en figure 4.1.

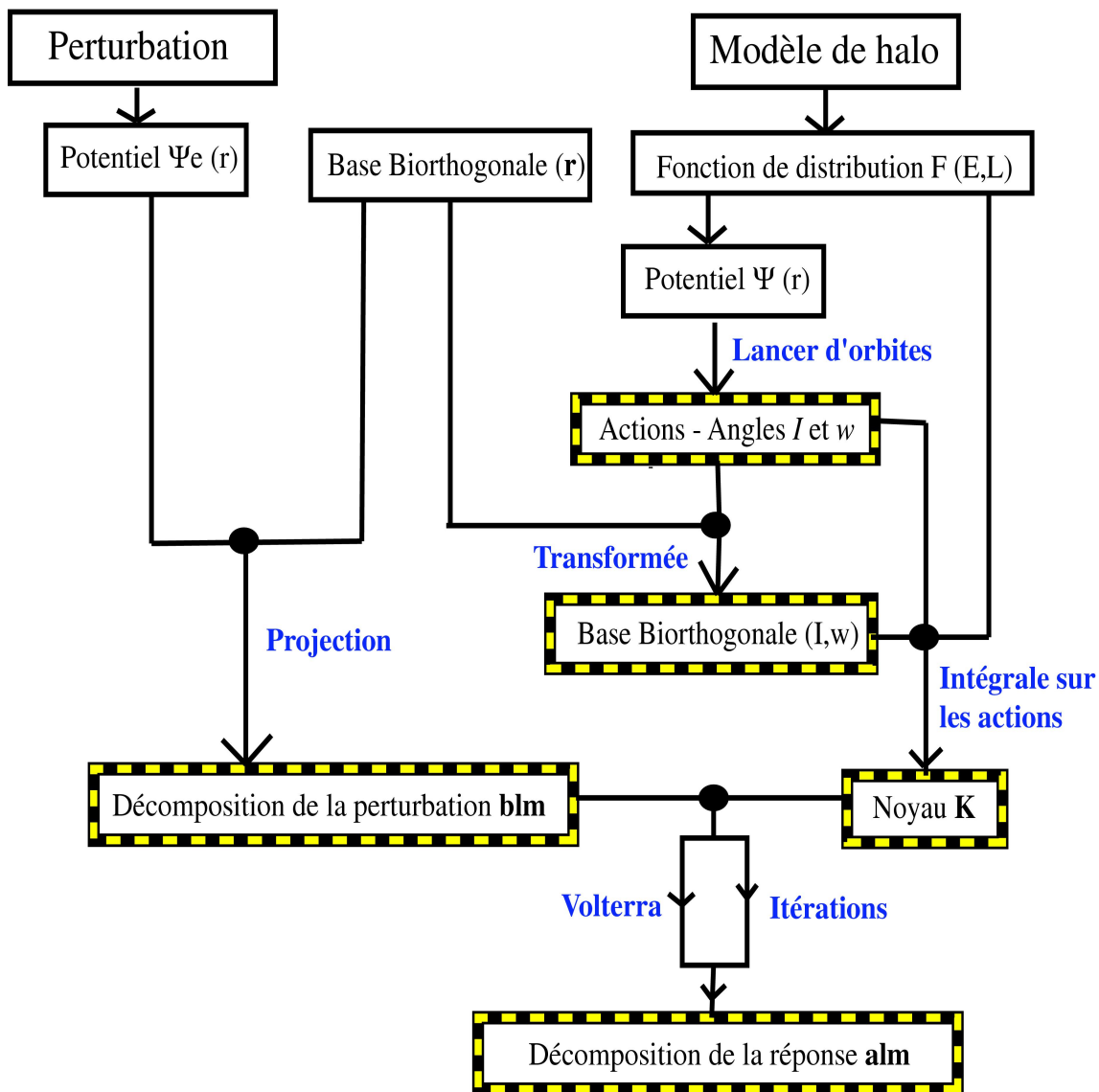


Figure 4.1: Schéma du calcul de la réponse. Les cadres en traits pleins désignent les données du problèmes. Les cadres en tirets désignent les quantités calculées par le code de stabilité. Les différentes opérations effectuées pour obtenir ces quantités sont données en bleus.

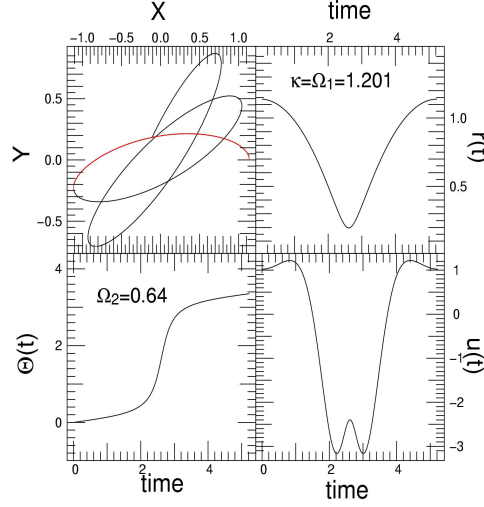


Figure 4.2: Cas typique de détermination numérique du taux de variation \dot{w} des angles. En haut à gauche, une orbite définie par trois actions arbitraires \mathbf{I} . En rouge, la trajectoire de la particule test pendant une période radiale, T_r . En haut à droite, l'évolution du rayon de cette particule durant T_r , à partir de laquelle $\dot{w}_1(\mathbf{I}) = 2\pi/T_r$ est déduit. En bas à gauche, l'évolution de l'azimut Θ de la particule dans le plan de l'orbite fournit la quantité $\dot{w}_2(\mathbf{I}) = \Delta\Theta/T_r$. En bas à droite, la variation de la fonction de la base radiale $u_{10,1,1}(r(t))$ le long de l'orbite durant T_r conduit à l'évaluation de sa transformée $W_{10,1,\mathbf{k}}(\mathbf{I})$.

4.1.1 Calculs en variables angle-actions

De façon générique, il n'existe pas de relations analytiques simples entre les actions \mathbf{I} et les fréquences angulaires associées $\boldsymbol{\Omega} = d\mathbf{w}/dt$. A fortiori, il n'existe pas de relations de passage simples entre variables (\mathbf{I}, \mathbf{w}) et les variables positions-vitesses. De fait, pour un modèle de halo arbitraire décrit par $F(E)$, ces relations doivent être déduites numériquement.² Pour un modèle de halo donné, on dispose de sa fonction de distribution $F(E)$ (dans le cas isotrope) et de son potentiel gravitationnel à l'équilibre. On procède à un pavage de l'espace des intégrales du mouvement (E, L) et le calcul des relations de passage se fait par une procédure de 'lancer d'orbites' dans ce potentiel gravitationnel. Par exemple, pour chaque orbite définie par ses intégrales du mouvement, la mesure simultanée de $\mathbf{r}(t)$ et de $\mathbf{w}(t)$ permet d'établir les relations de passages $\mathbf{r}(\mathbf{w})$. Ces relations permettent notamment le calcul du taux de variation des angles $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I})$ et des transformées $W_{\ell i \mathbf{k}}(\mathbf{I})$. L'obtention de ces quantités est illustrée par la figure 4.2.

4.1.2 Bases biorthogonales

On notera que pour cette dernière quantité, la base de fonction densité-potentiel doit être explicitée. Aucun a priori n'est posé sur la base biorthonormale, et deux bases ont été utilisées de façon transparente dans l'implémentation présente. La première est

²Les seules exceptions sont les modèles isochrone et Képlérien (Binney & Tremaine (1987)).

décrite dans Fridman & Poliachenko (1984) et Weinberg (1989) et est définie par :

$$u_{j\ell m}(r) = -\frac{4\pi G\sqrt{2}}{\alpha_j |J_\ell(\alpha_j)|} R^{-1/2} J_\ell(\alpha_j r/R) \quad (4.23)$$

$$d_{j\ell m}(r) = \frac{\alpha_j \sqrt{2}}{|J_\ell(\alpha_j)|} R^{-5/2} J_\ell(\alpha_j r/R), \quad (4.24)$$

où R est un rayon de troncature tandis que les fonctions J_ℓ sont définies à partir de fonctions de Bessel J^B : $J_\ell(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{\ell+1/2}^B(x)$. Les quantités α_n sont les racines n -ième de $J_{\ell-1/2}^B(x)$. Cette base est utilisée dans le test de l'implémentation présenté dans la section suivante.

La seconde est issue de Hernquist & Ostriker (1992) et est définie par :

$$u_{j\ell m}(r) = -4\pi \frac{r^\ell}{(1+r)^{2\ell+1}} C_j^{2\ell+3/2}(\xi) \quad (4.25)$$

$$d_{j\ell m}(r) = 4\pi \frac{\zeta_j^\ell}{2\pi} \frac{r^{\ell-1}}{(1+r)^{2\ell+3}} C_j^{2\ell+3/2}(\xi), \quad (4.26)$$

où $\xi = (r-1)/(r+1)$ et $\zeta_j^\ell = j/2(j+4\ell+3) + (\ell+1)(2\ell+1)$. La quantité $C_j^i(\xi)$ est définie récursivement par : $C_0^i(\xi) = 1$, $C_0^i(\xi) = 2i\xi$ et $C_j^i(\xi) = 2(j-1+i)\xi C_{j-1}^i(\xi)/j - (j-2+2i)C_{j-2}^i(\xi)/j$. Les deux fonctions doivent être ensuite normalisées afin d'obéir à l'équation (4.7).

En principe, l'utilisation de l'une ou l'autre des bases est possible, quel que soit le problème ou le modèle adopté pour décrire le halo. En pratique, le nombre de fonctions à considérer dépend de l'adéquation d'une base à décrire un modèle ou une perturbation donnés. Ainsi la base de Hernquist est particulièrement adaptée pour décrire des potentiels très piqués au centre (cf. figure 4.3). Le modèle de Fridman convient davantage à des modèles de type 'noyau', du fait d'un comportement plus régulier pour de petits rayons.

4.2 Aspects numériques de l'implémentation

4.2.1 Intégration du noyau

On s'attend intuitivement à ce que le noyau soit d'autant mieux calculé que le pavage dans l'espace des actions est fin, de façon à ce que l'échantillonnage puisse refléter les variations de l'intégrand de K dans cet espace. Néanmoins, la présence d'un terme oscillant $\exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I})(\tau-t))$ dans l'intégrale du noyau implique qu'il existe une valeur de $(\tau-t)$ au delà de laquelle l'échantillonnage en actions s'avère être insuffisant. En d'autres termes, pour un échantillonnage en action donné, il existe un horizon temporel au delà duquel le noyau ne peut plus être calculé avec précision. Cette difficulté est contournée en considérant l'intégrand sur de faibles variations des actions $\Delta E, \Delta L$. Sur ce petit espace, le noyau s'écrit formellement :

$$K(\Delta t) = \int_{E-\Delta E/2}^{E+\Delta E/2} dE \int_{L-\Delta L/2}^{L+\Delta L/2} dL L g(E, L) e^{h(E, L)\Delta t}. \quad (4.27)$$

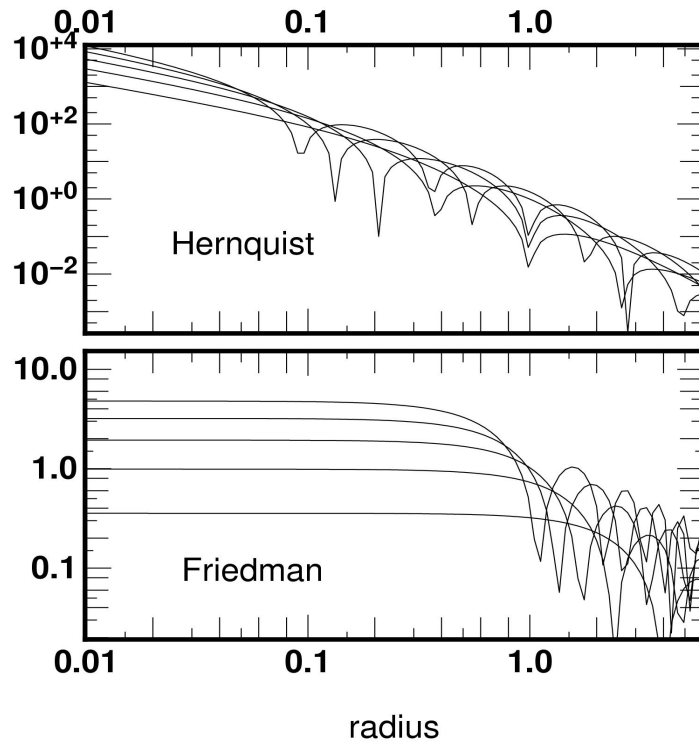


Figure 4.3: Une comparaison entre deux bases en densité $d_{j\ell m}(r)$. *En haut* : fonctions de la base biorthogonale de Hernquist & Ostriker (1992). *En bas* : fonctions de la base biorthogonale de Friedman & Poliachenko (1984). Sont représentées ici uniquement les fonctions dont $j \leq 5$ et $\ell = m = 1$.

Il est raisonnable de considérer que les fonctions $g(E, L)$ et $h(E, L)$ peuvent être approximées par leur développement limité au premier ordre autour de E, L :

$$g(E + \Delta E, L + \Delta L) = g(E, L) + \left(\frac{\partial g}{\partial E} \right)_{(E, L)} \Delta E + \left(\frac{\partial g}{\partial L} \right)_{(E, L)} \Delta L \quad (4.28)$$

$$= a\Delta E + b\Delta L + c, \quad (4.29)$$

de même $h(E, L) = a'\Delta E + b'\Delta L + c'$. Sous cette approximation, l'intégrale (4.27) s'exprime de façon analytique, via une fonction \aleph , en fonction des quantités a, b, c et a', b', c' :

$$\int_{E_i - \Delta E/2}^{E_i + \Delta E/2} dE \int_{L_i - \Delta L/2}^{L_i + \Delta L/2} dL g(E, L) e^{h(E, L)\Delta t} = \aleph(a(E_i, L_i), b(E_i, L_i), c(E_i, L_i), a'(E_i, L_i), b'(E_i, L_i), c'(E_i, L_i), \Delta t), \quad (4.30)$$

où l'indice i désigne un point du pavage de l'espace (E, L) . L'intégrale (4.27) devient une somme discrète sur les points i du pavage :

$$K(\Delta t) = \sum_i \aleph(a(E_i, L_i), b(E_i, L_i), c(E_i, L_i), a'(E_i, L_i), b'(E_i, L_i), c'(E_i, L_i), \Delta t). \quad (4.31)$$

Par cette méthode, la précision numérique du noyau n'est plus limité par la présence du terme oscillant.

Enfin, le calcul du noyau a été adapté pour fonctionner de façon partagée sur plusieurs processeurs en même temps. Pratiquement, chaque élément (m, i, j) de l'opérateur est calculé séparément sur chacun des processeurs disponibles, diminuant d'autant le temps de calcul.

4.2.2 Calcul de la réponse

Une fois l'expression du noyau d'intégration obtenue, il reste à résoudre l'équation aux $a_{\ell m}$ proprement dite. L'équation intégrale (4.17) est dite de *Volterra*. Deux façons complémentaires de procéder existent et ont été implémentées :

- Une méthode classique de résolution consiste à approximer la 'convolution' par la méthode des trapèzes. Elle est entièrement décrite dans Press et al. (1992) et la durée de résolution est typiquement fonction de l'échantillonnage temporel du noyau.
- La solution peut également être obtenue de façon itérative. Cette méthode s'avère possible du fait de la stabilité des halos. L'absence de modes instables implique un comportement non divergent des coefficients $a_{\ell m j}$ et garantit une convergence de la résolution itérative.

La première méthode est adaptée à une résolution "à l'aveugle" où aucun a priori sur la solution de l'équation n'est connu : le nombre d'opérations à effectuer est fixé pour un échantillonnage temporel donné. Pour peu que l'on dispose d'un bon a priori sur la solution de l'équation (4.27) (en ayant par exemple utilisé la première méthode), la seconde approche s'avère plus efficace du fait d'une rapide convergence vers le bon résultat.

4.3 Tests de l'implémentation

4.3.1 Champ de force homogène

Un test de la présente implémentation consiste à reproduire la dérive globale du halo dans un champ de force homogène. Ce problème “simple” possède une solution analytique qui peut être directement comparée à la réponse obtenue via la stabilité linéaire. Ce test est proposé par Weinberg (1989) où l’auteur remarque que le potentiel créé par un tel champ s’exprime uniquement en terme d’harmoniques dipolaires:

$$\psi^e(\mathbf{r}, t) = a(t)x\mathbf{e}_x = a(t)\sqrt{\frac{2\pi}{3}}r(Y_{11}(\boldsymbol{\Omega}) + Y_{1-1}(\boldsymbol{\Omega}))\mathbf{e}_x, \quad (4.32)$$

où $a(t)\mathbf{e}_x$ désigne la force homogène orientée arbitrairement suivant l’axe \mathbf{e}_x . Les quantités r et $\boldsymbol{\Omega}$ désignent les coordonnées sphériques dans le référentiel barycentrique du halo au repos. Cette perturbation de type dipolaire induit une réponse du système qui est complètement décrite par ses coefficients a_{j1m} . Un tel champ provoque une translation globale du système dans la direction du champ de force. La “réponse” en potentiel apparaît comme étant simplement la différence entre le potentiel au repos et le potentiel translaté, c’est-à-dire :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t)) - \Phi(\mathbf{r}), \quad (4.33)$$

où Φ désigne le potentiel du système au repos et où $\mathbf{r}_b(t)$ désigne la position du barycentre à chaque instant t . De façon générale la quantité $\mathbf{r}_b(t)$ est obtenue en intégrant $a(t)$ au cours du temps. Au premier ordre et pour de faibles déplacement, la réponse du système s’écrit alors:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{r}_b(t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}). \quad (4.34)$$

Le champ de force est choisi avec une dépendance temporelle arbitraire de type sinus, $a(t) = a_0 \sin(\omega t)$. En orientant le champ selon la direction \mathbf{e}_x , la réponse à reproduire devient :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a_0}{\omega} \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) \frac{d\Phi}{dr} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x. \quad (4.35)$$

La figure 4.4 présente une comparaison entre la réponse prédite par (4.35) pour une sphère de Plummer et celle calculée par la présente implémentation du calcul linéaire. Le potentiel de Plummer est donné par (Binney & Tremaine (1987)) :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \quad (4.36)$$

où M désigne la masse totale du halo tandis que b désigne son rayon caractéristique. Dans le cas présent, $M = 1$ et $b = 1$. Sa fonction de distribution associée est donnée par :

$$F(E) = \frac{24\sqrt{2}}{7\pi^3} (-E)^{7/2}. \quad (4.37)$$

Les paramètres du champ extérieur homogène sont $a_0 = 0.01$ et $\omega = 0.01$. La réponse a été calculée à partir de la base de Weinberg et seuls les 20 premiers termes de l’expansion ont été retenus. La réponse est calculée pour $0 < t < 10$ (où t est exprimé en unité de $\sqrt{b^3/GM}$) afin de respecter l’hypothèse de faible dérive. Dans la figure 4.4, la réponse calculée est comparée à la réponse attendue. De la même façon, la décomposition en $a_{j\ell m}(t)$ de la réponse est comparée aux coefficients théoriques. La méthode linéaire parvient clairement à reproduire la réponse analytique, validant son implémentation.

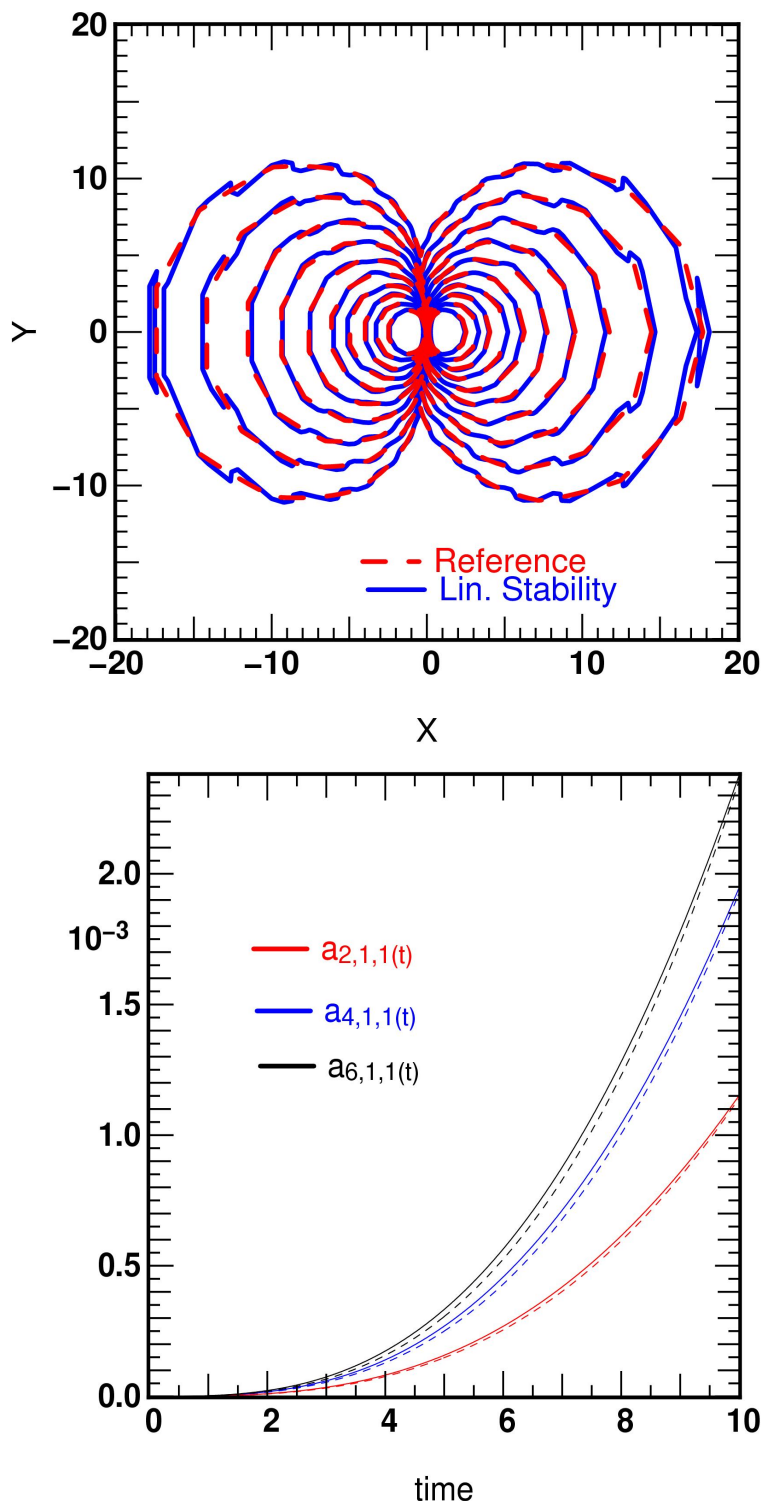


Figure 4.4: *En haut* : Réponse en potentiel d'une sphère de Plummer à un champ de force uniforme ($a_0 = 0.01$, $\omega = 0.01$). Le champ est orienté suivant la direction X . En rouge et trait pointillé, la réponse théorique pour $t=10$. En bleu et trait plein, la réponse obtenue à partir du code de stabilité linéaire au même instant. L'échelle des deux isocontours est identique et le calcul linéaire reproduit le résultat attendu. *En bas* : Evolution temporelle des coefficients $a_{j,\ell=1,m=1}$ pour $j=2,4,6$. En pointillés l'évolution attendue, en traits pleins l'évolution des coefficients calculés par le module linéaire.

4.3.2 Croissance adiabatique d'une sphère

L'un des objectifs à plus long terme est d'utiliser le calcul de la réponse du halo pour propager le comportement statistique des environnements mesuré au rayon de Viriel aux régions proches du disque. Pour ce faire, la dynamique des régions les plus internes du halo doit être bien résolue, spatialement bien sûr mais également temporellement, compte tenu des temps caractéristiques plus courts dans ces régions. Pour tester la capacité du modèle à pouvoir satisfaire ce cahier des charges, la réponse d'un halo à la croissance d'une sphère placée en son centre a été calculée via l'approche linéaire. Ce test ne constitue pas qu'une simple vue de l'esprit puisqu'il peut être ramené à l'étude de la contraction du halo de matière noire sous l'influence de la croissance d'un disque en son centre. Ce scénario permet en particulier de produire des courbes de rotation plates à partir de halos à large coeur (par ex. Blumenthal et al. (1986)).

Les comparatifs ont été effectués à l'aide de résultats fournis par John Magorrian et ceci de deux manières différentes. Les résultats non auto-consistants ont été comparés à des simulations à *particules perturbatives* (par exemple Leeuwin et al. (1993) et Leeuwin & Combes (1997)). Ce type de simulations repose sur un échantillonnage non pas de l'ensemble de la fonction de distribution du système (comme les simulations N-Corps classiques), mais sur un échantillonnage de la réponse du système par rapport à l'équilibre. En d'autres termes, ce type de simulations "peuple" les régions de l'espace des phases modifiées par l'évolution du système. Ce type de simulations est ainsi particulièrement approprié à l'étude de phénomènes fins et peu éloignés de solutions analytiques de l'équation de Boltzmann.

D'autre part, J. Magorrian a fourni des prédictions analytiques à ce problème, basé sur la méthode de Young (1980) développée pour prédire la réponse d'un système à la croissance adiabatique d'un trou noir central. Il s'avère que cette méthode est extensible à des perturbateurs autres que des trous noirs. Elle repose sur l'invariance de la fonction de distribution $f(I_r, L)$ où $I_r = (2\pi)^{-1} \oint v_r dr$ désigne l'action radiale déjà définie auparavant et L le moment angulaire, qui sont deux invariants adiabatiques du système. L'ajout d'un potentiel perturbateur va modifier l'énergie E d'une "étoile" en E^* de telle façon à ce que $I_r^*(E^*, L) = I_r(E^*, L)$. Compte tenu de $f^*(E^*, L) = f(E, L)$, il découle le nouveau profil de densité ρ^* . La solution ρ^* est obtenue par itération.

Modèle de Plummer

Le halo a d'abord été modélisé par une sphère de Plummer (dont les caractéristiques sont données par les équations 4.36 et 4.37), de rayon caractéristique et de masse unité. Le perturbateur a été modélisé par une sphère de rayon caractéristique 0.4 et de masse 0.01, dans les unités du halo. Compte tenu de la symétrie du problème, seule la réponse monopolaire a été calculée ($\ell = 0$). La base radiale utilisée fut celle de Weinberg et le calcul porta sur 20 termes radiaux. L'espace (E, L) fut échantillonné sur une grille 60x60. La croissance temporelle du perturbateur fut de type $3(t/t_{\max})^2 - 2(t/t_{\max})^3$ où $t_{\max} = 20$ (en unité de $\sqrt{b^3/GM}$ avec $G=1$) sur 256 pas de temps. Le calcul fut conduit à la fois dans le régime auto et non auto-consistant.

Les comparatifs sont présentés dans la figure 4.5. La méthode linéaire parvient clairement à reproduire les résultats obtenus avec les deux méthodes précitées. La simulation à particules perturbatives a été réalisée avec 1 million de particules et bien qu'elle soit par nature plus à même de modéliser cet accroissement qu'une simulation classique, les ef-

fets d'échantillonnages se font tout de même sentir dans les régions les plus centrales. Néanmoins, il apparaît que cette méthode et la méthode linéaire sont en bon accord. Ceci valide à nouveau la procédure de calcul du noyau de réponse **K**. Le régime auto-consistant a été comparé avec le résultat obtenu par la méthode de Young. Bien que le résultat fourni par la méthode linéaire soit légèrement en deçà du résultat théorique, le désaccord est de l'ordre de 1% pour les régions centrales et quasi parfait pour les régions les plus externes. Cet accord valide la procédure de calcul auto-consistant qui nécessite un emploi correct de la méthode itérative ou la méthode de Volterra, en plus d'un calcul précis du noyau. Seul la méthode de Volterra est présentée ici, mais la méthode itérative fournit le même résultat.

Modèle de Hernquist

Compte tenu de ces résultats très encourageant, la même test auto-consistant à été réalisée avec un modèle de Hernquist (Hernquist (1990)). Le potentiel de Hernquist est défini par :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r+a}. \quad (4.38)$$

Ce potentiel est plus piqué que le précédent, rendant critique l'échantillonnage en actions de ces régions pour le calcul de la réponse. Le halo est de masse $M=1$ et de rayon de coeur $a=1$. Le perturbateur fut choisi de masse $M=0.01$ et de rayon de coeur $a=0.25$. La base radiale adoptée fut celle de Hernquist car mieux adaptée à la reconstruction du profil. Les calculs portèrent sur les 15 premiers termes de cette base. La réponse fut calculée sur 512 termes pour $0 < t_{max} < 40$. L'espace (E, L) fut échantillonné sur une grille 60×60 pour $E > -0.95$ en unité ($G=1, M=1, a=1$). La réponse auto-consistante fut à nouveau comparée à la prédiction de la méthode de Young. Le résultat est représenté par la courbe rouge de la figure 4.6 (figure du haut).

Le résultat n'est clairement pas à la hauteur de la prédiction théorique. Si les régions externes ont l'air conformes à la prédiction, il n'en est pas de même pour les régions les plus internes. Compte tenu de la nature très piquée de ce potentiel, il est probable que ce désaccord est le fait d'un mauvais échantillonnage des régions centrales du halo. Pour confirmer cette hypothèse, l'échantillonnage en (E, L) précédent s'est vu étendu au coeur en lui adjoignant une région supplémentaire dont les énergies sont caractérisées par $-0.99 < E < -0.95$ et échantillonnée en 60×60 en énergie-moment angulaire. Le résultat est représenté par la courbe bleue de la même figure 4.6 (figure du haut). L'augmentation très significative de la réponse en densité au centre met en valeur l'importance d'un bon échantillonnage des régions centrales dans l'espace (E, L) , et ceci même si leur contribution à la masse totale du halo est faible.

La meilleure reconstruction qui fut obtenue à ce jour est représentée dans la figure 4.6 (en bas). Celle-ci met en jeu un échantillonnage (E, L) de taille $100 \times 100 \times 20$, composé de 20 sous-espace de (E, L) distribué logarithmiquement en énergie et pour $E > -0.999$. Un tel calcul n'est possible qu'en parallélisant les tâches de calcul du noyau sur chacun de ces sous-espace. En d'autres termes, un degré de granulosité supplémentaire au calcul parallèle a été ajouté. La réponse en densité a été calculée seulement sur les 10 premiers ordres radiaux et comparée à la formule de Young reconstruite à partir des 10 premiers termes de sa propre décomposition. La formule de Young est retrouvée à une dizaine de pourcent près, indiquant qu'une reconstruction parfaite est à portée de main.

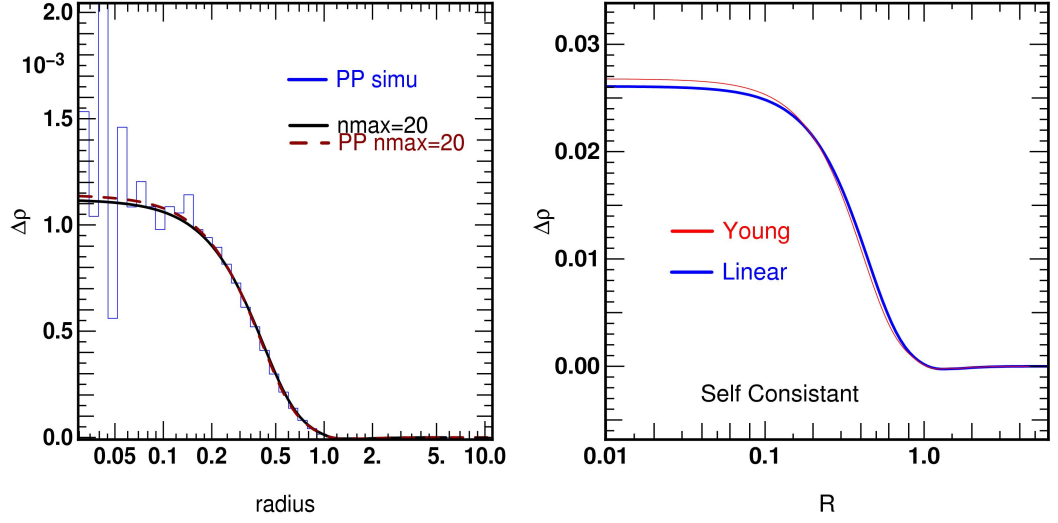


Figure 4.5: Calcul de la réponse d’une sphère de Plummer soumise à la croissance d’une autre sphère de Plummer. *En haut* : calcul non auto-consistant. La réponse linéaire (courbes noires) est comparée au calcul obtenu à partir de simulations aux “particules perturbatives” (histogramme bleu). La reconstruction du profil simulé à partir de sa décomposition sur la base radiale est également montré (courbe tiretée). *En bas* : calcul auto-consistant. La réponse linéaire (courbe noire) est comparé au modèle de Young (courbe rouge). L’écart au centre est de l’ordre de 1%.

4.4 Conclusions

Ce chapitre a présenté les détails pratiques de la mise en place du calcul de la réponse linéaire du halo à un champ de marée extérieur. La base biorthogonale de projection de la réponse a été explicité ainsi que le détails du passage à la représentation en angles-actions. Il aura également été exposé les “astuces” numériques permettant de résoudre le problème de l’intégrand oscillant apparaissant dans le calcul du noyau, ainsi que les deux méthodes équivalentes permettant de calculer la réponse à proprement dite. Enfin, l’implémentation a fait l’objet d’une double validation, en parvenant à reconstruire la dérive d’une sphère de Plummer dans un champ de force homogène et la réponse d’une sphère de Plummer à la croissance adiabatique d’une sphère en son centre. Ce dernier problème a également été abordé avec un modèle de Hernquist plus à même de représenter les halos de matière noire et a permis de mettre en lumière la nécessité de décrire la fonction de distribution du modèle avec une grande précision.

A ce stade, une étude en convergence plus poussée reste à faire : influence de la résolution temporelle, influence des ordres radiaux maximum, influence de l’échantillonnage en (E, L) , etc... De plus ces premiers calculs ont porté sur des harmoniques de bas ordres ($\ell = 0, 1$), hors il est entendu qu’à terme les calculs de réponse devront porter sur des échelles plus petites. Enfin, le calcul des opérateurs “source” et des opérateurs non linéaires n’a pas été abordé, bien qu’il ne diffère en principe que peu du calcul présenté ici.

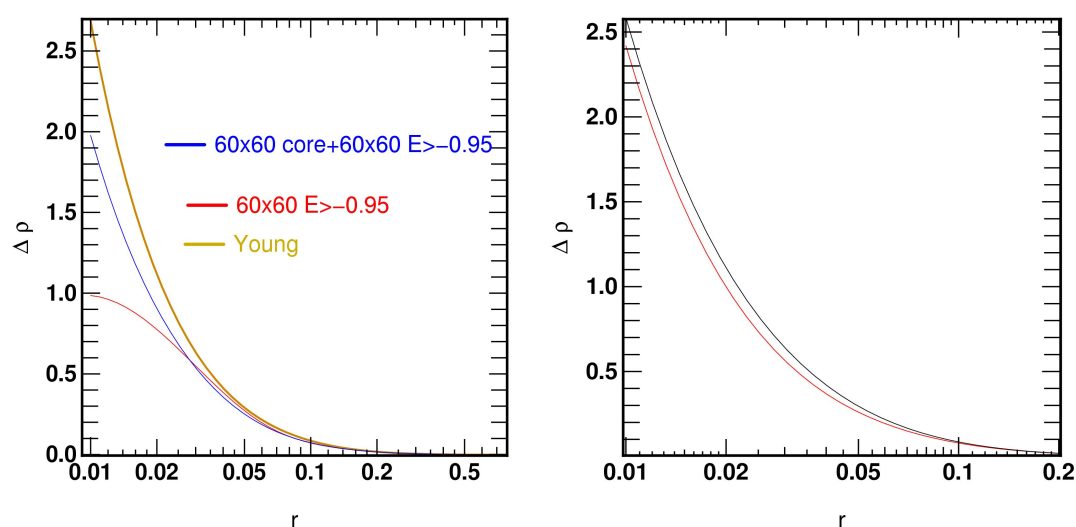


Figure 4.6: Calcul de la réponse d'une sphère de Hernquist soumise à la croissance d'une autre sphère de Hernquist. *En haut* : comparatif entre le résultat théorique obtenu par la formule de Young (courbe jaune), la réponse du modèle linéaire (courbe rouge) échantillonné à des énergies supérieures à -0.95 et la réponse du modèle linéaire (courbe bleu) précédent auquel un échantillonnage supplémentaire du coeur a été ajouté. Bien que la fraction de masse contenue dans le coeur est faible, sa contribution est cruciale pour le calcul de la réponse dans les régions les plus internes. *En bas* : comparatif entre le modèle de Young reconstruit avec $i < 15$ et la réponse du modèle linéaire. La réponse est retrouvée à 10% près.

Néanmoins, les résultats sont prometteurs, y compris sur des modèles à comportement singulier dans les régions centrales. De plus, l'implémentation parallèle autorise à penser que des calculs très précis peuvent être effectués sur les opérateurs de réponse. Compte tenu du fait que les calculs d'opérateurs ne doivent être faits qu'une seule fois, cet effort numérique nécessaire pour parvenir à de hauts niveaux de précisions apparaît raisonnable compte tenu de la large gamme de problèmes abordables par la suite, dont la propagation statistique des champs des marées. Enfin, la mise en place du calcul linéaire préfigure la mise en pratique de calculs aux ordres supérieurs. Ces derniers reposent sur les mêmes concepts et méthodes que ceux exposés dans ce chapitre, au nombre de couplages supplémentaires près.

5

Simulations de matière noire

Les chapitres 2 et 4 ont exposé la théorie associée à l'étude de la dynamique du halo "ouvert" ainsi que les premières étapes d'une mise en place pratique de cette théorie. Cette théorie requiert des "entrées" décrivant la statistiques des flux auxquels sont soumis les halos. Ces entrées sont fournies par les mesures dans les simulations cosmologiques.

L'un des premiers objectifs de cette thèse fut de simuler un volume d'univers suffisamment important pour réduire les effets de variance cosmique sur les mesures autour des halos. Le premier choix fut de produire des simulations constituées uniquement de matière noire. Ce type de simulations est simple à mettre en place contrairement à des simulations contenant du gaz, ces dernières nécessitant de prendre en compte de nombreux effets tels que la formation d'étoiles, la rétroaction, le rayonnement UV (voir par ex. Ostriker (1999) pour une revue). L'introduction de phénomènes baryoniques aurait significativement augmenté le niveau de complexité de façon non nécessaire à ce stade. L'emphasis étant mise sur l'impact dynamique des flux sur les halos, la prise en compte de la matière noire seule constitue une approximation raisonnable. De plus, le haut niveau de complexité des simulations baryoniques se traduit concrètement par une augmentation du temps de calcul nécessaire à leur production (d'un facteur 2 à 10 selon le type de simulations) et le volume simulé en aurait été réduit d'autant. Bien que l'utilisation de simulations baryoniques constitue un objectif à terme, l'ensemble des raisons précédentes ont amené à considérer seulement la matière noire.

Deux approches sont possibles : la génération d'un volume d'univers "monobloc" de très grand volume ou la génération d'un grand nombre de simulations de volume plus modeste. La première approche possède l'avantage de ne nécessiter que la production d'une seule simulation. Le grand volume permet d'avoir une très bonne représentativité de la répartition des vides et des zones surdenses dans l'univers. Enfin, un grand volume limite naturellement l'influence des répliqués dus aux conditions limites périodiques, communément utilisées dans les codes actuels. Toutefois, la génération de grandes simulations pose naturellement le problème de la résolution en masse, qui nécessite un très grand nombre de particules pour ne pas sacrifier cette résolution sur l'autel de la taille

de boîte. De telles simulations nécessitent des moyens matériels très importants, que ce soit dans leur production ou même leur analyse.

L’option retenue fut de produire une série de simulations plus modestes, où le faible nombre de particules est compensé par le petit volume simulé. Plus de 500 simulations de 2 millions de particules de matière noire ont été produites, avec une résolution en masse de $5 \cdot 10^9 M_\odot$. La production de ce jeu de simulations a été rendu possible en reliant trois codes publics au sein d’une chaîne de production automatique. Les conditions initiales furent générées à l’aide de GRAFIC1 (Bertschinger (2001)). Le code N-corps utilisé fut GADGET 1.1 (Springel et al. (2001)) dans sa version matière noire pure. Enfin, le détecteur de halos HOP (Eisenstein & Hut (1998)) permet d’extraire les objets formés dans les simulations. L’utilisation de codes publics implique une utilisation de type “boîte noire” de ces programmes, qui n’est pas sans poser de problèmes. A contrario, outre le fait que ce choix possède le mérite d’être efficace, ces codes sont reconnus et intensivement utilisés par la communauté garantissant leur fiabilité.

L’objectif de ce chapitre est dans un premier temps de décrire les différentes étapes de production, ainsi que les paramètres physiques et numériques qui ont été utilisés. Dans un second temps, la procédure d’extraction des halos est décrite, de même que quelques unes de leurs caractéristiques génériques auxquelles il sera largement fait référence dans l’ensemble des études décrites dans ce manuscrit.

5.1 Chaîne de production des simulations

La production de simulations à proprement dite se fait en deux étapes : génération des conditions initiales et intégration dynamique. Ces deux étapes ont été réalisées respectivement à l’aide des codes GRAFIC1 et GADGET, décrits ci-après.

5.1.1 Génération des conditions initiales par GRAFIC1

L’objectif de GRAFIC1 est de générer une réalisation à grand redshift du champ de densité de matière. Ce champ aléatoire est entièrement caractérisé par le spectre de puissance, $P(k)$, caractéristique d’un modèle d’univers. GRAFIC1 calcule $P(k)$ pour une cosmologie donnée et est ensuite capable de fabriquer un champ de densité initial conforme à ce spectre de puissance.

Définition du spectre de puissance

Le champ de densité initial est un champ aléatoire gaussien, communément décrit par le contraste de densité associé, $\delta(\mathbf{x})$:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (5.1)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne de l’univers. On nomme $\delta(\mathbf{k})$ sa transformée de Fourier, où \mathbf{k} désigne une fréquence spatiale. Un tel champ δ est entièrement caractérisé par sa fonction de corrélation à deux points $\xi(r)$ ou, de façon équivalente, par son spectre de Puissance $P(k)$, qui est la transformée de Fourier de $\xi(r)$. Pour un champ δ isotrope et homogène, contraste de densité et spectre de puissance sont reliés par (cf. par exemple

Peebles (1980), Peacock (1999)):

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle = P(k)\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}, \quad (5.2)$$

Par définition, $P(k)$ apparaît comme étant la variance du module de $\delta(\mathbf{k})$. Ces modes $\delta(\mathbf{k})$ étant de statistique gaussienne (et de moyenne nulle), $P(k)$ est la seule “entrée” requise par le processus de génération des conditions initiales. En revanche, la phase de ces modes n’est pas contrainte : c’est le tirage aléatoire de ces phases qui permet de générer des réalisations différentes d’un même champ initial, correspondant à des distributions relatives différentes des germes de structures. Dépendant entièrement du modèle cosmologique choisi, c’est le spectre de puissance qui fait du champ de densité initial un champ pertinent d’un point de vue physique. Par extension, c’est le spectre de puissance initial qui rend la simulation susceptible de représenter l’univers tel qu’il est observé.

Etape 1 : Calcul de $P(k)$

Dans un premier temps, GRAFIC1 génère le spectre de puissance conforme à un modèle d’univers donné. Cette dépendance à la cosmologie se traduit via la fonction de transfert $T(k)$ qui fournit le spectre de puissance initial (au sens des simulations) à partir du spectre de puissance primordial, $P_{\text{prim}}(k)$ (cf. par exemple Coles (2001)) :

$$P(k, z_i) = T(k, z_i)^2 P_{\text{prim}}(k), \quad (5.3)$$

où z_i désigne le redshift des conditions initiales. Le spectre de puissance primordial est invariant d’échelle

$$P_{\text{prim}}(k) = ak^n \quad (5.4)$$

avec $n = 1$ conformément aux modèles d’inflation actuellement privilégiés (cf. par exemple Coles (2001)). La fonction de transfert utilisée pour les présentes simulations est de type BBKS (Bardeen et al. (1986)). Le modèle cosmologique retenu pour la fonction de transfert est de type Λ CDM, dominé par la matière noire froide avec une constante cosmologique non nulle. Les paramètres associés sont $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_\Lambda = 0.7$, exprimés en unité de densité critique, avec une constante de Hubble égale à $H_0 = 70$ km/s/Mpc. Ces paramètres sont conformes aux contraintes observationnelles combinées du fond diffus cosmologique, des supernovae à grand redshifts et du comptage des amas. La normalisation du spectre de puissance primordial n’étant pas contrainte par les modèles théoriques, celle ci est fournie *à posteriori* par la mesure observationnelle des propriétés des amas. Cette normalisation est décrite par le paramètre σ_8 , la variance du champ de fluctuations lissé sur une échelle de $8h^{-1}$ Mpc. Suivant la prescription fournie par Eke et al. (1996) :

$$\sigma_8 = 0.52\Omega_m^{-0.52+0.13\Omega_m}. \quad (5.5)$$

la normalisation appliquée au spectre de puissance fut $\sigma_8 = 0.93$.

Etape 2 : génération du champ de densité initial

Dans un second temps, GRAFIC1 doit générer un champ de densité initial $\delta(k)$ dont le spectre de puissance est celui précédemment calculé. Dans un premier temps, le code génère des déplacements aléatoires qui constituent la seule source de différences entre

deux simulations de cosmologie identiques. Ces déplacements aléatoires constituent les germes des structures qui vont naître dans les simulations. Pour ce faire, le code produit une grille régulière de positions et génère un champ de fluctuation *blanc*, $\delta_1(\mathbf{x})$. Son spectre de puissance est donné par :

$$\langle \delta_1^2(k) \rangle = 1. \quad (5.6)$$

Dans un deuxième temps, GRAFIC1 convolue ce bruit blanc dans l'espace des positions par la transformée de Fourier de la racine carrée du spectre de puissance :

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta_1(\mathbf{x}) * \sqrt{F[P(k)](\mathbf{x})}. \quad (5.7)$$

Etant données les propriétés de la convolution dans l'espace de Fourier, $\delta(\mathbf{x})$ satisfait automatiquement le bon spectre de puissance. Le champ $\delta(\mathbf{x})$ fournit les positions initiales des particules, prêtes à être utilisées comme entrées de l'intégrateur.

Il est important de noter que les positions initiales des particules ne sont pas conformes au champ de force que chacune d'entre elles exercent sur ses voisines. Cet effet local induit une sorte de relaxation parasite des particules au démarrage des simulations, alors qu'elles se réarrangent sous l'effet de la gravitation. Cet effet pourrait être indésirable pour des études à très haut redshift ou sur des très grande échelles qui restent essentiellement linéaire au cours du temps. L'objet de ces simulations étant l'étude des halos déjà formés à bas redshift, cet effet est complètement dominé par les mécanismes d'effondrement non-linéaires.

5.1.2 Intégration cosmologique avec GADGET

L'objectif des intégrateurs numériques est de résoudre les équations de la dynamique cosmologique. Le schéma de résolution des équations diffère peu d'un code à l'autre et consiste en deux étapes :

1. le calcul des forces appliqués à une particule test par l'ensemble des autres particules dans la boîte.
2. la résolution des équations dynamiques en connaissant la force ressentie, afin d'obtenir la nouvelle vitesse et la position actualisée de cette particule test.

Alors que la deuxième étape est résolue de façon standard quel que soit le code, la première étape constitue le coeur des codes cosmologiques. Toute la difficulté inhérente de ces programmes consiste à déterminer les forces de façon efficace et précise. Alors que toute une série de méthodes existe, le code utilisé, GADGET 1.1, fait partie de la famille des code en arbres (ou *Tree Code*), où l'évaluation des forces se fait en subdivisant l'espace de façon hiérarchique.

Calcul des forces par un code en arbre

Ce type d'intégration numérique repose sur une division hiérarchique de la distribution des particules dans la simulation. L'espace y est subdivisé en cellules imbriquées, dont le dernier niveau de hiérarchie consiste en des cellules ne comptant que 0 ou 1 particule (Barnes & Hut (1986)).

Cet arbre de cellules est à la base du calcul des interactions dans ce type d'intégrateur. La force exercée par une cellule sur une particule test est donnée par le développement multipolaire du potentiel créé par les particules de la cellule : cette approche constitue une bonne approximation du potentiel pour peu que cette cellule soit suffisamment éloignée de la particule test. Si toutefois la cellule s'avère trop proche (ou de taille trop importante), le détail de la distribution des particules doit être connu. Ce degré de précision supplémentaire est obtenu en considérant les cellules filles de la cellule de départ, dont le développement multipolaire est également accessible. La procédure est récursivement appliquée si nécessaire jusqu'au calcul d'interactions directes à deux corps pour des particules très proches.

schéma d'intégration temporelle

Disposant du champ de force appliqué à chaque particule, GADGET résout les équations de la dynamique (cosmologique) et déplace les particules. Le schéma d'avancement temporel des particules est de type "leapfrog", où la position d'une particule au temps $n+1$ est déduite de sa vitesse au temps $n+1/2$ (cf. par exemple Ninin (1999)):

$$x_{n+1} = x_n + u_{n+1/2}\Delta p. \quad (5.8)$$

Ici, x_n désigne la position comobile, Δp l'unité temporelle et u_n est la vitesse associée $u = dx/dp$, déduite du champ de force appliqué à la particule.

Le schéma d'intégration temporel est dit adaptatif : chaque particule se voit attribuer un pas de temps qui lui est propre, dépendant de l'accélération qui lui est appliquée. Typiquement une faible accélération implique de faibles déplacements et nécessite une résolution temporelle moindre que celle d'une particule soumise à de forts champs. Le type de pas de temps retenu est de type $1/a$ où a désigne l'accélération à laquelle une particule est soumise (cf. Power et al. (2003) pour un comparatif exhaustif des différents types de pas de temps).

Paramètres des simulations

Les simulations produites ont une taille comobile de $50 h^{-1} \text{ Mpc}^3$ aux conditions limites périodiques. Chacune des simulations contient 128^3 (2097152) particules de matière noire. Cette petite taille de boîte résulte d'un compromis entre obtenir une résolution raisonnable à l'échelle des halos de galaxies type L^* et éviter les effets de bords induits par les réplicats périodiques.

Le potentiel appliqué à chaque particule est lissé pour éviter les effets de relaxations à deux corps. Le lissage retenu est égal à $1/20$ ème de la distance interparticulaire moyenne et correspond à une longueur comobile de $\epsilon = 19 h^{-1} \text{ kpc}$: cette longueur constitue de fait la résolution spatiale de la simulation.

Comme mentionné précédemment, les paramètres cosmologiques appliqués sont de type ΛCDM avec $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_v = 0.7$ et $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$. L'objet de ces simulations étant les halos déjà formés, les simulations ont été poussées jusqu'à $z=0$, avec une emphase sur les bas redshifts avec 25 snapshots produits entre $z=2$ et $z=0$. L'ensemble des paramètres sont consignés dans la table 5.1.

Les codes GRAFIC1 et GADGET ont ainsi été utilisés pour produire 570 simulations de matière noire pure, chacune avec des réalisations différentes des fluctuations initiales

mais obéissant toutes au même spectre de puissance. Un exemple de simulation est donné dans la figure 5.1. La production et la réduction à proprement dites ont été réalisées sur la ferme de calcul Pleiades de l’Observatoire de Strasbourg et furent entièrement parallélisées pour profiter pleinement de ces ressources. Chacune de ces simulations fit l’objet d’un “pré-traitement” destiné à identifier les halos formés; cette tâche est décrite dans la section suivante.

Paramètre	Valeur
Ω_m	0.3
Ω_v	0.7
Ω_b	0.
H_0	$70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
σ_8	0.928
z_{initial}	26.53
L_{Box}	$50 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$
ϵ_{smooth}	$19 \text{ h}^{-1} \text{ kpc}$
N_{part}	128^3
m_{part}	$0.4953 \cdot 10^{10} \text{ h}^{-1} M_{\odot}$

Table 5.1: Les différents paramètres des simulations. Les quantités Ω_m , Ω_v et Ω_b désignent respectivement les densité d’énergie de la matière, du vide et des baryons. H_0 désigne la constante de Hubble tandis que σ_8 désigne la normalisation du spectre de puissance. La grandeur L_{Box} représente la taille de boîte comobile tandis que ϵ_{smooth} désigne la longueur de lissage du potentiel de chaque particule. N_{part} représente le nombre total de particules de matière noire de masse m_{part} .

5.1.3 Détection des halos par HOP

Algorithme de détection

L’identification des halos au sein des simulations a été réalisé à l’aide du code public HOP, développé par Eisenstein & Hut (1998). Le principe de base de cet algorithme consiste à assimiler les halos à des pics du profil de densité dans la boîte.

Ce code procède en trois étapes. Premièrement, il assigne une densité à chaque particule à partir des positions des N_{hop} plus proches voisines. La densité est calculée à l’aide d’un noyau attribuant un poids unitaire à toute particule à distance nulle de la particule test et un poids nul à toute particule éloignée d’une distance plus grande que la N_{hop} ème voisine. Connaissant les densités associées à chaque particule, celles-ci sont regroupées de proche en proche (*hopping* en anglais) en liant chaque particule à sa voisine la plus dense, jusqu’à ce qu’une particule se trouve être la plus “dense” de ses N_{dens} voisines.

A ce stade, toute particule fait partie d’un groupe. Ces groupes vont être associés ou démantelés selon l’amplitude de leur pics relativement à différents seuils (cf. figure 5.2). Une première sélection est faite en excluant toutes les particules dont la densité est inférieure à δ_{outer} . Ces particules sont dites “de champs” et ne peuvent être associées à un halo. Tous les groupes sont alors constitués de particules ayant au moins cette

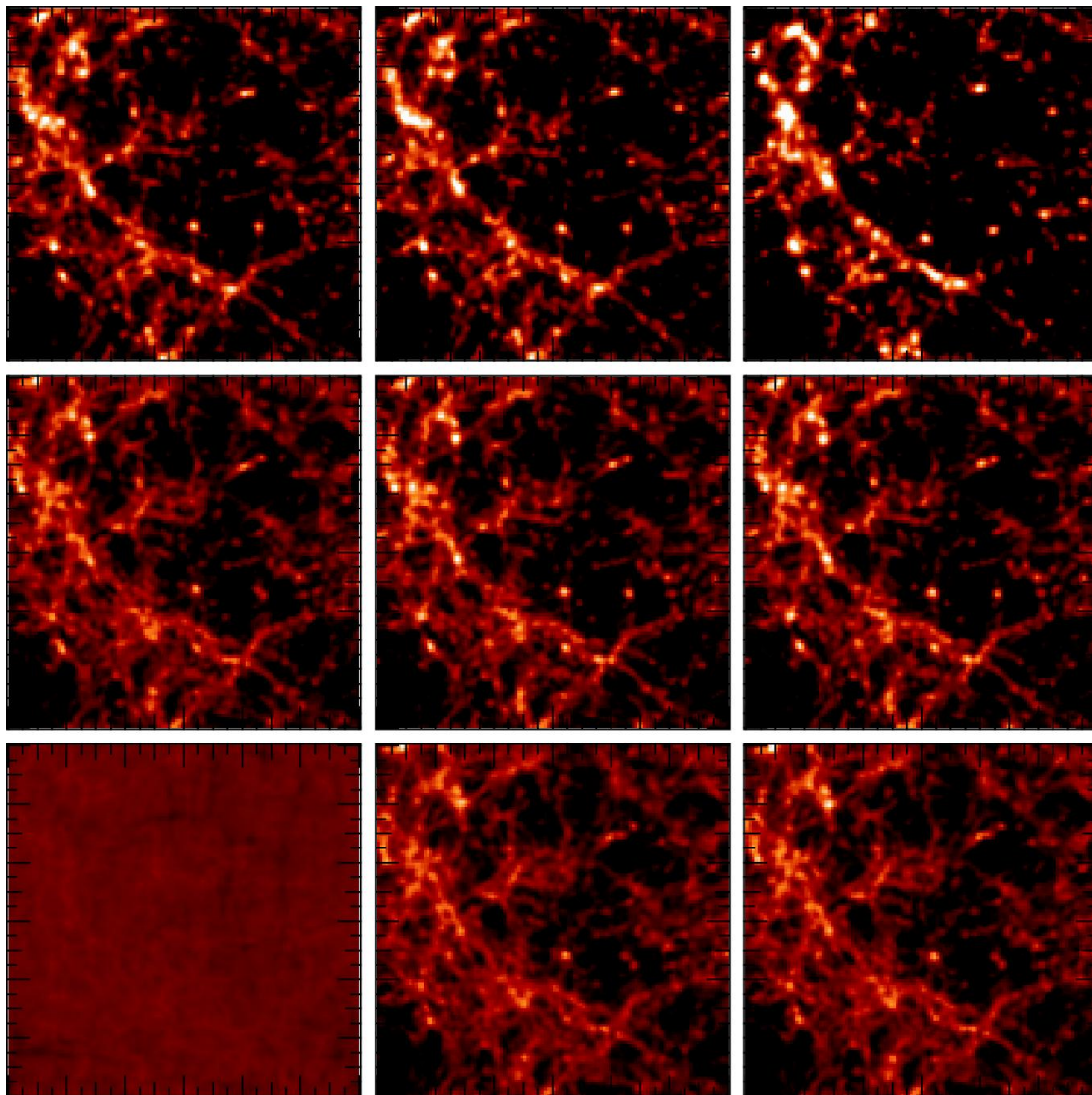


Figure 5.1: Un exemple d'évolution temporelle de la densité comobile dans une simulation cosmologique. Chaque carte fait $50 h^{-1}$ Mpc de côté. La cosmologie est de type Λ CDM. L'évolution temporelle va de bas en haut et de gauche à droite. La première carte représente les conditions initiales à $z=26$. La dernière carte représente la densité "actuelle" à $z=0$. Les structures se font de plus en plus denses à mesure que le temps s'écoule, tandis que la quasi homogénéité initiale fait place à un univers de plus en plus contrasté.

densité. Ensuite, seuls les groupes dont la densité maximale est supérieure à un seuil δ_{peak} sont définis comme halos. Toutefois, un même halo peut posséder plusieurs maxima locaux dont la densité dépasse ce seuil. Ces structures internes au halo vont être séparées au vu de ce seul critère. Pour éviter cet effet indésirable, chaque particule d'un groupe ayant une particule d'un autre groupe dans ses N_{merge} voisines constitue un membre d'une "paire de bordure". HOP associe à cette paire une densité égale à la moyenne des densités des deux particules. Si cette densité est supérieure à un seuil δ_{saddle} , HOP identifie les deux groupes comme des maxima locaux et regroupe leurs particules dans un seul halo. Finalement les groupes dont la densité maximale est inférieure à δ_{peak} sont rejetés, hormis ceux partageant une "paire de bordure" avec un groupe satisfaisant ce critère. Dans ce cas les particules des deux groupes fusionnent en un seul.

Paramètres de HOP

Six paramètres gèrent cet algorithme (N_{hop} , N_{dens} , N_{merge} , δ_{outer} , δ_{peak} , δ_{saddle}). Eisenstein et Hut ont démontré qu'un seul de ces paramètres est réellement critique, δ_{outer} : ce seuil étant un critère de réjection des particules, il influe directement sur la masse des halos détectés. Les paramètres utilisés pour les présentes simulations sont ceux recommandés par les auteurs : $N_{\text{hop}} = 16$, $N_{\text{dens}} = 64$, $N_{\text{merge}} = 4$, $\delta_{\text{outer}} = 80$, $\delta_{\text{peak}} = 3\delta_{\text{outer}}$, $\delta_{\text{saddle}} = 2.5\delta_{\text{outer}}$, où δ_{outer} est exprimé en unités de la densité moyenne dans la boîte. Avec ces paramètres, la détection donne des résultats similaires à l'algorithme Friend-of-Friend tout en évitant les groupes artificiellement reliés par des ponts de particules. Un exemple d'identification des halos à $z=0$ dans une simulation est donné en figure 5.3. Dans ce manuscrit, les études sont généralement limitées aux objets possédant plus de 1000 particules ($5 \cdot 10^{12} \text{ M}_{\odot} h^{-1}$) pour limiter les effets de résolution. En moyenne 170 halos répondent à ce critère par simulation produite, conduisant à un jeu total de 97000 halos disponibles.

5.2 Spécificités liées aux séries de simulations

Avantages pratiques

Le choix de produire de "petites simulations" en série s'est posé en alternative à la production de grandes simulations, plus lourdes à mettre en place. L'analyse d'une telle série présente l'avantage de permettre un post-traitement efficace. Ainsi, les analyses peuvent être classées en deux types, qui diffèrent essentiellement sur les échelles spatiales qui sont impliquées:

- les analyses *globales*, portant sur les boîtes entières. Les mesures statistiques type spectre de puissance ou fonctions de corrélations appartiennent à cette famille, ainsi que la procédure de détection et d'extraction des halos.
- les analyses *halos par halos*. Après construction d'un catalogue de halos (et éventuellement des propriétés de leurs environnements), les propriétés globales des simulations dont ils ont été extraits importent peu.

D'un point de vue pratique, le deuxième type de traitement se prête naturellement à la *parallélisation des tâches*, où chaque processeur se voit attribuer un halo à analyser. En ce sens, une série de petites simulations diffère peu d'une grande simulation. En

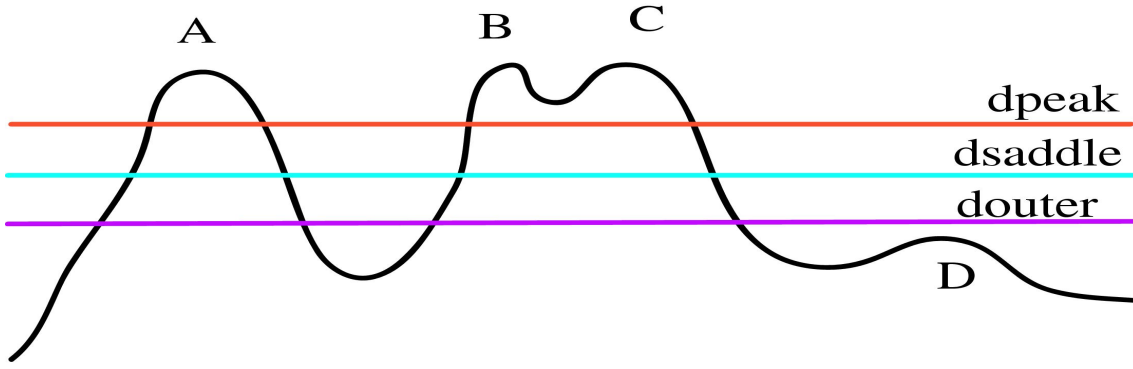


Figure 5.2: Utilisation des seuils par HOP. La ligne noire représente le profil de densité. Un pic de densité (ou groupe) est détecté comme halo si sa particule la plus dense est plus dense que δ_{peak} : les pics A, B, C répondent à ce critère. Deux pics sont considérés comme des surdensités locales d'un halo si la densité de leurs particules appariées (équivalent à un point selle) est supérieure à δ_{saddle} : B et C fusionneront comme un halo tandis que A est distinct. Enfin les groupes de densité inférieure à δ_{outer} sont rejetés. Ne reste au final que les halos A et B+C.

revanche, la parallélisation des analyses globales sur une boîte s'avère être non triviale à implémenter, à fortiori sur des codes utilisés en "boîte noire". L'utilisation d'un ensemble de N simulations de tailles modestes, indépendantes les unes des autres, introduit une segmentation des tâches que n'autorisent pas forcément les grands volumes simulés. Ainsi, différentes boîtes sont réduites de façon simultanée sans besoin de partager entre elles la position de leurs particules par exemple. Cette remarque vaut essentiellement pour la détection des halos qui peut alors être menée simulation par simulation, de façon distribuée et sur des machines relativement modestes en terme de mémoire et de rapidité. De façon générale, l'ensemble des mesures présentées dans ce manuscrit ont été réalisées sur la ferme de calcul *Pleiades* de l'observatoire de Strasbourg, permettant une réduction simultanée et efficace du grand nombre de simulations à disposition.

Inconvénients physiques ?

L'utilisation de séries de simulations de taille plus modeste n'est toutefois pas complètement équivalente à l'utilisation d'une grande simulation. Par exemple, les petites simulations sont plus sensibles aux répliquats induits par les conditions aux limites périodiques. L'utilisation de boîte de $50 \text{ Mpc}^3 h^{-1}$ constitue un volume de boîte limite en terme d'influence des répliquats. Toutefois, les études portant essentiellement sur des propriétés à petite échelle, l'impact de tels effets peut être considéré comme peu important.

L'effet de petites boîtes est en revanche clairement limitant pour la gamme de masses des halos pouvant se former. Les halos massifs sont le résultat de surdensités de forte amplitude dans les conditions initiales. Ces pics induisent nécessairement une forte variation du champ dans les petites boîtes simulées et la condition de quasi homogénéité des conditions initiales n'est plus remplie. Par conséquent, de telles surdensités n'apparaissent pas dans les conditions initiales et chaque simulation présente un déficit de halos massifs,

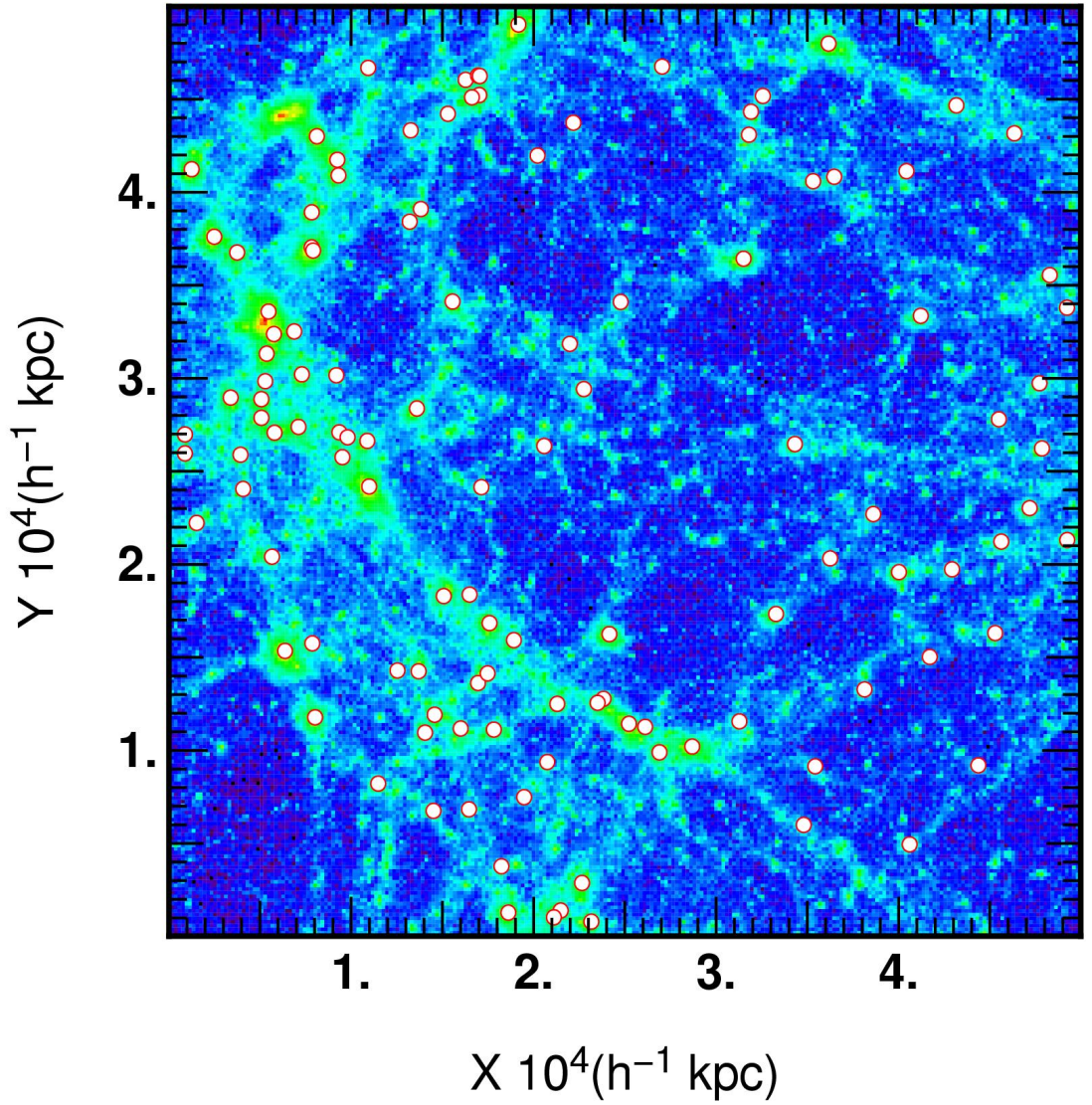


Figure 5.3: Un exemple d'identification des halos par l'algorithme HOP. La carte représente le log de la densité de matière projetée à $z=0$. La boîte simulée fait $50h^{-1}$ Mpc de côté. Les points représentent les 120 plus gros halos détectés par HOP dans cette simulation. Les halos sont clairement identifiés par cet algorithme.

déficit qui n'est pas compensé par l'accumulation des simulations. L'effet complémentaire est également vrai : de telles simulations ne présentent pas de grands vides, pour les mêmes raisons que celles mentionnées précédemment. Typiquement, la taille des vides observés dans les distributions de galaxies est de l'ordre de 50 Mpc (cf. par exemple Rood (1988)), précisément la taille d'une des simulations présentes. Par conséquent, une série de simulations de petit volume conduit à un univers *sur-homogène*.

L'objet principal des études présentes porte sur les halos et leur environnement et il est raisonnable d'estimer que ces petites échelles ne sont pas fortement influencées par ces effets de petite boîte. Toutefois, ces derniers constituent une motivation supplémentaire pour réaliser à terme les études de flux sur de grands volumes simulés.

5.3 Mesures statistiques dans les simulations

Cette section présente trois mesures “classiques” faites sur les simulations et les halos qui s'y sont formés : l'évolution du spectre de puissance, la fonction de masse des halos et la distribution du paramètre de spin. Ces mesures ont été effectuées principalement à titre de vérification du bon déroulement de la procédure de génération des simulations.

La dernière mesure porte sur le rayon de Viriel des halos, qui bien que n'étant pas à proprement parler une mesure usuelle, occupe une place prépondérante dans l'ensemble des études présentées dans ce manuscrit et doit être défini.

5.3.1 Evolution du spectre de Puissance

La mesure du spectre de puissance $P(k)$ en fonction du redshift constitue l'un des tests de base du bon déroulement d'une simulation. Dans le régime linéaire ($z \gtrsim 10$ pour les échelles considérées), $P(k)$ augmente globalement au cours du temps, reflétant la croissance des surdensités primordiales sous l'effet de la gravitation. Le spectre de puissance attendu découle aisément du spectre de puissance des conditions initiales :

$$P(k, z) = \frac{(1 + z_i)^2}{(1 + z)^2} P(k, z_i). \quad (5.9)$$

A plus bas redshift, le spectre de puissance se déforme : la puissance associée aux petites échelles est augmentée par rapport à celle des grandes échelles. La croissance de ces petites structures bascule dans un régime non linéaire. Au cours du temps, cette non linéarité se propage aux structures de plus en plus grandes. Des prescriptions sur le comportement non-linéaire du spectre de puissance ont été proposées par exemple par Jain et al. (1995), déduites à partir de simulations numériques.

La figure 5.4 montre le spectre de puissance moyen mesuré dans 200 simulations ($50 h^{-1} \text{ Mpc}^3$, 128^3), à un redshift $z = 2.25$. Les prédictions linéaire et non-linéaire du spectre de puissance y sont également représentées. A ce redshift, une large fraction des échelles sont passées dans le régime non-linéaire. Le spectre de puissance moyen mesuré dans ces simulations suit très précisément le modèle non-linéaire jusqu'à la fréquence de Nyquist, preuve du bon déroulement de la croissance des surdensités. De plus, la dispersion sur les spectres de puissance mesurés est de faible amplitude, confirmant que la croissance des structures se fait de façon similaire dans toutes ces simulations.

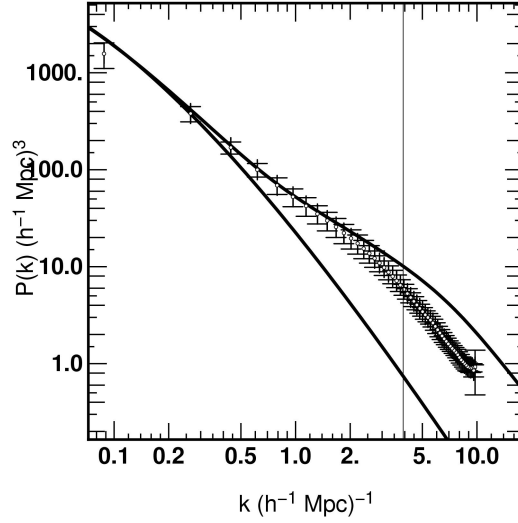


Figure 5.4: Spectre de puissance mesuré à $z=2.25$ et moyenné sur 200 simulations. La ligne verticale désigne la fréquence de Nyquist de la mesure. Les barres d'erreurs représente la dispersion à 1σ de la mesure. Les lignes pleins représente respectivement le spectre de puissance linéaire et non-linéaire théorique. L'évolution non-linéaire de la croissance des structures est reproduites par les simulations.

5.3.2 Fonction de Masse des halos

La fonction de masse est définie comme la densité en nombre des halos par intervalle de masse. La mesure de cette quantité permet de vérifier que l'évolution non-linéaire des structures est correctement reproduite dans les simulations. La comparaison de la fonction de masse avec les modèles permet également de déterminer l'intervalle de masse sur lequel l'échantillon de halos est complet.

La fonction de masse mesurée dans les simulations est historiquement comparée à la formule de Press & Schechter (1974). Dans cette approche, une surdensité, de masse M à très haut redshift, est susceptible de s'effondrer en un halo si sa densité est supérieure à une densité seuil δ_c . En décrivant la densité comme un champ gaussien lissé sur une échelle contenant la masse M , on peut prédire le nombre de surdensités dépassant ce seuil et, par extension, le nombre de halos ayant cette masse. Dans ce formalisme, la densité en nombre de halos ayant une masse M est donnée par (cf. par exemple Scannapieco & Barkana (2002)):

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\bar{\rho}}{M} \frac{d\sigma^2(M)}{dM} f(\delta_c, \sigma(M)). \quad (5.10)$$

où $\sigma^2(M)$ est la variance de la masse M contenue dans une sphère de rayon r . Cette variance est liée au spectre de puissance par :

$$\sigma^2(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk P(k) W^2(kr). \quad (5.11)$$

$W(x) = 3(\sin(x)/x^3 - \cos(x)/x^2)$ est la transformée de Fourier du filtre créneau sphérique. La fonction f est donnée par :

$$f(\delta_c, \sigma(M)) = \frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)^3} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right). \quad (5.12)$$

La figure 5.5 présente cette comparaison avec la fonction de masse sur 300 simulations. L'accord est qualitativement correct. La fonction de masse mesurée décroche de la prédiction à partir de $M \sim 5 \cdot 10^{14} M_\odot$: le volume fini des simulations empêche la formation de halos de très grande masse, d'où cette différence avec formule théorique. Pour les faibles masses, la formule de Press-Schechter surestime au contraire d'un facteur 1.7 la densité de petits halos. Cette différence a déjà été rapportée par Gross et al. (1998) par exemple.

Ce désaccord paraît évident dans la représentation de la fonction de masse suggérée par Jenkins et al. (2001) (même figure, panneau de droite) :

$$f(\sigma(M)) = \frac{M}{\bar{\rho}} \frac{dn}{d(\ln \sigma(M))^{-1}}. \quad (5.13)$$

Dans cette représentation, la formule de Press-Schechter surestime clairement le nombre de halos de faibles masses. Sur la même figure est représenté l'ajustement proposé par Jenkins et al. (2001), obtenu à partir de simulations numériques. Les résidus entre le fit et la fonction de masse mesurée sont de l'ordre de 10% pour des halos de masses inférieures à $3 \cdot 10^{14} M_\odot$. Ces résidus sont largement plus faibles que ceux de la formule Press-Schechter et conformes à ceux trouvés par les auteurs. Cette masse de $3 \cdot 10^{14} M_\odot$ constitue la limite au delà de laquelle l'échantillon de halos n'est plus complet. Néanmoins, la densité de halos de masses inférieures est conforme à celle décrite dans la littérature et conforte l'hypothèse d'un bon déroulement des simulations.

5.3.3 Distribution du paramètre de Spin

La mesure de la distribution des spins des halos est une autre des mesures classiques pratiquées sur les simulations et il a été démontré que cette distribution est peu sensible au redshift ou à la cosmologie par exemple. Cette quantité s'avère néanmoins fondamentale puisqu'elle permet par exemple aux modèles semi-analytiques de formation des galaxies de prédire la taille des disques de galaxies au sein des halos de matière noire. Enfin, la mesure du spin propre des halos est intensivement utilisée dans l'étude de l'anisotropie des flux et la mesure présente valide la procédure employée.

Le définition retenue du paramètre de spin d'un halo est celle proposée par Bullock et al. (2001):

$$\lambda' = \frac{J}{\sqrt{2} M V R_{200}}, \quad (5.14)$$

où J désigne le moment angulaire à l'intérieur de la sphère de rayon R_{200} , avec une masse M et une vitesse associée $V^2 = GM/R_{200}$. Cette deuxième définition diffère de la définition standard du paramètre de spin (Peebles (1969)):

$$\lambda = \frac{J\sqrt{E}}{GM^{5/2}}, \quad (5.15)$$

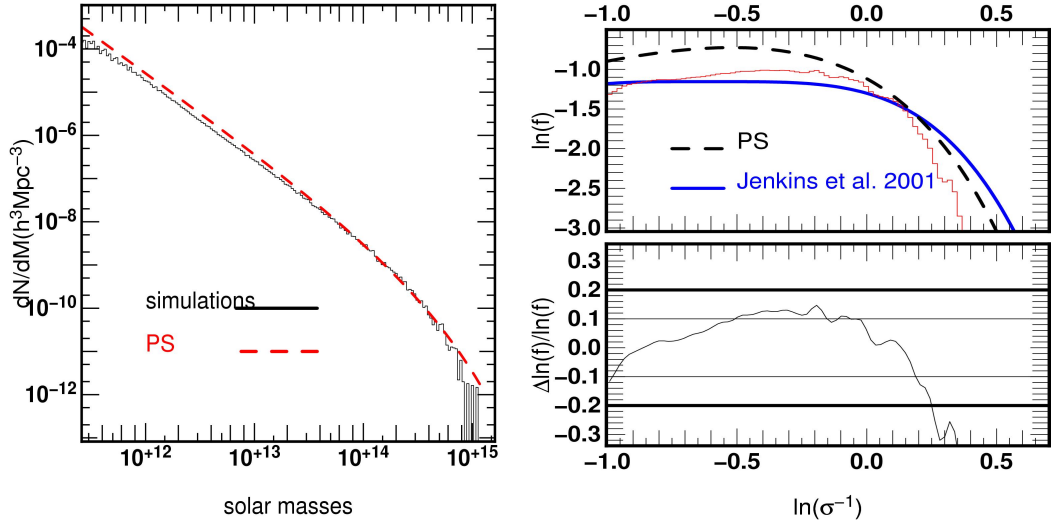


Figure 5.5: Comparaison de la fonction de masse mesurée à $z=0$ dans 300 simulations aux prédictions théoriques. *A gauche* : les mesures comparées au modèle Press-Schechter. Le modèle Press-Schechter surestime d'un facteur 2 le nombre de halos de petites masses. *A droite* : les mesures comparées au modèle de Jenkins et al. L'agrément entre les mesures est à mieux de 20 %, conformément aux mesures des auteurs.

où E est l'énergie totale du système. Cette définition s'avère plus difficile à calculer en pratique, nécessitant en particulier de déterminer l'énergie du système. Par exemple, le calcul du potentiel peut s'avérer particulièrement fastidieux pour des halos baignant dans un environnement très fourni en satellites. La définition λ' présente l'avantage d'être plus simple à calculer sans induire de grandes différences avec la définition usuelle : selon Bullock et al. (2001), λ' se réduit à λ pour une sphère isotherme tronquée et les deux quantités sont quasiment égales pour le profil NFW.

La distribution du paramètre λ' mesuré dans le jeu de simulations est donnée par la figure 5.6. Cette distribution peut être ajustée par une loi log-normale de type :

$$p(\lambda')d\lambda' = \frac{1}{\lambda'\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{\ln^2(\lambda'/\lambda'_0)}{2\sigma^2}\right] d\lambda', \quad (5.16)$$

ayant pour paramètres $\lambda'_0 = 0.0347 \pm 0.0006$ et $\sigma = 0.63 \pm 0.02$. Ce résultat est un résultat classique issu des simulations cosmologiques (Bullock et al. (2001), Peirani et al. (2004), Ninin (1999)). Les valeurs d'ajustement présentes sont légèrement différentes de celles suggérées par exemple par Peirani et al. (2004) ($\lambda'_0 = 0.035$ et $\sigma = 0.57$), mais la figure 5.6 indique clairement que la dépendance au paramètre σ n'influe que peu sur l'ajustement.

En plus de retrouver un résultat standard, cette mesure s'avèrera cruciale pour les mesures de flux anisotropes qui font intervenir le spin des halos et la présente étude suggère que cette mesure est faite avec précision.

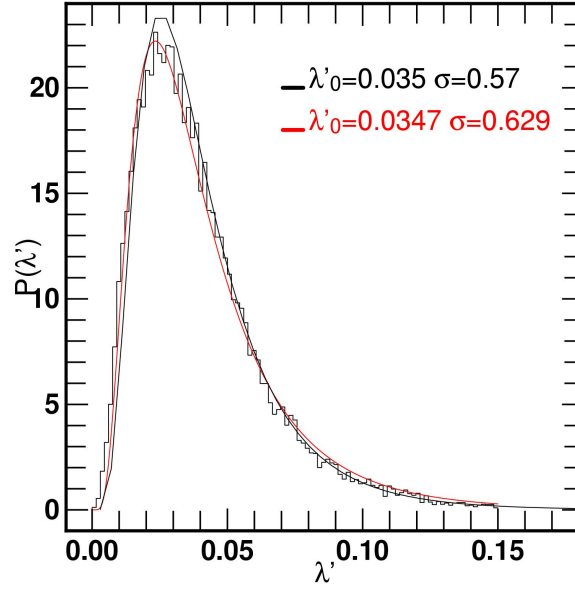


Figure 5.6: Distribution du paramètre de spin λ' mesuré dans 300 simulations à redshift $z = 0$. La distribution est ajustée par une loi log-normale. En rouge, le fit lognormal sur les données. En noir un modèle suggéré par Peirani et al. (2004). Les valeurs de l'ajustement trouvées sont parfaitement conformes à celles publiées dans la littérature.

5.3.4 Rayon de Viriel des halos

Les études faites sur les halos font fréquemment référence au rayon R_{200} , abusivement dénommé *rayon de Viriel*. Le rayon R_{200} est une mesure de la taille du halo et servira en particulier à définir la frontière entre le halo et le milieu extérieur. Ce rayon est défini comme le rayon à l'intérieur duquel le contraste de densité est de 200 :

$$\frac{M(r < R_{200})}{4/3\pi R_{200}^3} = 200\bar{\rho}. \quad (5.17)$$

Ce contraste de 200 provient du modèle d'effondrement sphérique dans un univers en expansion qui prévoit un contraste de densité final de l'ordre de 180 pour $\Omega = 1$ (cf. par exemple Peacock (1999)). En règle générale, le halo est effectivement virielisé à l'intérieur de ce rayon (Tormen et al. (1997)), bien que n'importe quelle structure possède un tel rayon, qu'elle soit virielisée ou non, compte tenu de la définition retenue. On associe fréquemment à ce rayon une vitesse *de Viriel*, simplement égale à la vitesse circulaire à ce rayon :

$$V_c^2 = \frac{GM(r < R_{200})}{R_{200}}. \quad (5.18)$$

La figure 5.7 présente la dépendance en masse du rayon de Viriel et de la vitesse de Viriel, mesurée à $z=0$ pour 10 000 halos. Ces halos répondent à des critères restrictifs sur leur histoire de formation : seuls les halos qui accrètent moins de $5 \cdot 10^{12} h^{-1} M_\odot$ entre $z = 1$ et $z = 0$ sont considérés, pour une masse à $z=0$ inférieure à $10^{14} h^{-1} M_\odot$. Ces critères sont rappelés dans le chapitre 9. La masse du halo est la masse fournie par

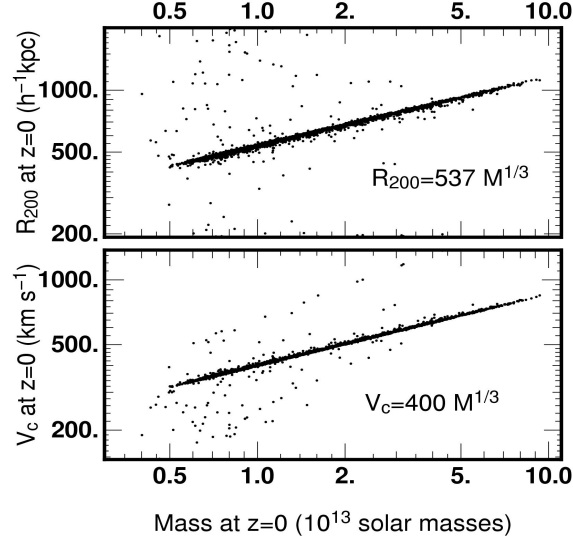


Figure 5.7: La distribution du rayon de Viriel R_{200} et de la vitesse de Viriel V_c des halos en fonction de la masse des halos fournie par HOP. Les mesure a été faite sur 10 000 halos. Les critères de sélections sur les halos sont décrits dans la section 9. Les deux lois d'ajustement en fonction de la masse (exprimée en $10^{13}h^{-1}M_{\odot}$) sont également précisées pour R_{200} en (h^{-1} kpc), V_c en $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

HOP. Les dépendances en masse des deux quantités sont bien définies et peuvent être ajustée par les deux relations suivantes:

$$R_{200} = 537M^{1/3}, \quad (5.19)$$

$$V_{200} = 400M^{1/3}, \quad (5.20)$$

où les rayons sont exprimés en h^{-1} kpc, les vitesses en $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et les masses en $10^{13}h^{-1}M_{\odot}$. Les dépendances en $M^{1/3}$ sont conformes avec les dimensions des deux quantité R_{200} et V_{200} . Dans ce manuscrit, ces deux grandeurs seront utilisées comme grandeur de normalisations et comme unités, qui, de par les relations précédentes, peuvent être interprétées en terme de masses de halos.

5.4 Résumé et objectifs

Plus de 500 simulations de matière noire pure, contenant 128^3 particules dans des boîtes de $50 \text{ Mpc}^3 h^{-1}$ ont été produites à l'aide de GRAFIC1 et GADGET. Près de 100 000 halos de masse supérieure à $5 \cdot 10^{12}M_{\odot}$ y ont été détectés à l'aide de l'algorithme HOP. Ces simulations ont été validées par la mesure du spectre de puissance, de la fonction de masse des halos et la distribution du paramètre de spin.

Ce large jeu de simulations a pour but de réduire au minimum les effets de variances cosmique et ont été exploitées pour les études statistiques décrites dans les sections suivantes. En particulier, elles auront permis de mettre en évidence la nature anisotrope de

l'accrétion par les halos et de poser les premières contraintes sur la fonction de distribution de cette matière accrétée.

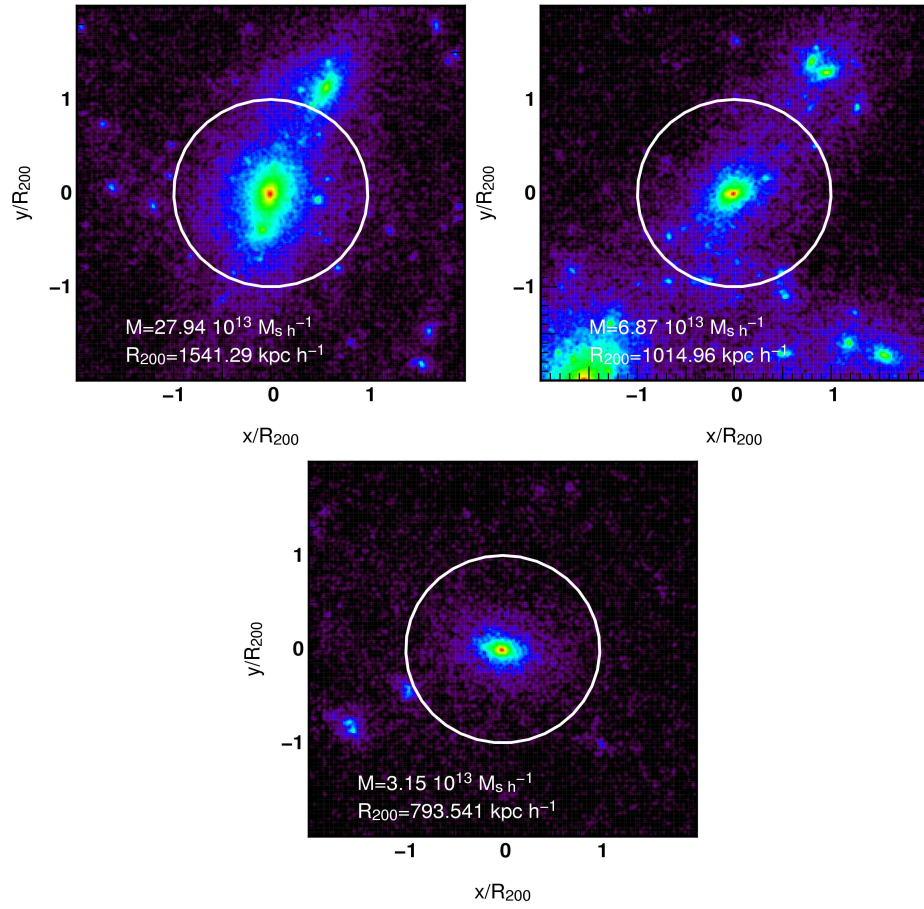


Figure 5.8: Trois exemples de halos détectés dans une simulation 128^3 , $50\text{Mpc}^3 h^{-1}$ à $z=0$. Les distances sont exprimées en unités de R_{200} . Le cercle représente la sphère de rayon R_{200} , centrée sur le centre de masse du halo. Les masses et les rayons de Viriel de chacun des trois halos sont mentionnés.

6

Accrétion anisotrope par les halos

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une propriété simple de l'accrétion, son degré d'anisotropie. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (Aubert et al. (2004)), jointe à cette section et de larges références seront faites aux [figures](#) incluses dans cet article.

La mesure d'anisotropie peut être considérée d'ordre 0 dans la caractérisation du terme source nourrissant les halos¹ : seule la direction d'incidence importe, laissant de côté des mesures plus fines telles que la cinématique ou les échelles caractéristiques de l'accrétion. Bien que cette mesure soit simple dans son principe, il n'existe pas d'a priori ferme sur la nature isotrope (ou non) du flux de matière noire. Sur les très grandes échelles (> 100 Mpc), la distribution de l'univers est homogène et isotrope. C'est un fait vérifié observationnellement, via les grands relevés de galaxies qui montrent qu'aucune ligne de visée ne se distingue des autres. Ce comportement hautement régulier est conforme au *principe cosmologique*, stipulant que l'Univers est homogène et isotrope dans son ensemble.

Toutefois, pour des échelles intermédiaires (~ 50 Mpc), la matière noire se structure de façon hétérogène faisant apparaître des structures caractéristiques de type filaments, vides et "crêpes". De fait, il apparaît selon certains points de vue des directions privilégiées, le long desquelles il est plus probable de trouver un objet. Ce phénomène est particulièrement évident dans les simulations cosmologiques dont une des caractéristiques est l'émergence de filaments le long desquels "coulent" les structures.

Ceci étant, ces constatations ne sont possibles que parce que l'on dispose d'un point de vue extérieur et ne présume pas de la façon dont un halo de matière noire perçoit son proche environnement. Existe-t-il une sorte de propagation de l'anisotropie à l'échelle des halos? Les propriétés de leur accrétion reflètent-elles le fait que la matière est structurée de façon hétérogène à plus grande échelle? Inversement, les halos sont-ils au

¹Inversement, cet effet est considéré comme d'ordre supérieur dans les autres chapitres en supposant l'accrétion comme angulairement isotrope.

contraire dans un régime où, du fait des petites échelles considérées, ils perçoivent leur environnements comme étant essentiellement isotropes ?

Conséquences de l'anisotropie sur les propriétés des galaxies

L'anisotropie des flux de masses paraîtrait anecdotique si elle n'était susceptible de modifier significativement les caractéristiques des galaxies.

Parmi celles-ci, le warp (ou gauchissement) possède un statut particulier. Il n'existe pas de modes propres persistants des warps et les mécanismes supposés de leur génération font systématiquement intervenir une interaction avec l'"environnement". Qui plus est, le warp peut-être assimilé à une rupture de symétrie (par rapport au plan du disque), suggérant que la configuration spatiale du phénomène inducteur y joue un rôle prépondérant. Par exemple, López-Corredoira et al. (2002) ont montré que le warp des galaxies peut être induit par un flot de matière incident : l'orientation mais également l'amplitude du warp dépendent de la direction du flot de matériel. Par extension, il est probable que la distribution des amplitudes ou des orientations d'une population de warps reflète les propriétés des flux de masse accrétés, et spécifiquement son degré d'isotropie. D'autre part Ostriker & Binney (1989), ainsi que Binney (1992) suggèrent que les warps sont provoqués par l'accrétion de moment angulaire : le non alignement entre l'axe du disque et le moment accrété impose la réorientation du plan des parties internes du disque. Dans cet optique, la ligne droite des noeuds des warps observées par Briggs (1990) implique que le temps caractéristique de variation de la direction du couple advecté est long devant le temps de réorientation du disque. En d'autre termes l'accrétion de moment angulaire se ferait suivant certaines directions particulières, sur de longues périodes. Pour toutes ces raisons, le warp constitue un traceur particulièrement sensible du degré d'isotropie de l'accrétion.

Un autre marqueur possible est le phénomène d'épaississement et chauffage du disque qui peut être provoqué par l'accrétion de petits objets. Il est aisément concevable qu'une accrétion dans le plan du disque n'aura pas le même effet qu'une accrétion transverse. Par exemple, Velazquez & White (1999) ont montré, via des simulations numériques, que les processus de chauffage du disque sont plus efficace pour des accrétions coplanaires. Toutefois, Huang & Carlberg (1997) notent qu'un chauffage par accrétion nécessite un satellite suffisamment massif pour être efficace tout en étant suffisamment léger pour ne pas détruire le disque. Bien que n'étant pas le seul paramètre pertinent, la direction d'incidence influe sur l'efficacité du chauffage et de l'épaississement.

Par ailleurs, ce type d'études a mis en évidence l'influence d'un disque sur l'orbite des objets accrétés. Compte tenu de la présence d'un plan particulier, les satellites ont tendance à être ramenés dans le plan du disque tout au long de leur trajectoire. Ceci implique que l'anisotropie perçue par le disque est sensiblement différente de celle qui peut être ressentie par son halo de matière noire. La mesure présentée dans ce chapitre doit alors être perçue comme une mesure de l'isotropie des "conditions aux bords". Dans le cas d'une forte anisotropie, l'influence du disque pourra être considérée comme de second ordre, au vu d'une configuration spatiale extrême d'emblée. Dans le cas contraire, se posera la question de la propagation de cette anisotropie au travers du halo et de son importance par rapport à l'anisotropie induite par le disque.

Une accrétion équatoriale ?

Dans le cas d'un disque galactique, on s'attend à ce qu'une quelconque anisotropie se définisse par rapport au plan principal. Ainsi, un disque a par exemple tendance à attirer les satellites vers ce plan (cf. par exemple Peñarrubia et al. (2002)). Par analogie, on peut définir un plan équatorial pour le halo, perpendiculaire à la direction de son spin, \mathbf{S} . Cette définition repose sur le fait que le spin des halos tend à être perpendiculaire à la direction de plus grande élongation du halo (cf. par exemple Faltenbacher et al. (2005)), de façon marginalement analogue au disque. De plus, la direction du spin du halo de matière noire est sensiblement corrélée avec celle du spin du disque qui y est enfoui (voir par exemple van den Bosch et al. (2002)): en mesurant l'accrétion dans le plan équatorial, on trace les propriétés de l'accrétion dans le plan du disque, à grande distance de ce dernier. Bien que cette description un peu simpliste ne soit plus valable pour les plus gros halos (qui peuvent contenir plusieurs galaxies), le plan équatorial est un lieu raisonnable où l'on peut détecter un comportement non régulier de l'accrétion.

Méthodologie

Mesures d'isotropie : Excès de probabilité et erreurs associées

Dans l'article joint, la plupart des mesures effectuées ne concerne pas directement des probabilités de distances angulaires entre vecteurs mais des *excès de probabilité* ξ . Lorsque l'on considère la densité de probabilité de trouver un angle θ entre un vecteur mesuré et un vecteur référence (le spin du halo dans la plupart des mesures), celle-ci n'est pas uniforme pour une distribution isotrope du vecteur mesuré : une seule configuration "vecteurs alignés" existe, ce qui n'est pas le cas pour une configuration "vecteurs perpendiculaires". Cet effet est illustré dans la figure 6.1. Ainsi, la probabilité de trouver une distance angulaire θ (mesuré par rapport à une direction arbitraire) pour une distribution isotrope de points sur une sphère est donnée par :

$$d_{\text{iso}} = \frac{\sin \theta}{2} \quad (6.1)$$

Ce sont les différences par rapport à cette distribution qui importent et l'excès de probabilité ξ associé à ces départs est défini par :

$$1 + \xi(\theta) = \frac{d_{\text{mesure}}(\theta)}{d_{\text{iso}}(\theta)} \quad (6.2)$$

où $d_{\text{mesure}}(\theta)$ et $d_{\text{iso}}(\theta)$ sont respectivement les probabilités mesurée et isotropes de trouver un angle θ . Au vu de l'équation 6.2, $\xi(\theta)$ apparaît comme une fonction de corrélation à deux points *centrée* sur la direction du spin. Pour évaluer les erreurs sur ξ , le grand nombre de halos (ou de satellites, cf. plus bas) est mis à profit en mesurant la dispersion de ξ sur des sous-échantillons de mesures.

Toutefois, l'erreur sur ξ ne préjuge pas de l'erreur faite sur chaque mesure individuelle des angles θ . En supposant une précision infinie sur cette mesure, la distribution des angles θ mesurés est donnée par :

$$d_{\text{mesure}}(\theta) = \sum_i \delta_{\text{Dirac}}(\theta - \theta_i), \quad (6.3)$$

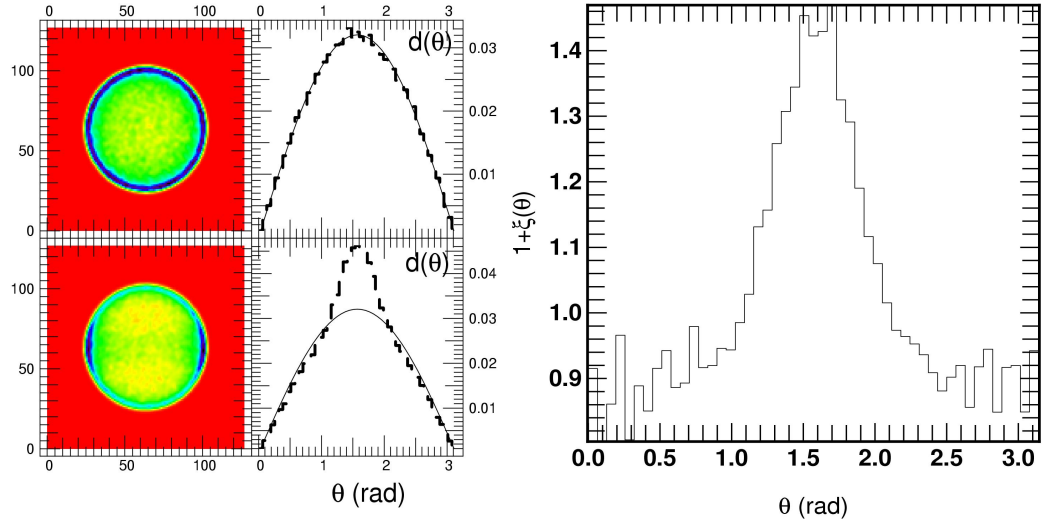


Figure 6.1: Mesure d'excès de probabilité. *A gauche* : deux exemples de tirages de particules sur une sphère. En haut à gauche, une distribution (projetée) isotrope. Les angles θ sont mesurés par rapport à l'axe vertical passant par le centre de la sphère: $\theta = 0$ est la direction le long de cet axe, $\theta = \pi/2$ est perpendiculaire à cet axe. En haut à droite, la distribution des angles $d_{\text{iso}}(\theta)$ (histogramme en tirets) suit une loi en $\sin \theta$ (ligne continue). En bas à gauche, une distribution présentant un excès de particules dans le plan équatorial. En bas à droite la distribution des angles $d_{\text{aniso}}(\theta)$ présente un départ à la loi en $\sin \theta$. *A droite* : L'excès de probabilité $1 + \xi(\theta) =$ de trouver une particule d'angle θ dans la distribution anisotrope précédente.

où l'indice i désigne chaque mesure d'angle contribuant à la distribution. Une façon de tenir compte de l'incertitude sur la mesure de θ consiste à remplacer $\delta_{\text{Dirac}}(\theta - \theta_i)$ par une fonction unitaire $f(\theta_i, \sigma_i)$ où σ_i désigne l'erreur associée à chaque mesure :

$$d_{\text{mesure}}(\theta) = \sum_i f(\theta_i, \sigma_i). \quad (6.4)$$

Un choix naturel d'une telle fonction est une gaussienne centrée en θ_i . Ce faisant, la contribution de chaque mesure est "délocalisée" sur un ensemble d'angles centrés sur l'angle θ_i . Par exemple, un angle calculé avec peu de particules possède une contribution quasi "plate" sur l'ensemble des angles et contribue peu à l'excès de probabilité final. Suivant la suggestion de Hatton & Ninin (2001), la largeur de cette gaussienne est donnée par :

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{4\pi}{N}}, \quad (6.5)$$

où N est le nombre de particules ayant servi à calculer l'angle θ . Ce choix part du principe que l'erreur sur cet angle est égal à la résolution de l'échantillonnage sur la sphère par ces N particules.

Une double mesure de l'anisotropie

Les mesures ont été effectuées à partir du jeu de simulations décrit dans le chapitre 5 et dans lesquelles le degré d'anisotropie de l'accrétion a été évalué de deux façons différentes. La première est dite de type *fluide* : l'accrétion par un halo y est décrite par la densité de flux de masse $\rho v_r(\theta, \phi)$ au travers de sa sphère de "Viriel" et par le moment angulaire advecté. La seconde est de type *particulaire*, où les propriétés d'anisotropie sont sondées via la distribution des satellites autour des halos. Les deux approches mesurent la même quantité et doivent donc conduire au même résultat (au moins de façon qualitative).

Ainsi, dans une première partie, l'anisotropie d'accrétion est mise en évidence par le biais de la méthode fluide. Dans la deuxième partie, ces mesures sont confirmées par la distribution des satellites. Enfin, la dernière partie exposera comment établir le lien entre anisotropie d'accrétion et structures à plus grande échelle à partir des propriétés des satellites et abordera la question des anisotropies en projection.

6.1 Approche fluide

L'approche fluide est basée sur la mesure des densités de flux au travers de la sphère de Viriel. Cette méthode est développée de façon plus complète dans la section 8 (voir aussi le chapitre 2) et l'implémentation qui en a été faite pour les mesures d'anisotropie n'en est qu'une version simplifiée. Pour chacun des halos détectés dans les simulations (décrites en 5), on définit une coquille de largeur $0.1R_{200}$, de rayon moyen R_{200} , centrée sur son centre de masse. Les positions et vitesses des particules se trouvant à l'intérieur de cette coquille sont mesurées par rapport à la position du centre de masse du halo et par rapport à sa vitesse moyenne. A partir de ces données, les densité de flux de masse $\rho v_r(\Omega)$ (Ω étant les deux angles $[\theta, \phi]$ désignant la sphère²) ou des quantités advectées

²à ne pas confondre avec $\Omega = \partial H / \partial \mathbf{I}$ défini au chapitre 2.

ont été mesurées pour les halos contenant au moins 1000 particules, i.e. de $5 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ à la résolution des simulations³.

6.1.1 Corrélation Spin du halo - Moment angulaire advecté

Une façon simple de déterminer le plan orbital d'un objet tombant sur le halo est de contraindre la direction de son moment angulaire \mathbf{L} . La distance angulaire entre ce vecteur et la direction du spin du halo \mathbf{S} renseigne sur la façon dont le plan orbital instantané de l'objet se situe par rapport au plan équatorial du halo. Deux vecteurs \mathbf{L} et \mathbf{S} alignés impliquent que l'objet en question est dans le plan équatorial. A partir de la distribution de moment angulaire sur la sphère de Viriel, on définit le moment angulaire total \mathbf{L}_T de la matière à R_{200} :

$$\mathbf{L}_T = \int_{4\pi} \mathbf{L} \rho(\Omega) d(\Omega). \quad (6.6)$$

On extrait alors l'angle θ_{LS} entre ce vecteur et la direction de \mathbf{S} . La mesure a été effectuée sur 40 000 halos à $z=0$. La [figure 4](#) de l'article, présente l'excès de probabilité de trouver dans cet échantillon une configuration θ_{LS} par rapport à une distribution aléatoire du vecteur \mathbf{L}_T . Il apparaît clairement que toutes les configurations ne sont pas équivalentes. En particulier, la configuration alignée est susceptible d'être trouvée 35% fois plus fréquemment que pour une distribution isotrope des moments angulaires. La même mesure peut être effectuée en prenant en compte non pas le moment angulaire total à R_{200} mais le moment angulaire *advecté* :

$$\mathbf{L}_A = \int_{4\pi} \mathbf{L} \rho v_r(\Omega) d(\Omega). \quad (6.7)$$

L'excès de probabilité de trouver une configuration d'angle θ_{LS} entre \mathbf{L}_A et \mathbf{S} est également donné dans la [figure 4](#) de l'article. La corrélation entre ces deux vecteurs est plus forte que précédemment avec un excès de probabilité de 50% de les trouver alignés. La matière à R_{200} se trouve préférentiellement dans le plan perpendiculaire au spin du halo.

On imagine aisément que le spin de la matière externe au halo, présumément récemment accrétée, est corrélé avec le moment angulaire de la matière traversant la sphère de Viriel⁴ : ces deux types de matériau étaient “en contact” au démarrage de l'effondrement du halo, à haut redshift. Cet alignement entre le moment de la matière à R_{200} et le spin du halo suggère que le matériau récemment accréte contribue significativement au spin mesuré à l'intérieur de R_{200} par effet de levier. La pondération par v_r tend à diminuer la contribution de la composante “virielisée” (i.e. ayant déjà traversé la sphère de Viriel dans le passé) et ce sont les objets accrétés pour la première fois qui dominent la quantité de \mathbf{L}_A . Le fait que la corrélation soit accentuée conforte l'image selon laquelle c'est le matériel récemment accréte des régions externe du halo qui domine le spin et cet effet reflète une cohérence temporelle de l'accrétion de moment angulaire.

En revanche, aucune conclusion ferme ne peut être tirée sur une quelconque anisotropie à plus grande échelle. Certes, la corrélation présente est conforme à ce type d'anisotropie :

³Toutes les mesures n'ont pas été effectuées sur toutes les simulations, expliquant la variation du nombre de halos considérés suivant les études.

⁴On rappelle que pratiquement les particules contribuant à \mathbf{S} ne sont pas utilisées dans le calcul de \mathbf{L}_T .

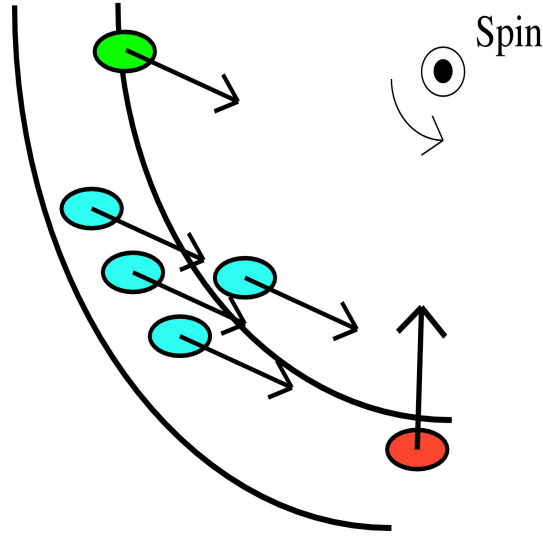


Figure 6.2: Contribution de l'accrétion au spin des halo. Les mesures de corrélations entre \mathbf{L} mesuré à R_{200} et le spin indique que la matériel externe au halo contribue significativement à ce dernier, par effet de levier. L'effet traduit une cohérence temporelle (structures bleues sur le schéma) de l'accrétion de moment angulaire. Cette mesure n'est pas corrigée de la contribution des structures (en vert) contribuant à la fois à \mathbf{S} et \mathbf{L} . De même, cette mesure ne prend pas en compte l'accrétion radiale (en rouge) qui domine l'accrétion globale.

la matière accrétée située dans les régions externes du halo tomberait toujours dans le même plan que celle en passe de traverser la sphère. Néanmoins les propriétés de la matière à haut moment angulaire (qui dominant le calcul de \mathbf{L}) ne préjugent pas des propriétés générales de la matière accrétée : l'accrétion est majoritairement radiale et cette composante n'est pas prise en compte dans le calcul du moment angulaire à R_{200} . De plus, il est possible pour un objet rentrant d'être à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, contribuant simultanément à \mathbf{S} et à \mathbf{L}_A . Cette "pollution" de la direction de référence produirait naturellement un alignement de ces deux vecteurs. Pour s'affranchir de cet effet, les études suivantes se focalisent sur la densité de flux de masse $\rho v_r(\Omega)$.

6.1.2 Un excès d'accrétion équatoriale

La densité de flux de masse $\rho v_r(\theta, \phi)$ est à priori un meilleur traceur de l'anisotropie : ce champ est dominé par l'accrétion radiale dominante, qui ne contribue que peu au spin et est donc moins susceptible d'influer sur la détermination de la direction référence. A partir de $\rho v_r(\theta, \phi)$, on définit de la façon suivante l'excès d'accrétion équatoriale d'un halo :

$$\delta_m = \frac{\Phi_r - \bar{\Phi}}{\bar{\Phi}}, \quad (6.8)$$

où $\bar{\Phi}$ est le flux par unité de surface moyenné sur toutes les directions :

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \rho v_r(\Omega) d\Omega. \quad (6.9)$$

De façon identique, Φ_r est le flux moyenné uniquement dans la région équatoriale :

$$\Phi_r = \frac{1}{S_r} \int_{S_r} \rho v_r(\mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}. \quad (6.10)$$

La quantité S_r désigne la surface encadrant le plan équatorial avec un angle de $\pm\pi/8$. Comme précédemment, les mesures se font à R_{200} . Un accrétion statistiquement isotrope implique $\langle\delta_m\rangle = 0$ sur l'ensemble des réalisations, où $\langle\cdot\rangle$ désigne la moyenne d'ensemble. Une valeur de δ_m positive (resp. négative) implique un excès (resp. un défaut) d'accrétion équatoriale par rapport à une accrétion isotrope.

L'excès d'accrétion équatoriale a été mesuré pour les halos de masse supérieure à $5 \cdot 10^{12} M_\odot$ à cinq différents redshifts ($z=1.8, 1.5, 0.9, 0.3, 0.0$). Environ 50 000 halos obéissent à ces critères à $z=0$; ce nombre décroît avec le redshift pour atteindre 10500 halos à $z=1.8$. Les figures 5 et 6 de l'article présentent la distribution normalisée de δ_m ainsi que l'évolution de $\langle\delta_m\rangle$ au cours du temps.

Il apparaît clairement que les distributions des δ_m ne sont pas centrées en zéro mais présentent un décalage systématique vers les valeurs de δ_m positives. La valeur moyenne $\langle\delta_m\rangle$ est toujours positive pour la gamme de redshifts étudiés, avec par exemple une valeur de $\delta_m = 0.147$ à $z = 0$: le flux mesuré dans le plan équatorial est (en moyenne) supérieur aux flux attendu pour une accrétion isotrope, dans une proportion proche de 15%.

La baisse de $\langle\delta_m\rangle$ avec le redshift doit toutefois être interprétée avec prudence : l'utilisation d'une masse plancher constante quel que soit le redshift implique que la mesure ne permet pas un suivi d'une population au cours du temps. Ainsi les mesures à $z = 0$ contiennent une forte contribution de petits halos de masses légèrement supérieures à la masse seuil, critère qu'ils ne pouvaient pas satisfaire pour de plus grands redshifts. La figure 6.3 présente la mesure de δ_m pour trois différentes classes de masses, à $z = 0$. L'anisotropie d'accrétion augmentant avec la masse du halo, l'évolution temporelle de $\langle\delta_m\rangle$ peut s'expliquer par une contribution croissante des petits halos. On reviendra sur cette dépendance en masse dans la section 6.2.3 sur le flux filamentaire.

6.1.3 Profil d'anisotropie

La description sphérique de l'accrétion conduit naturellement à sa décomposition harmonique :

$$\delta_{[\rho v_r]}(\mathbf{\Omega}) = \sum_{\ell m} \tilde{a}_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{\Omega}), \quad (6.11)$$

où $\delta_{[\rho v_r]}(\mathbf{\Omega})$ désigne le contraste de ρv_r : $\delta_{[\rho v_r]}(\mathbf{\Omega}) = \rho v_r(\mathbf{\Omega}) / \bar{\rho v_r} - 1$. L'intérêt d'une telle décomposition est double. D'une part, les coefficients harmoniques interviennent directement dans le calcul de la réponse linéaire du halo due à l'injection de masse. Si les $\tilde{a}_{\ell m}$ tracent de façon significative l'anisotropie, cette dernière transpirera dans la réponse induite par l'accrétion. D'autre part, les $\tilde{a}_{\ell m}$ permettent de déduire un véritable "profil" d'excès d'accrétion en fonction de la distance angulaire au spin du halo.

La figure 7 de l'article présente la médiane de la distribution des coefficients $\tilde{a}_{\ell m}$ mesurés sur 25000 halos à $z=0$. Tous les champs $\rho v_r(\mathbf{\Omega})$ ont été réorientés de façon à faire coïncider la direction $\theta = 0$ avec la direction de \mathbf{S} . Un champ d'accrétion isotrope aurait été représenté tel un monopole pour lequel seul \tilde{a}_{00} aurait été non nul. Or, les coefficients de type $\tilde{a}_{\ell 0}$ ne convergent pas vers 0 : l'accrétion n'est pas monopolaire. Le

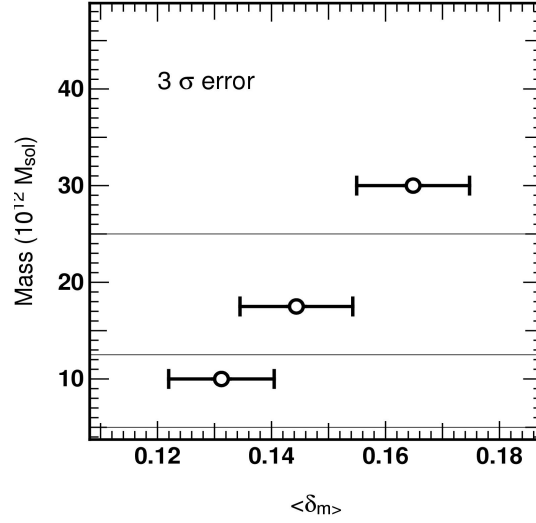


Figure 6.3: Comparaison de l'excès d'accrétion δ_m mesuré pour trois différentes classes de masses : $5 \times 10^{12} M_{\odot} < m < 1.25 \times 10^{13} M_{\odot}$, $1.25 \times 10^{13} M_{\odot} < m < 2.5 \times 10^{13} M_{\odot}$ et $2.5 \times 10^{13} M_{\odot} < m$. Chaque classe contient 16500 halos. L'anisotropie croît avec la masse.

fait qu'un ordre m domine implique qu'une orientation type du champ se dégage (voir aussi la figure 6.4). Ainsi, la configuration typique d'harmoniques de type $m = 0$ est un champ invariant par rotation azimuthale. C'est le type de comportement attendu pour un champ dont la variation ne dépendrait que de la distance au plan équatorial.

La reconstruction du profil $\delta_{[\rho v_r]}(\theta)$ obtenue à partir de et des coefficients médians est présentée dans la figure 8 de l'article. On retrouve qualitativement et quantitativement le résultat obtenu via le contraste d'accrétion équatorial : il y a un excès d'accrétion de matière dans le plan équatorial, atteignant un maximum de 20% pour $\theta = 0$. L'accrétion par les halos n'est pas isotrope.

6.2 L'accrétion anisotrope de sous-structures

L'objectif de cette partie est de retrouver l'anisotropie d'accrétion en utilisant la distribution des satellites comme marqueur du flux de masse tombant sur le halo. Par cette approche, les propriétés des objets accrétés sont directement accessibles et sont susceptibles de fournir des indications sur l'origine du flux anisotrope.

6.2.1 Un arbre de sous-structures

Un nouveau détecteur de satellites et sous-structures a été utilisé, ADAPTAHOP, écrit par S. Colombi et dont le principe de fonctionnement est exposé dans l'article ci-joint. Ce code produit l'arbre des structures présentes dans les simulations par une description locale de la densité de matière noire en terme de pics de densité et de points selles. La version d'ADAPTAHOP utilisée ne prenait en compte aucune prescription dynamique sur la nature gravitationnellement liée d'une structure détectée.

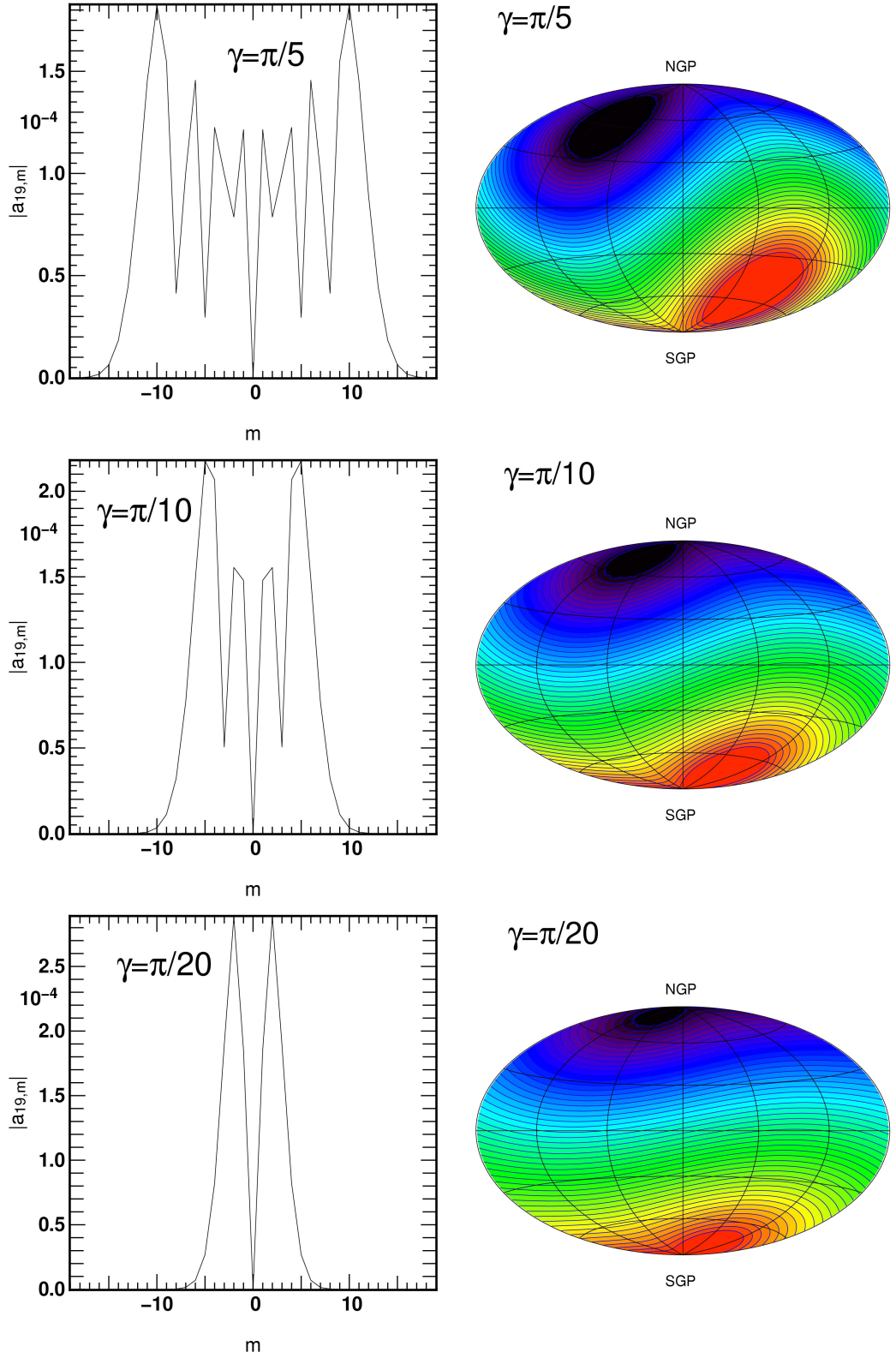


Figure 6.4: Décomposition harmonique d'un champ auquel on fait subir une rotation. A gauche, les isocontours des champs. A droite, les modules des harmoniques $a_{\ell=19,m}$ du champ pour différentes inclinaison γ entre son propre pôle et la direction verticale. Pour un ℓ donné, les harmoniques m dominantes dépendent de cette orientation. Une faible inclinaison conduit à une domination des termes de bas m .

Le premier niveau de hiérarchie de l'arbre de structure (*la mère*) correspond qualitativement aux halos détectés précédemment. Le dernier niveau de hiérarchie (*les feuilles*) de l'arbre correspond aux satellites et aux sous-structures. Parmi celles-ci, on désigne par (*noyau*) l'objet principal, i.e. le plus massif. Pour chacune de ces feuilles, le code fournit des quantités telles que le rayon ou la masse de la structure considérée. Un exemple de détection de sous-structures est donné en figure 6.5. Environ 50 000 mères ont été extraites par ADAPTAHOP dans les simulations, donnant accès à 120 000 sous-structures à redshift $z=0$.

6.2.2 Corrélacion spin du noyau - moment orbital des satellites

L'étude du moment angulaire des objets accrétés donne accès à l'orientation du plan orbital et de fait à leur direction d'incidence. Pour chaque système mère, la direction de référence est fournie par le spin du noyau. Les vitesses et positions de chaque sous-structure sont mesurées par rapport à la vitesse moyenne et par rapport au centre de masse du noyau correspondant. Pour chacune de ces sous-structures, l'angle θ_{cs} entre son moment orbital et le spin du noyau est mesuré.

Noyau et sous-structures forment par définition des objets distincts, limitant de fait une pollution du spin central par des particules appartenant aux satellites. De plus, afin de sonder les propriétés de l'accrétion à large distance, seules les structures situées à une distance supérieure au rayon de la mère sont prises en compte dans la mesure présente. Ces objets "éloignés" sont davantage susceptibles de refléter des effets de structuration à grande échelle. Le nombre de satellites satisfaisant à ces critères hautement restrictif s'élève à 35 000.

L'excès de probabilité de trouver une configuration θ_{cs} donnée est présentée dans la figure 9 de l'article. Clairement, les moment orbitaux tendent à être alignés avec les spin centraux : les satellites se trouvent préférentiellement dans le plan équatorial du noyau, bien qu'ils se trouvent à large distance de ce dernier. L'excès de satellites "équatoriaux" s'élève à 12%, du même ordre que l'excès d'accrétion mesuré en utilisant la description en flux. Cette distribution anisotrope des sous-structures a déjà été observé qualitativement dans les simulations par Knebe et al. (2004) (ou plus récemment par Zentner et al. (2005)). Cet effet est ici quantifié grâce au traitement d'un très grand nombre de réalisations d'environnements. De plus, cette mesure statistique garantit la représentativité de cette anisotropie, au contraire de ces autres études basées sur des simulations à haute résolution de quelques objets.

Cet alignement pourrait être expliqué par des effets à deux corps : si deux objets de masses comparables orbitent l'un autour de l'autre, on s'attend à ce qu'un couplage entre le moment orbital de l'un et le spin de l'autre induise un alignement des deux vecteurs. Or, bien que l'isotropie augmente avec la multiplicité des systèmes considérés, l'anisotropie reste relativement robuste en terme de nombre de satellites par halo. En restreignant les mesures aux halos à au moins 4 et au moins 10 satellites, l'excès de probabilité reste compatible avec la mesure globale du point de vue des barres d'erreurs. Les effets de couplages étant non-dominants, reste la possibilité que la configuration des satellites reflète l'existence d'une direction privilégiée à plus grande échelle.

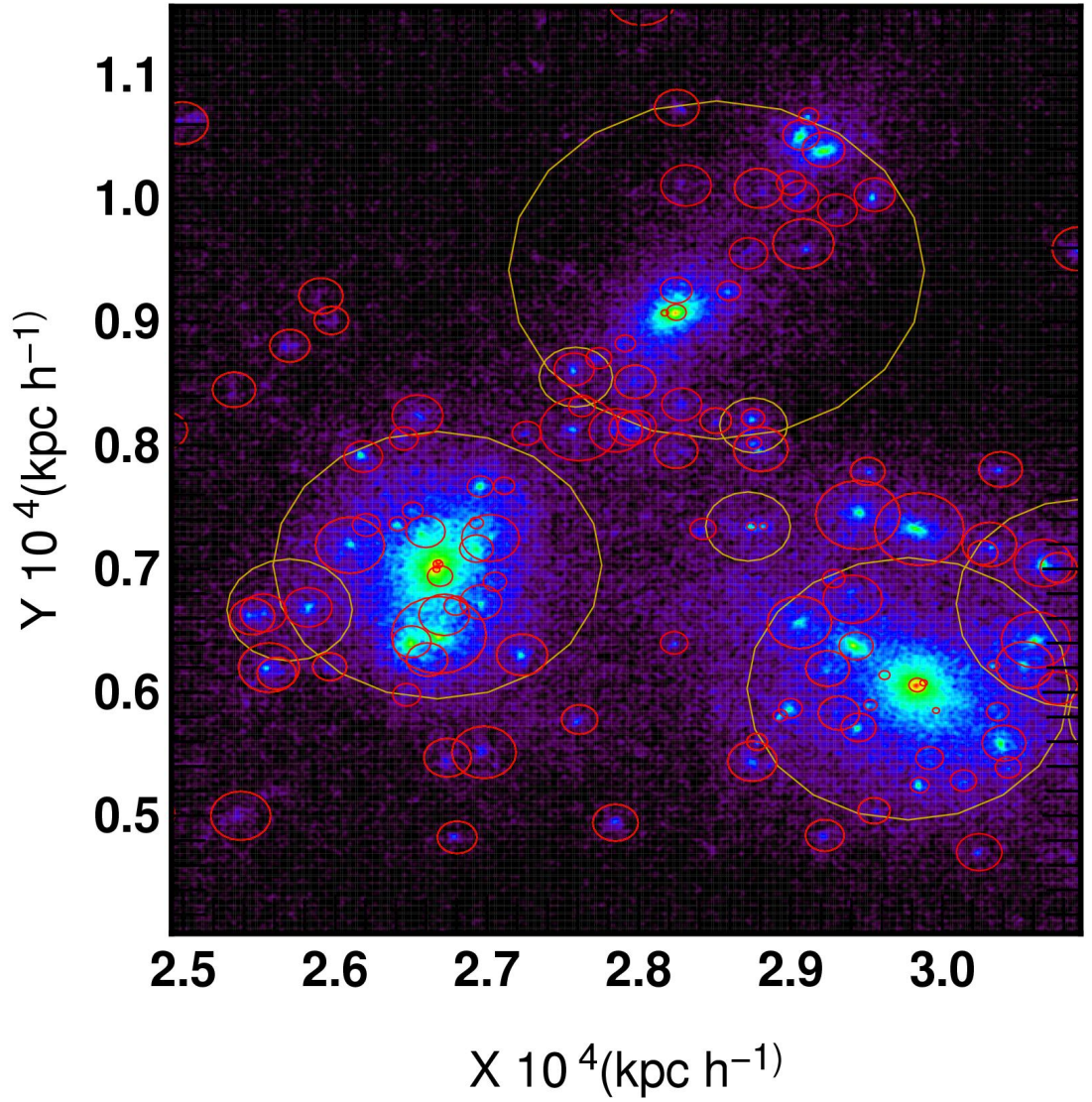


Figure 6.5: Trois structures mères détectées à l'aide de ADAPTAHOP dans une simulation à 128^3 particules, $50 \text{ Mpc}^3 h^{-1}$. Les structures mères sont représentées en jaune, les feuilles des arbres de sous-structures en rouge. Les cercles représentent le rayon de chaque structure, déduite de la distance carré moyenne de chaque particule lui appartenant.

6.2.3 Un flux filamentaire ?

Il est aisé de voir en l'existence d'une direction "privilégiée" la conséquence de la structuration de la matière sous forme de filaments. Dans cette hypothèse, les mesures précédentes implique que le halo est "informé" de l'existence de ces filaments par la distribution spatiale de la matière environnante .

La mesure de la corrélation entre la direction du déplacement des satellites et leur propre spin semble étayer cette hypothèse. Sur l'échantillon de satellites décrits dans la précédente section, l'angle entre la direction de déplacement de chaque satellite (tracée par la direction de son vecteur vitesse moyen) et celle de son spin propre a été mesuré. La distribution de l'excès de probabilité de trouver cet angle θ_{SV} est montrée dans la [figure 10](#) de l'article. Ces mesures indiquent que la vecteur vitesse des satellites (mesuré dans le référentiel au repos du noyau) tend à être perpendiculaire à la direction de leurs spins propres. L'excès est faible ($\sim 5\%$) mais significatif à 3σ .

Si l'on suppose un halo dans un filament, une certaine fraction de ces satellites auront également été formés dans le filament. Dans un scénario de formation hiérarchique, ces satellites résultent de la fusion entre deux objets "coulant" dans le flux environnant (voir aussi figure 6.6). Pour peu que le paramètre d'impact de ces deux progéniteurs soit non nul, la direction du spin du satellite résultant sera corrélée avec celle du moment angulaire des deux progéniteurs orbitant l'un autour de l'autre. De fait, le spin du satellite tendra à être perpendiculaire à la direction de flot, c'est-à-dire à la direction du filament. C'est précisément le résultat qui est obtenu. Le halo sait qu'il est entouré de filaments. On notera que cette mesure est purement halocentrique et un observateur situé sur le halo dispose à ce titre de toute l'information pour aboutir à cette conclusion.

Il a été observé précédemment que l'excès d'accrétion équatoriale δ_m augmente avec la masse. Au vu de l'hypothèse d'accrétion filamentaire, plusieurs explications peuvent être avancées. Premièrement, les halos de faibles masse ont une histoire de formation calme en terme d'accrétion d'objets. Ceci laisse supposer qu'une certaine fraction de ces halos sont des halos de champs (par analogie avec des galaxies de champs), baignant dans un environnement sans propriétés particulières. Par conséquent la probabilité d'avoir un halo léger dans un filament, et donc dans un environnement anisotrope, est plus faible. A l'inverse les halos plus massifs ont été formés dans des milieux denses et les filaments constituent de tels environnements. L'effet du flux filamentaire est plus fort statistiquement sur de tels halos, car plus probable. Deuxièmement, les halos massifs sont tout simplement plus grands que les halos plus légers. Par conséquent deux halos de taille différentes plongés dans un même filament verront une section du filament plus ou moins importante : un halo compact baigne dans le flot environnant, alors que pour un halo plus massif, le flot "se branche" sur sa surface de Viriel (voir aussi la figure 6.7). L'effet d'anisotropie est accentué par une section plus faible que celle de la taille du halo. Enfin on peut imaginer une sorte d'*effet tropical*, où le flux de masse mesuré est plus important dans les régions perpendiculaire aux flot global environnant (par analogie avec le rayonnement solaire plus important aux tropiques terrestres). Cette explication tient aussi bien pour les grands que les petits halos pour peu que le flux filamentaire puisse être approximé comme étant uniforme, propriété non-triviale à démontrer.

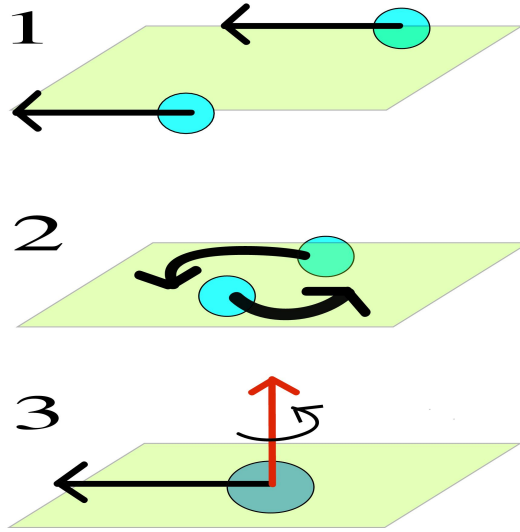


Figure 6.6: Formation des objets dans un flux filamentaire. **1** : deux progéniteurs coulent le long d'un filament. Le parallélogramme désigne leur plan commun. **2** : les deux objets fusionnent en orbitant l'un autour de l'autre, du fait de leur paramètre d'impact non nul. **3** : l'objet résultant possède un spin (en rouge) reflétant l'orbite mutuelle des deux progéniteurs et perpendiculaire à la direction du filament. Un tel scénario peut expliquer la tendance des satellites à se déplacer perpendiculairement à leurs spins.

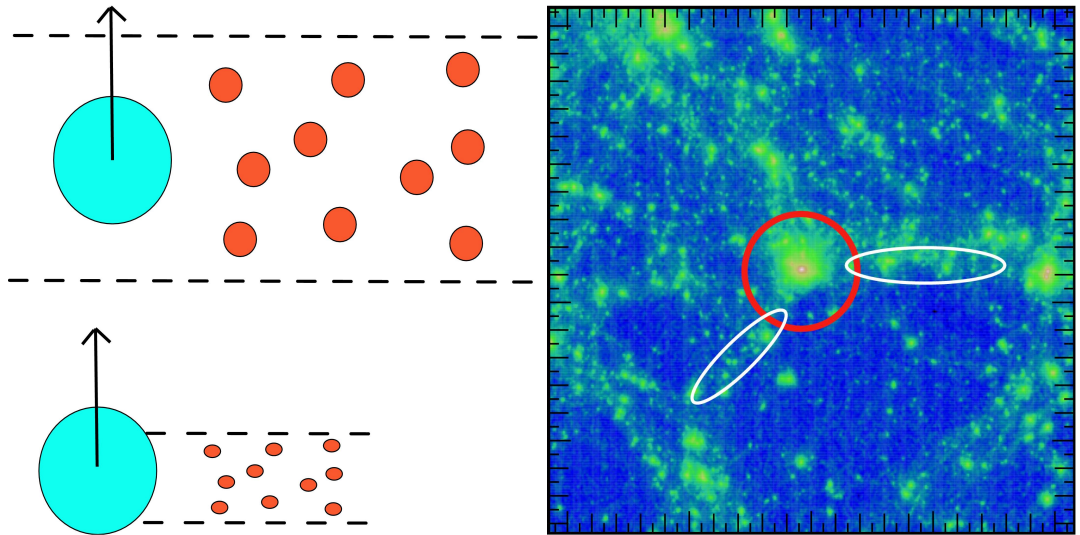


Figure 6.7: Effet de masse sur l'accrétion équatoriale. Un halo de grande masse présente une section efficace plus importante au filament que ne le ferait un halo plus petit. Un halo de grand rayon est donc en mesure de voir le filament se "brancher" à sa surface, accentuant l'effet d'anisotropie. A droite, de tels filaments dans une simulation. Le halo central (en rouge) voit clairement deux filaments (en blanc) dont la section efficace est relativement plus faible que celle du halo. Le côté de l'image représente $20h^{-1}$ Mpc.

6.3 Anisotropie projetée et corrélations intrinsèques

6.3.1 Un effet anti-Holmberg ?

Les mesures précédentes ont mis en évidence une distribution anisotrope de la matière autour des halos, mais celle-ci a été mesurée à partir d’une information tridimensionnelle. L’amplitude de cette anisotropie doit être évaluée lorsque la distribution de matière est projetée, d’autant plus que l’effet à trois dimensions est d’amplitude faible et peut être dilué par le passage à 2D. A cette fin, un halo “artificiel” a été construit à partir des positions projetées de 100 000 satellites autour du noyau (voir figures 6.8 et 11 de l’article ci-joint). Pour chacun des satellites, l’axe du spin du noyau correspondant a été ramené selon l’axe y et les distances ont été normalisées au rayon de la “mère”.

Il apparaît clairement que la distribution des satellites est aplatie le long de la direction équatoriale. Le rapport d’axe pour les satellites à moins de 1 rayon de mère du centre s’élève à 0.1. Si l’on retranche à cette distribution de satellites le même profil radial mais isotrope, la région alignée selon le spin est clairement sous peuplée au profit de la région équatoriale. En conclusion, la distribution de satellites est anisotrope autour du spin du halo, même projetée.

Cet effet peut-être qualifié de “effet anti Holmberg”. L’effet Holmberg est un résultat observationnel montrant que les satellites tendent préférentiellement à se situer le long des directions polaires des disques (Holmberg (1974), Zaritsky et al. (1997)). A supposer que la direction du spin des halos est corrélée avec le vecteur rotation des disques, nos mesures présentent un résultat en contradiction avec les observations. Une façon de les rendre compatibles est de suggérer que le disque aurait son plan aligné selon le plan mineur du halo. Il faudrait que ce comportement singulier constitue la norme pour ressortir statistiquement, or les disques des simulations tendent à posséder un spin aligné avec celui du halo (cf. par exemple van den Bosch et al. (2002)). Une explication plus plausible tient dans la nature des échelles considérées : la mesure présente se fait typiquement au rayon de Viriel (~ 500 kpc dans la classe de masse considérée), c’est-à-dire loin du disque. Or, Huang & Carlberg (1997) par exemple, ont démontré que les disques tendent à ramener les satellites dans leur plan, précisément là où l’efficacité du freinage et de la destructions des satellites est la plus efficace. Cet effet induirait naturellement une déplétion en satellites des régions dans le plan du disque. Dans ce contexte, la distribution des satellites en bordure du halo ne préjuge pas de la distribution observée des satellites autour du disque, en particulier pour les objets dont le premier passage au travers du disque a déjà eu lieu. Enfin, il faut noter le résultat de Brainerd (2004) qui observe un effet “anti-Holmberg” similaire à celui mesuré ici dans la population de satellites du SDSS, indiquant que l’effet Holmberg n’est pas clairement établi et que les observations peuvent être réconciliées avec les résultats de simulations.

6.3.2 Orientation des satellites et corrélations intrinsèques.

L’image d’un flot filamentaire décrite précédemment implique que la distribution des satellites n’est pas aléatoire autour des halos ainsi que la direction de leur spin. Or, dans les simulations, le spin des halos tend à être aligné le long de leurs axes mineurs et trace donc leurs orientations. Se pose alors la question de l’orientation projetée des satellites et de sa détectabilité. A nouveau, la projection tend à diluer le signal tri-dimensionnel. Toutefois pour des problématiques de lentilles gravitationnelles faibles, un signal de

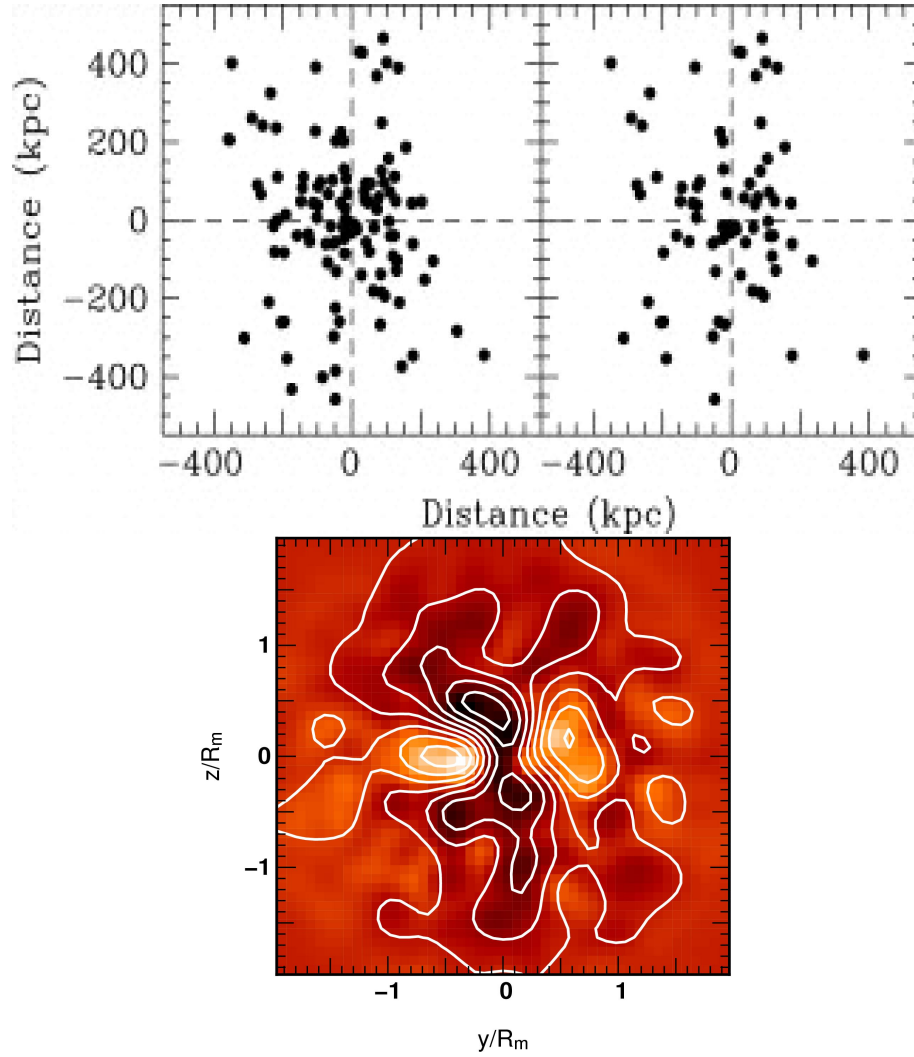


Figure 6.8: *En haut* : Figure extraite de Zaritsky et al. 1996. A gauche la distribution projetée des satellites autour 69 galaxies. A droite la même distribution pour un sous-échantillon de galaxies inclinées de plus de 45 degrés sur la ligne de visée. Les axes majeurs des galaxies sont alignés suivant l'horizontale. *A droite* : la même densité après avoir retranché une distribution isotrope de satellites avec le même profil radial. Les zones sombres représentent les zones déficientes en satellites. Clairement il y un excès de satellites le long de la direction équatoriale, en contradiction apparente avec les observations.

quelques pourcents peut avoir un impact significatif. Ces effets d'alignements non fortuits et non induits par les effets de lentilles, sont appelés *corrélations intrinsèques*.

Le phénomène de corrélation intrinsèque a été abordé en mesurant l'angle entre le spin de chaque satellite et le vecteur reliant le centre du noyau au centre de chacun de ces objets. La mesure a été effectuée sur 100 000 satellites et l'excès de probabilité de trouver un angle donné est donné en [figure 12](#). Selon cette mesure, le spin d'un satellite tend à être perpendiculaire au rayon vecteur. En terme d'orientation, l'axe majeur d'un satellite tend à pointer vers le centre du noyau. L'orientation globale des satellites autour des halos est "radiales", c'est-à-dire divergente par rapport au centre du halo. Toutefois, on notera que l'effet est marginalement détecté à $2\% \pm 1\%$. À supposer qu'un tel effet soit observable, il nécessiterait environ 6000 objets pour être détecté à 1σ , rendant clairement difficile son observation.

La même mesure a été pratiquée en découpant l'espace projeté autour des halos en secteurs, radialement et angulairement. L'objectif est de déterminer une orientation typique des satellites en fonction de leur position par rapport à la direction du spin du noyau. La matrice des excès de probabilité $1 + \xi_p$ de l'angle θ_p est donnée en [figure 6.10](#) de l'article. Il apparaît clairement que l'orientation typique dépend de la position considérée autour du spin. Une représentation schématique de l'orientation typique en fonction de la position est également donnée en [figure 6.10](#). Chaque secteur est représenté par une ellipse, dont l'orientation est donnée par le maximum de $1 + \xi_p$ et dont l'ellipticité est proportionnel au signal sur bruit de $1 + \xi_p$. Cette ellipse représente un disque dont l'axe serait aligné avec le spin du satellite. Ces hypothèses sont simplificatrices à dessein, l'objet d'une telle démarche étant essentiellement qualitatif et représentatif. De toute manière l'amplitude des barres d'erreurs empêche toute conclusion ferme et quantitative. Ainsi, une corrélation mal contrainte induit une orientation aléatoire et le disque moyen est vu comme circulaire. À l'inverse, une forte corrélation implique que le seul degré de liberté restant se trouve autour du rayon vecteur et l'ellipticité moyenne est de 0.5.

Deux effets peuvent être distingués. Hors du plan équatorial, certains secteurs possèdent un spin caractéristique marginalement aligné avec le rayon vecteur, se traduisant par une orientation de type circulaire de l'ellipse associée. Cet effet est notable pour des rayons inférieurs pour des rayons de mesure et proche de la direction du spin. Le long du plan équatorial du noyau, l'axe majeur de l'ellipse de l'objet pointe vers le centre du noyau (le spin est perpendiculaire au rayon vecteur). La tendance de [la figure 12 de l'article](#) est retrouvée et l'excès de satellites dans ces régions peut expliquer la domination de l'orientation radiale dans la mesure globale. Il semblerait qualitativement que les orientations des satellites ne sont pas aléatoires autour du halo. De plus les orientations sont compatibles avec l'image du flot filamentaire où le halo et les structures possèdent un spin perpendiculaire à la direction du flot. La domination des configurations circulaires hors du plan va d'ailleurs dans ce sens : le spin reste perpendiculaire au filament même hors du plan équatorial.

Une autre possibilité est invoquée par Plionis & Basilakos (2002) : ces auteurs ont observés que l'axe de symétrie des galaxies dans les amas tendent à pointer vers le centre de l'amas. Cet effet pourrait émerger hors du plan équatorial autour des halos simulés. Néanmoins, les auteurs invoquent à leur tour le flux filamentaire pour expliquer cet effet : les galaxies à faible vitesse relative dans ce flot fusionneraient pour donner un objet dont le spin serait aligné selon le filament. Ce raisonnement va à l'encontre de celui

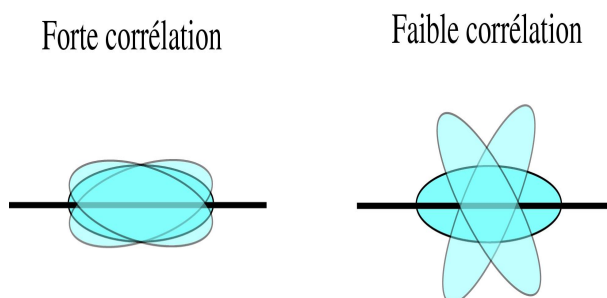


Figure 6.9: *A gauche* : un “disque” dont la direction projetée du spin est fortement contrainte ne possède qu’un degré de liberté, symbolisé par la ligne noir. Par symétrie autour de cet axe, un tel disque apparaît comme une ellipse de rapport d’axe 1/2. *A droite* : un disque dont la direction de spin est peu contrainte possède un degré de liberté supplémentaire. La projection moyenne d’un tel disque est circulaire.

proposé dans ce chapitre. Il fait notamment appel à une condition cinématique (faible vitesse relative) alors que le nôtre est un raisonnement purement géométrique. Or un argument cinématique ne saurait caractériser à lui seul un filament : un observateur placé dans le référentiel d’un des deux progéniteurs perd la notion de filament. Cet effet de configuration circulaire reste inexpliqué à nos yeux pour l’instant.

Le domaine d’application naturel de ces corrélations intrinsèques est l’astigmatisme cosmique (weak lensing en anglais). Une distribution non aléatoire des orientations et des ellipticités sont susceptibles d’affecter ce type d’étude. La corrélation intrinsèque mesurée ici est très faible, et seule la mesure globale de l’orientation fait marginalement apparaître un excès de l’ordre de 2% de la configuration “radiale”. Il est clair qu’un effet aussi faible ne peut jouer sur des relevés très profonds où les effets de lentilles cumulées le long de la ligne de visée sont plus importants. Toutefois dans l’optique d’études de cisaillement cosmique grâce à des relevés à grande couverture du ciel, cette corrélation peut jouer (cf. par exemple Croft & Metzler (2000), Heavens et al. (2000)). Pour un redshift $z = 1$, le départ à l’isotropie mesuré ici ($\sim 500kpc$) doit apparaître sur des échelles de l’ordre de 1 arcmin. Enfin, le cisaillement cosmique est caractérisé par l’absence de mode “rotationnels” (cf. par exemple Pen et al. (2000)) et leur présence pourrait servir à extraire les alignements intrinsèques. Il est à noter que de tels modes ne sont pas clairement identifiables dans les mesures présentes, au niveau de bruit actuel et avec les hypothèses qui ont été faites, et de fait n’ont pu être quantifiés.

6.4 Conclusion

Les halos tendent à accréter de la matière dans leur plan équatorial. L’anisotropie mesurée est relativement faible, de l’ordre de 15 %, et a été détectée à la fois par une description continue de l’accrétion à R_{200} et dans la distribution des satellites autour des halos. Le grand nombre de halos permet de *quantifier* cet effet et de garantir sa représentativité. Les spins des satellites sont perpendiculaires à leur déplacement, suggérant que l’anisotropie est induite par les filaments, où l’on s’attend à observer cette configuration. Ce flot filamentaire de structures autour du halo induit également des

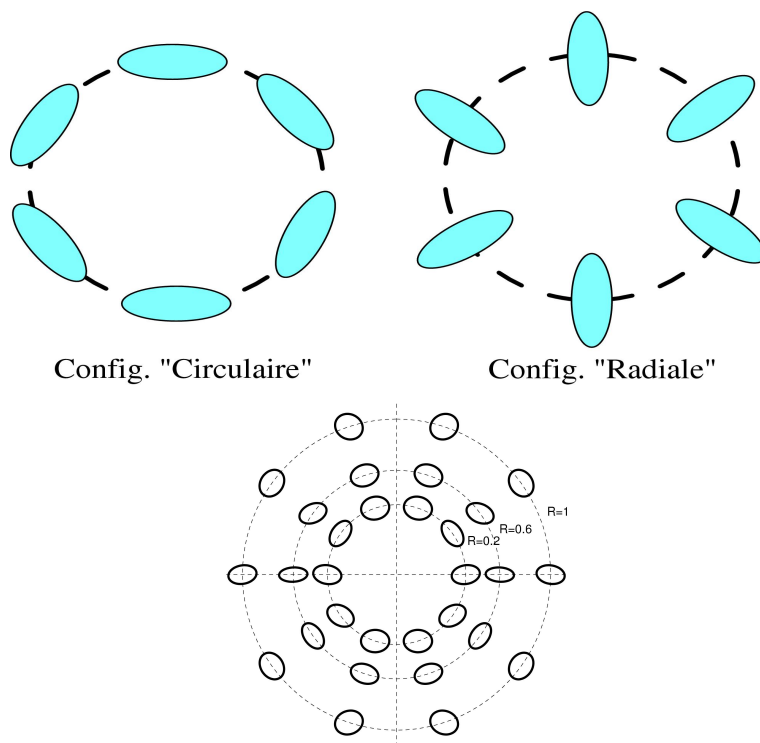


Figure 6.10: Définitions des deux types de configurations des ellipses autour du halo. Le spin du halo central est aligné avec la verticale passant par le centre du cercle pointillé. *A gauche*, une configuration type “circulaire”, où les ellipses sont alignées selon un cercle. *Au milieu* une configuration type “radiale” où les axes majeurs des ellipses pointent vers le centre du halo. *A droite* une représentation schématique de la matrice des probabilités donnée par la figure 13 de l'article ci-joint. Chaque ellipse représente l'orientation et l'ellipticité caractéristique dans les différents secteurs. L'orientation est donnée par le maximum de $1 + \xi_p$ tandis que l'ellipticité est fonction de la force de la corrélation (prise proportionnelle au signal sur bruit de $1 + \xi_p$).

effets en projection : la direction équatoriale présente une densité projetée de satellites supérieure au cas isotrope et l'orientation des satellites n'est pas aléatoire.

Une anisotropie d'accrétion est susceptible d'avoir un impact sur les propriétés dynamiques des galaxies. L'effet mesuré est significatif mais faible. Cette anisotropie mesurée à grande distance est susceptible d'être complètement masquée par l'anisotropie provoquée par le disque pour les régions les plus internes. Cependant, le halo n'étant pas sphérique, l'anisotropie de "bord" est également susceptible d'être renforcée au fur et à mesure que le flux accrété tombe dans le puit de potentiel. On peut également imaginer que la polarisation du halo, même sphérique, puisse accentuer le phénomène : la réponse du halo à un flux anisotrope est aussi anisotrope. Cette réponse induirait une rétroaction sur la perturbation et amplifierait l'effet de plan privilégié. La transmission de l'anisotropie au travers du halo pourrait naturellement constituer une application à la propagation des propriétés statistiques des flux. Cette application permettrait de fournir une conclusion claire sur l'anisotropie des régions internes.

7

**The origin and implications of dark matter
anisotropic cosmic infall on $\sim L^*$ haloes.
MNRAS, 2004, 352, 376-398.**

The origin and implications of dark matter anisotropic cosmic infall on $\approx L_\star$ haloes

D. Aubert^{1,3*}, C. Pichon^{1,2,3} and S. Colombi^{2,3}

¹ *Observatoire astronomique de Strasbourg, 11 rue de l'Universite, 67000 Strasbourg, France*

² *Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis boulevard d'Arago, 75014 Paris, France*

³ *Numerical Investigations in Cosmology (N.I.C.), CNRS, France*

Typeset 1 April 2005; Received / Accepted

ABSTRACT

We measure the anisotropy of dark matter flows on small scales (~ 500 kpc) in the near environment of haloes using a large set of simulations. We rely on two different approaches to quantify the anisotropy of the cosmic infall: we measure the flows at the haloes' virial radius while describing the infalling matter via fluxes through a spherical shell; we measure the spatial and kinematical distributions of satellites and substructures around haloes detected by the subclump finder ADAPTAHOP first described in the appendix B. The two methods are found to be in agreement both qualitatively and quantitatively via one and two points statistics.

The peripheral and advected momentum is correlated with the spin of the embeded halo at a level of 30% and 50%. The infall takes place preferentially in the plane perpendicular to the direction defined by the halo's spin. We computed the excess of equatorial accretion both through rings and via a harmonic expansion of the infall.

The level of anisotropy of infalling matter is found to be $\sim 15\%$. The substructures have their spin orthogonal to their velocity vector in the halo's rest frame at a level of about 5%, suggestive of an image of a flow along filamentary structures which provides an explanation for the measured anisotropy. Using a 'synthetic' stacked halo, it is shown that the satellites' positions and orientations relative to the direction of the halo's spin are not random even in projection. The average ellipticity of stacked haloes is 10%, while the alignment excess in projection reaches 2%. All measured correlations are fitted by a simple 3 parameters model.

We conclude that a halo does not see its environment as an isotropic perturbation, investigate how the anisotropy is propagated inwards using perturbation theory, and discuss briefly implications for weak lensing, warps and the thickness of galactic disks.

Key words: Cosmology: simulations, Galaxies : formation.

1 INTRODUCTION

Isotropy is one of the fundamental assumptions in modern cosmology and is widely verified on very large scales, both in large galaxies' surveys and in numerical simulations. However on scales of a few Mpc, the matter distribution is structured in clusters and filaments. The issue of the anisotropy down to galactic and cluster scales has long been studied, as it is related to the search for large scale structuration in the near-environment of galaxies. For example, both observational study (e.g. West (1994), Plionis & Basilakos (2002), Kitzbichler & Saurer (2003)) and numerical investigations (e.g. Faltenbacher et al. (2002)) showed that galaxies tend to be aligned with their neighbours and support the vision of anisotropic mergers along filamentary structures. On smaller scales, simulations of rich clusters showed that the shape and velocity ellipsoids of haloes tend to be aligned with the distribution of infalling satel-

lites which is strongly anisotropic (Tormen (1997)). However the point is still moot and recent publications did not confirm such an anisotropy using resimulated haloes; they proposed 20% as a maximum for the anisotropy level of the satellites distribution (Vitvitska et al. (2002)).

When considering preferential directions within the large scale cosmic web, the picture that comes naturally to mind is one involving these long filamentary structures linking large clusters to one other. The flow of haloes within these filaments can be responsible for the emergence of preferential directions and alignments. Previous publications showed that the distributions of spin vectors are not random. For example, haloes in simulations tend to have their spin pointing orthogonally to the filaments' direction (Faltenbacher et al. (2002)). Furthermore, down to galactic scales, the angular momentum remains mainly aligned within haloes (Bullock et al. (2001)). Combined with the results suggesting that haloes' spins are mostly sensitive to recent infall (van Haarlem & van de Weygaert (1993)), these alignment properties fit well with accre-

* E-mail:aubert@astro.u-strasbg.fr

tion scenarii along special directions : angular momentum can be considered as a good marker to test this picture.

Most of these previous studies focused on the fact that alignments and preferential directions are consequences of the formation process of haloes. However, the effects of such preferential directions on the inner properties of galaxies have been less addressed. It is widely accepted that the properties of galaxies partly result from their interactions with their environments. While the amplitude of the interactions is an important parameter, some issues cannot be studied without taking into account the spatial extension of these interactions. For example, a warp may be generated by the torque imposed by infalling matter on the disk (Ostriker & Binney (1989), López-Corredoira et al. (2002)) : the direction but also the amplitude of the warp are a direct consequence of the spatial configuration of the perturbation. Similarly, it is likely that disks' thickening due to infall is not independent of the incoming direction of satellites (e.g. Quinn et al. (1993), Velazquez & White (1999), Huang & Carlberg (1997)).

Is it possible to observe the small-scale alignment ? In particular, weak lensing deals with effects as small as the level of detected anisotropy (if not smaller) (e.g. Hatton & Ninin (2001), Croft & Metzler (2000), Heavens et al. (2000)), hence the importance to put quantitative constraints on the existence of alignments on small scales. Therefore, the present paper also addresses the issue of detecting preferential projected orientations on the sky of substructures within haloes.

Our main aim is to provide quantitative measurements to study the consequences of the existence of preferential directions on the dynamical properties of haloes and galaxies, and on the observation of galaxy alignments. Hence our point of view is more galactocentric (or cluster-centric) than previous studies. We search for local alignment properties on scales of a few hundred kpc. Using a large sample of low resolution numerical simulations, we aim to extract quantitative results from a large number of halo environments. We reach a higher level of statistical significance while reducing the cosmic variance. We applied two complementary approaches to study the anisotropy around haloes: the first one is particulate and uses a new substructure detection tool ADAPTAHOP, the other one is the spherical galactocentric fluid approach. Using two methods, we can assess the self-consistency of our results.

After a brief description of our set of simulations (§2), we describe the galactocentric point of view and study the properties of angular momentum and infall anisotropy measured at the virial radius (§3). In (§4) we focus on anisotropy in the distribution of discrete satellites and substructures and we study the properties of the satellites' proper spin, which provides an explanation for the detected anisotropy. In (§5) we discuss the level of anisotropy as seen in projection on the plane of the sky. We then investigate how the anisotropic infall is propagated inwards and discuss the possible implications of our results to weak lensing and to the dynamics of the disk through warp generation and disk thickening (§6). Conclusions and prospects follow. The appendix describes the substructures detection tool ADAPTAHOP together with the relevant aspects of one point centered statistics on the sphere. We also formally derive there the perturbative inward propagation of infalling fluxes into a collisionless self gravitating sphere.

2 SIMULATIONS

In order to achieve a sufficient sample and ensure a convergence of the measurements, we produced a set of ~ 500 simulations.

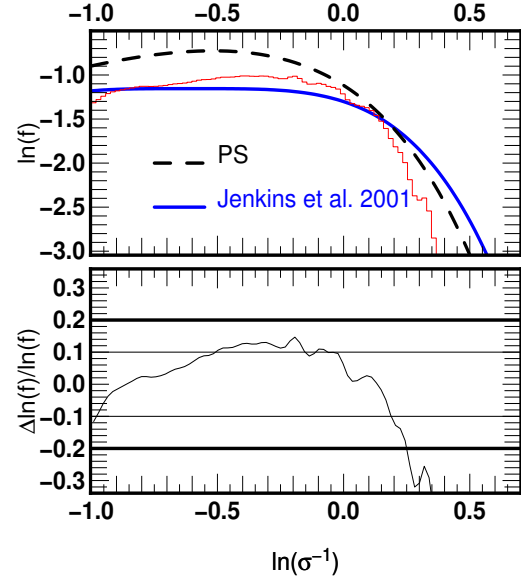


Figure 1. *Top* : The mass function $f(\sigma(M))$ of haloes (thin red line) compared to the Press-Schechter model (black dashed line) and to the fitting formula of Jenkins et al. (2001) (blue thick line). *Bottom* : relative residuals between the fitting formula and the mass function.

Each of them consists of a $50 h^{-1} \text{ Mpc}^3$ box containing 128^3 particles. The mass resolution is $5 \cdot 10^9 M_\odot$. A Λ CDM cosmogony ($\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $h = 0.7$ and $\sigma_8 = 0.928$) is implemented with different initial conditions. These initial conditions were produced with GRAFIC (Bertschinger (2001)) where we chose a BBKS (Bardeen et al. (1986)) transfer function to compute the initial power spectrum. The initial conditions were used as inputs to the parallel version of the treecode GADGET (Springel et al. (2001)). We set the softening length to $19 h^{-1} \text{ kpc}$. The halo detection was performed using the halo finder HOP (Eisenstein & Hut (1998)). We employed the density thresholds suggested by the authors ($\Delta_{\text{outer}} = 80$, $\delta_{\text{saddle}} = 2.5\delta_{\text{outer}}$, $\delta_{\text{peak}} = 3\delta_{\text{outer}}$). As a check, we computed the haloes mass function at $z = 0$ defined as (Jenkins et al. (2001)) :

$$f(\sigma(M)) = \frac{M}{\rho_0} \frac{dn}{d \ln \sigma^{-1}}. \quad (1)$$

Here $n(M)$ is the abundance of haloes with a mass less than M and ρ_0 the average density, while $\sigma^2(M)$ is the variance of the density field smoothed with a top-hat filter at a scale which encloses a mass M . The simulations mass function is shown in Fig. 1 and compared to the Press-Schechter model (see Press & Schechter (1974)) and to the fitting formula given by Jenkins et al. (2001). The Press-Schechter model overestimates the number of small haloes by a factor of 1.7 as was already demonstrated by e.g. Gross et al. (1998). The fitting formula seems to be in better agreement with the measured mass function with an accuracy of $\sim 10\%$ for masses below $3 \cdot 10^{14} M_\odot$.

As an other means to check our simulations and to evaluate the convergence ensured by our large set of haloes, we computed the probability distribution of the spin parameter λ' , defined as (Bullock et al. (2001)):

$$\lambda' \equiv \frac{J}{\sqrt{2} M V R_{200}}. \quad (2)$$

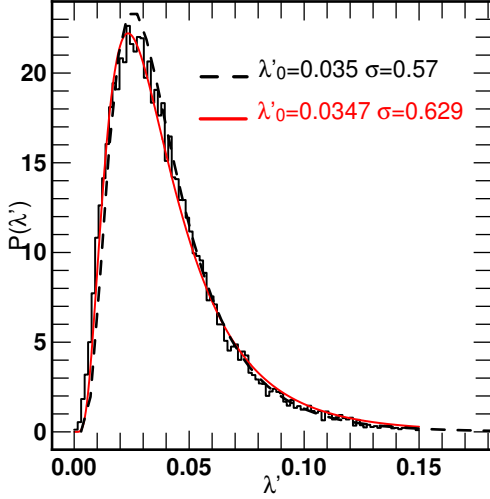


Figure 2. The distribution of the spin parameter λ' defined as $\lambda' \equiv J/(\sqrt{2}MV R_{200})$ computed using 100 000 haloes with a mass greater than $5 \cdot 10^{12} M_\odot$. The distribution can be fit with a log-normal function with parameters $\lambda'_0 = 0.0347 \pm 0.0006$ and $\sigma = 0.63 \pm 0.02$ (red solid line). The curve parametrized by $\lambda'_0 = 0.035$ and $\sigma = 0.57$ is also shown (black dashed line). The two results are almost concurrent, indicating that the value of σ is not so strongly constrained using a log-normal distribution.

Here J is the angular momentum contained in a sphere of virial radius R_{200} with a mass M and $V^2 = GM/R_{200}$. The measurement was performed on 100 000 haloes with a mass larger than $5 \cdot 10^{12} M_\odot$ as explained in the next section. The resulting distribution for λ' is shown in Fig. 2. The distribution $P(\lambda')$ is well fitted by a log-normal distribution (e.g. Bullock et al. (2001)):

$$P(\lambda') d\lambda' = \frac{1}{\lambda' \sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\ln^2(\lambda'/\lambda'_0)}{2\sigma^2}\right) d\lambda'. \quad (3)$$

We found $\lambda'_0 = 0.0347 \pm 0.0006$ and $\sigma = 0.63 \pm 0.02$ as best-fit values and they are consistent with parameters found by Peirani et al. (2003) ($\lambda' = 0.035$ and $\sigma = 0.57$) but our value of σ is slightly larger. However, using $\sigma = 0.57$ does not lead to a significantly different result. The value of σ is not strongly constrained and no real disagreement exists between our and their best-fit values. The halo's spin, on which some of the following investigations are based, is computed accurately.

3 A GALACTOCENTRIC POINT OF VIEW

The analysis of exchange processes between the haloes and the intergalactic medium will be carried out using two methods. The first one can be described as ‘discrete’. The accreted objects are explicitly counted as particles or particle groups. This approach will be applied and discussed later in this paper. The other method relies on measuring directly relevant quantities on a surface at the interface between the halo and the intergalactic medium. In this approach, the measured quantities are scalar, vector or tensor fluxes, and we assign to them *flux densities*. The flux density representation allows us to describe the angular distribution and temporal coherence of infalling objects or quantities related to this infall. The formal relation between a flux density, $\varpi(\Omega)$, and its associated total flux through a region S , Φ , is:

$$\Phi \equiv \int_S \varpi(\Omega) \cdot d\Omega, \quad (4)$$

where Ω denotes the position on the surface where ϖ is evaluated and $d\Omega$ is the surface element normal to this surface. Examples of flux densities are mass flux density, $\rho \mathbf{v}_r$, or accreted angular momentum, $\rho \mathbf{v}_r \mathbf{L}$. In particular, this description in terms of a spherical boundary condition is well-suited to study the dynamical stability and response of galactic systems. In this section, these fields are used as probes of the environment of haloes.

3.1 Halo analysis

Once a halo is detected, we study its environment using a galactocentric point of view. The relevant fields $\varpi(\Omega)$ are measured on the surface of a sphere centered on the halo's centre of mass with a R_{200} radius (where $3M/(4\pi R_{200}^3) \equiv 200\bar{\rho}$) (cf. fig. 3). There is no exact, nor unique, definition of the halo's outer boundary and our choice of a R_{200} (also called the virial radius) is the result of a compromise between a large distance to the halo's center and a good signal-to-noise ratio in the spherical density fields determination.

We used 40×40 regularly sampled maps in spherical angles $\Omega = (\vartheta, \phi)$, allowing for an angular resolution of 9 degrees. We take into account haloes with a minimum number of 1000 particles, which gives a good representation of high density regions on the sphere. This minimum corresponds to $5 \cdot 10^{12} M_\odot$ for a halo, and allows us to reach a total number of 10 000 haloes at $z=2$ and 50 000 haloes at $z=0$. This range of mass corresponds to a somewhat high value for a typical L_* galaxy but results from our compromise between resolution and sample size. Detailed analysis of the effects of resolution is postponed to Aubert & Pichon (2004).

The density, $\rho(\Omega)$, on the sphere is computed using the particles located in a shell with a radius of R_{200} and a thickness of $R_{200}/10$ (this is quite similar in spirit to the count in cell techniques widely used in analyzing the large scale structures, but in the context of a sphere the cells are shell segments). Weighting the density with quantities such as the radial velocity or the angular momentum of each particle contained within the shell, the associated spherical fields, $\rho \mathbf{v}_r(\Omega)$ or $\rho \mathbf{L}(\Omega)$, can be calculated for each halo. Two examples of spherical maps are given in Fig. 3. They illustrate a frequently observed discrepancy between the two types of spherical fields, $\rho(\Omega)$ and $\rho \mathbf{v}_r(\Omega)$. The spherical density field, $\rho(\Omega)$, is strongly quadrupolar, which is due to the intersection of the halo triaxial 3-dimensional density field by our 2-dimensional virtual sphere. By contrast the flux density of matter, $\rho \mathbf{v}_r(\Omega)$, does not have such quadrupolar distribution. The contribution of halo particles to the net flux density is small compared to the contribution of particles coming from the outer intergalactic region.

3.2 Two-points statistics: advected momentum and halo's spin

The influence of infalling matter on the dynamical state of a galaxy depends on whether or not the infall occurs inside or outside the galactic plane. If the infalling matter is orbiting in the galactic plane, its angular momentum is aligned with the angular momentum of the disk. Taking the halo's spin as a reference for the direction of the ‘galactic’ plane, we want to quantify the level of alignment of the orbital angular momentum of peripheral structures (i.e. as measured on the virial sphere) relative to that spin. The inner spin \mathbf{S} is calculated using the positions-velocities (\mathbf{r}_{part} , \mathbf{v}_{part}) of

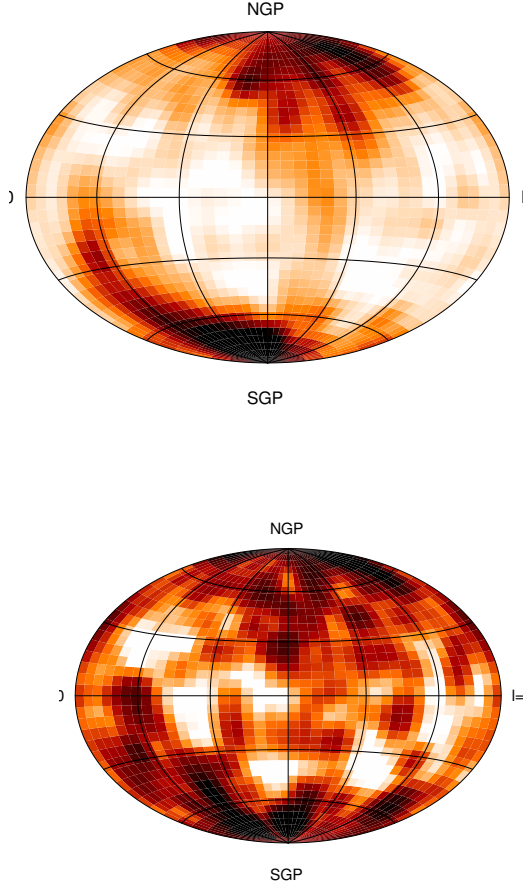


Figure 3. A galactocentric point of view of the density field, $\rho(\Omega)$ (top) and of the flux density of mass, $\rho\mathbf{v}_r(\Omega)$, surrounding the same halo (bottom). This measurement was extracted from a Λ CDM cosmological simulation. The considered halo contained about $10^{13} M_\odot$ or 2000 particles. The high density zones are darker. The density's spherical field shows a strong quadrupolar component with high density zones near the two poles while this component is less important for the mass flux density field measured on the sphere. This discrepancy between the two spherical fields is common and reflects the shape of the halo as discussed in the main text.

the particles inside the R_{200} sphere in the centre of mass rest frame $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$:

$$\mathbf{S} = \sum_{\text{part}} (\mathbf{r}_{\text{part}} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{v}_{\text{part}} - \mathbf{v}_0). \quad (5)$$

\mathbf{r}_0 is the position of the halo centre of mass, while \mathbf{v}_0 stands for the average velocity of the halo's particles. This choice of rest frame is not unique; another option would have been to take the most bounded particle as a reference. Nevertheless, given the considered mass range, no significant alteration of the results is to be expected. The total angular momentum, \mathbf{L}_T (measured at the virial radius, R_{200}) is computed for each halo using the spherical field $\rho\mathbf{L}(\Omega)$:

$$\mathbf{L}_T = \int_{4\pi} \rho\mathbf{L}(\Omega) d\Omega. \quad (6)$$

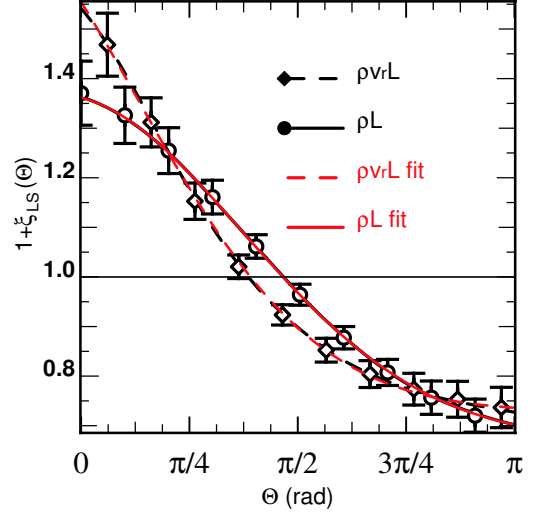


Figure 4. Excess probability, $1 + \xi_{LS}(\theta)$, of the angle, θ , between the halo's spin (\mathbf{S}) and the angular momentum (\mathbf{L}_T for total, or \mathbf{L}_A for accreted) measured on the virial sphere using the fluid located at the virial radius. Here \mathbf{L}_T represents the *total* angular momentum measured on the virial sphere (corresponding curve : solid line, circle symbols) and \mathbf{L}_A the *total accreted* angular momentum measured on the sphere (corresponding curve: dashed line, diamond symbols). The error bars represent the 3σ dispersion measured on subsamples of 10 000 haloes. The correlation takes into account the uncertainty on the angle determination due to the small number of particles at the virial radius. Here $\xi_{LS}(\theta) \equiv 0$ would be expected for an isotropic distribution of angles between \mathbf{S} and \mathbf{L} while the measured distributions indicate that the aligned configuration ($\theta \sim 0$) is significantly more likely. The two excess probability distributions are well-fitted by Gaussian functions (red curves: see main text).

The angle, θ , between the spin of the inner particles \mathbf{S} and the total orbital momentum \mathbf{L}_T of 'peripheral' particles is then easily computed:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{L}_T \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{L}_T| |\mathbf{S}|} \right). \quad (7)$$

Measuring this angle θ for all the haloes of our simulations allow us to derive a raw probability distribution of angle, $d_r(\theta)$. An isotropic distribution corresponds to a non-uniform probability density $d_{\text{iso}}(\theta)$. Typically d_{iso} is smaller near the poles (i.e. near the region of alignment) leading to a larger correction for these angles and to larger error bars in these regions (see fig. 4): this is the consequence of smaller solid angles in the polar regions (which scales like $\sim \sin \theta$) than in equatorial regions for a given θ aperture. The true anisotropy is estimated by measuring the ratio:

$$d_r(\theta)/d_{\text{iso}}(\theta) \equiv 1 + \xi_{LS}(\theta), \quad (8)$$

Here, $1 + \xi_{LS}(\theta)$ measures the excess probability of finding \mathbf{S} and \mathbf{L}_T away from each other, while $\xi_{LS}(\theta)$ is the cross correlation of the angles of \mathbf{S} and \mathbf{L}_T . Thus having $\xi_{LS}(\theta) > 0$ (resp. $\xi_{LS}(\theta) < 0$) implies an excess (resp. a lack) of configurations with a θ separation relative to an isotropic situation.

To take into account the error in the determination of θ , each count (or Dirac distribution) is replaced with a Gaussian distribution and contributes to several bins:

$$\delta(\theta - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(\theta_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_0^2} \right), \quad (9)$$

where \mathcal{N} stands for a normalized Gaussian distribution and where the angle uncertainty is approximated by $\sigma_0 \sim (4\pi/N)^{1/2}$ using N particles as suggested by Hatton & Ninin (2001). If N_v is equal to the number of particles used to compute $\rho\mathbf{L}(\Omega)$ on the virial sphere and if N_h is the number of particles used to compute the halo spin, the error we associated to the angle between the angular momentum at the virial sphere and the halo spin is:

$$\sigma_0 = \sqrt{(4\pi/N_v) + (4\pi/N_h)} \sim \sqrt{(4\pi/N_v)}, \quad (10)$$

because we have $N_v \ll N_h$. Note that this Gaussian correction introduces a bias in mass: a large infall event (large N_v , small σ_0) is weighted more for a given θ_0 than a small infall (small N_v , large σ_0). All the distributions are added to give the final distribution:

$$d_r(\theta) = \sum_p^{N_p} \mathcal{N}(\theta_p, \sigma_p), \quad (11)$$

where N_p stands for the total number of measurements (i.e. the total number of haloes in our set of simulations). The corresponding isotropic angle distribution is derived using the same set of errors randomly redistributed:

$$d_{\text{iso}}(\theta) = \sum_p^{N_p} \mathcal{N}(\theta_p^{\text{iso}}, \sigma_p). \quad (12)$$

Fig. 4 shows the excess probability, $1 + \xi_{\text{LS}}(\theta)$, of the angle between the total orbital momentum of particles at the virial radius \mathbf{L}_T and the halo spin \mathbf{S} . The solid line is the correlation deduced from 40 000 haloes at redshift $z = 0$. The error bars were determined using 50 subsamples of 10 000 haloes extracted from the whole set of available data. An average Monte-Carlo correlation and a Monte-Carlo dispersion σ is extracted. In Fig. 4, the symbols stand for the average Monte-Carlo correlation, while the vertical error bars stand for the 3σ dispersion.

The correlation in Fig. 4 shows that all angles are not equivalent since $\xi_{\text{LS}}(\theta) \neq 0$. It can be fitted with a Gaussian curve using the following parametrization:

$$1 + \xi_{\text{LS}}(\theta) = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi a_3}} \exp \left[-(\theta - a_2)^2 / (2a_3^2) \right] + a_4. \quad (13)$$

The best fit parameters are $a_1 = 2.351 \pm 0.006$, $a_2 = -0.178 \pm 0.002$, $a_3 = 1.343 \pm 0.002$, $a_4 = 0.6691 \pm 0.0004$. The maximum being located at small angles, the aligned configuration, $\widehat{\mathbf{L}_T \mathbf{S}} \sim 0$, is the most enhanced configuration (relative to an isotropic distribution of angle θ). The aligned configuration of \mathbf{L}_T relative to \mathbf{S} is 35% ($\xi_{\text{LS}}(0) = 0.35$) more frequent in our measurements than for a random orientation of \mathbf{L}_T . As a consequence, matter is preferentially located in the plane perpendicular to the spin, which is hereafter referred to as the ‘equatorial’ plane.

The angles, (ϑ, ϕ) , are measured relative to the simulation boxes z-axes and x-axes and not relative to the direction of the spin. Thus we do not expect artificial \mathbf{L}_T - \mathbf{S} correlations due to the sampling procedure. Nevertheless it is expected on geometrical ground that the aligned configuration is more likely since the contribution of recent infalling dark matter to the halo’s spin is important. As a check, the same correlation was computed using the total *advected* orbital momentum:

$$\mathbf{L}_A = \int_{4\pi} \mathbf{L} \rho v_r(\Omega) \cdot d\Omega. \quad (14)$$

The resulting correlation (see Fig. 4) is similar to the previous one but the slope toward small values of θ is even stronger and for example the excess of aligned configuration reaches the level of 50%

($\xi_{\text{LS}}(0) \sim 0.5$). The correlation can be fitted following Eq. 13 with $a_1 = 3.370 \pm 0.099$, $a_2 = -0.884 \pm 0.037$, $a_3 = 1.285 \pm 0.016$ and $a_4 = 0.728 \pm 0.001$. This enhancement confirms the relevance of advected momentum for the build-up of the halo’s spin, though the increase in amplitude is limited to 0.2 for $\theta = 0$. The halo’s inner spin is dominated by the orbital momentum of infalling clumps (given the larger lever arm of these virialised clumps and their high radial velocities) that have just passed through the virial sphere, as suggested by Vitvitska et al. (2002) (see also appendix D). It reflects a temporal coherence of the infall of matter and thus of angular momentum, and a geometrical effect: a fluid clump which is just being accreted can intersect the virtual virial sphere, being in part both ‘inside’ and ‘outside’ the sphere. Finally a small fraction of the accreted momentum may come from material that already passed once through the R_{200} sphere. This component would be aware of the dynamical properties of the inner halo. Thus it is expected that the halo spin \mathbf{S} and the momenta \mathbf{L}_T and \mathbf{L}_A at the virial radius are correlated since the halo’s spin is dominantly set by the properties of the angular momentum in its outer region. The anisotropy of the two fields \mathbf{L}_T and \mathbf{L}_A do not have the same implication. The spatial distribution of advected angular momentum, \mathbf{L}_A , contains stronger dynamical information. In particular, the variation of the halo+disk’s angular momentum is induced by tidal torques but also by accreted momentum for an open system. For example the anisotropy of $\mathbf{L} \rho \mathbf{v}_r$ should be reflected in the statistical properties of warped disks as discussed later in sections 6.1 and 6.2.1.

3.3 One-point statistics: equatorial infall anisotropy

The previous measurement doesn’t account for dark matter falling into the halo with a very small angular momentum (radial orbits). We therefore measured the excess of equatorial accretion, δ_m , defined as follow. We can measure the average flow density of matter, Φ_r , in a ring centered on the equatorial plane:

$$\Phi_r \equiv \frac{1}{S_r} \int_{-\pi/8 < \theta < \pi/2 < \pi/8} \rho \mathbf{v}_r(\Omega) \cdot d\Omega, \quad (15)$$

where $S_r = \int_{-\pi/8 < \theta < \pi/2 < \pi/8} d\Omega$. The ring-region is defined by the area where the polar angle satisfies $\theta_{\text{pol}} = \pi/2 \pm \pi/8$ which corresponds to about 40 % of the total covered solid angle. The larger this region is, the better the convergence of the average value of Φ_r , but the lower the effects of anisotropy, since averaging over a larger surface leads to a stronger smoothing of the field. This value of $\pm\pi/8$ is a compromise between these two contradictory trends. In the next section and in the appendix, we discuss more general filtering involving spherical harmonics which are related to the dynamical evolution of the inner component of the halo. We also measure the flow averaged on all the directions $\overline{\Phi}$:

$$\overline{\Phi} \equiv \overline{\rho \mathbf{v}_r} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \rho \mathbf{v}_r(\Omega) \cdot d\Omega. \quad (16)$$

Since we are interested in accretion, we computed Φ_r and $\overline{\Phi}$ using only the infalling part of the density flux of matter, where $\rho \mathbf{v}_r(\Omega) \cdot d\Omega < 0$, ignoring the outflows. The fraction of outflowing material decreases from 20% of the total integrated flux at $z = 0$ to 10% at $z = 2$. We define δ_m as

$$\delta_m \equiv \frac{\Phi_r - \overline{\Phi}}{\overline{\Phi}}. \quad (17)$$

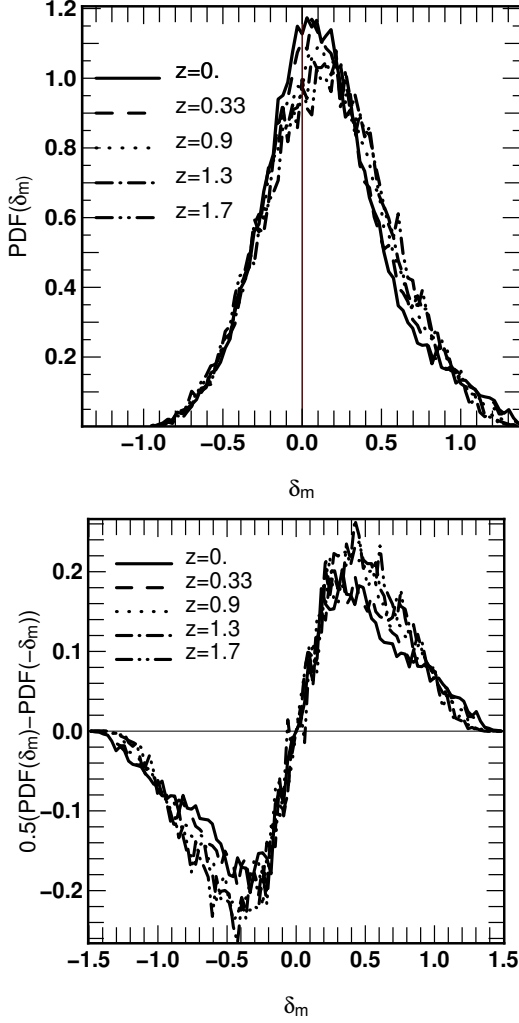


Figure 5. *Top:* Normalized probability distributions (PDF) of the excess of equatorial infall, δ_m , measured at the virial radius. The quantity $1 + \delta_m$ stands for the ratio between the flux of matter through the equatorial sub-region of the R_{200} sphere and the average flux of matter through the whole R_{200} sphere. The equatorial sub-region is defined as being perpendicular to the direction of the halo’s spin. It formally corresponds to the top-hat-smoothed mass flux density contrast. $\delta_m = 0$ is expected for an isotropic infall of matter through the virial sphere. The average value of δ_m is always greater than 0 indicating that the infall of matter is, on average, more important in the direction orthogonal to the halo’s spin vector than in other directions. *Bottom:* the antisymmetric part of the δ_m distribution. Being positive for positive values of δ_m , the antisymmetric part of the δ_m distributions shows that accretion in the equatorial plane is in excess relative to the one expected from an isotropic accretion of matter.

This number quantifies the anisotropy of the infall. It is positive when infall is in excess in the galactic-equatorial plane, while for isotropic infall $\delta_m \equiv 0$. The quantity δ_m can be regarded as being the ‘flux density’ contrast of the infall of matter in the ring region (formally it is the centered top-hat-filtered mass flux density contrast as shown in appendix C1). This measurement, in contrast to those of the previous section does not rely on some knowledge on the inner region of the halo but only on the properties of the environment.

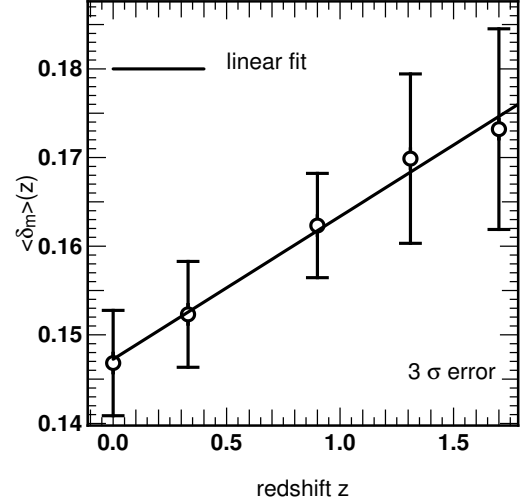


Figure 6. The redshift evolution of $\langle \delta_m \rangle$. The average $\langle \cdot \rangle$ is performed on a set of 40 000 haloes at $z = 0$ and 10 500 haloes at $z = 1.8$. The error bars stand for the error on the estimation of $\langle \delta_m \rangle$ with $\Delta = \sigma(\delta_m)/\sqrt{N}$. N is the number of haloes needed to compute $\langle \delta_m \rangle$. $\langle \delta_m \rangle$ is always positive and indicates an excess of accretion in the equatorial plane. This redshift evolution can be fitted as $\langle \delta_m \rangle(z) = 0.0161(\pm 0.0103)z + 0.147(\pm 0.005)$. This excess is detected for every redshift smaller than $z = 2$, which indicates an excess of accretion in the equatorial region. We applied a mass threshold of $5 \cdot 10^{12} M_\odot$ to our haloes for every redshift. Then, the halo population is different from one redshift to another. This selection effect may dominate the observed time evolution.

Fig. 5 displays the normalized distribution of δ_m measured for 50 000 haloes with a mass in excess of $5 \cdot 10^{12} M_\odot$ and for different redshifts ($z = 1.8, 1.5, 0.9, 0.3, 0.0$). The possible values for δ_m range between $\delta_m \sim -1$ and $\delta_m \sim 1.5$. The average value $\langle \delta_m \rangle$ of the distributions is statistically larger than zero (see also Fig. 6). Here $\langle \cdot \rangle$ stands for the statistical expectation, which in this paper is approximated by the arithmetic average over many haloes in our simulations. The antisymmetric part of the distribution of δ_m is positive for positive δ_m . The PDF of δ_m is skewed, indicating an excess of accretion through the equatorial ring. The median value for δ_m is $\delta_{med} = 0.11$, while the first 25% haloes have $\delta_m < \delta_{25} \equiv -0.11$ and the first 75% haloes have $\delta_m < \delta_{75} \equiv 0.37$. Therefore we have $(\delta_{75} - \delta_{med})/(\delta_{25} - \delta_{med}) = 1.13$, which quantifies how the distribution of δ_m is positively skewed. The skewness $S_3 = \langle (\delta - \bar{\delta})^3 \rangle / \langle (\delta - \bar{\delta})^2 \rangle^{3/2}$ is equal to 0.44. Combined with the fact that the average value $\langle \delta_m \rangle$ is always positive, this shows that the infall of matter is larger in the equatorial plane than in the other directions.

This result is robust with respect to time evolution (see Fig. 6). At redshift $z = 1.8$, we have $\langle \delta_m \rangle = 0.17$ which falls down to $\langle \delta_m \rangle = 0.145$ at redshift $z = 0$. This redshift evolution can be fitted as $\langle \delta_m \rangle(z) = 0.0161(\pm 0.0103)z + 0.147(\pm 0.005)$. This trend should be taken with caution. For every redshift z we take in account haloes with a mass bigger than $5 \cdot 10^{12} M_\odot$. Thus the population of haloes studied at $z=0$ is not exactly the same as the one studied at $z=2$. Actually, at $z=0$, there is a strong contribution of small haloes (i.e. with a mass close to $5 \cdot 10^{12} M_\odot$) which just crossed the mass threshold. The accretion on small haloes is more isotropic as shown in more details in appendix D2. One possible explanation is that they experienced less interactions with their environment and have had since time to relax which implies a smaller

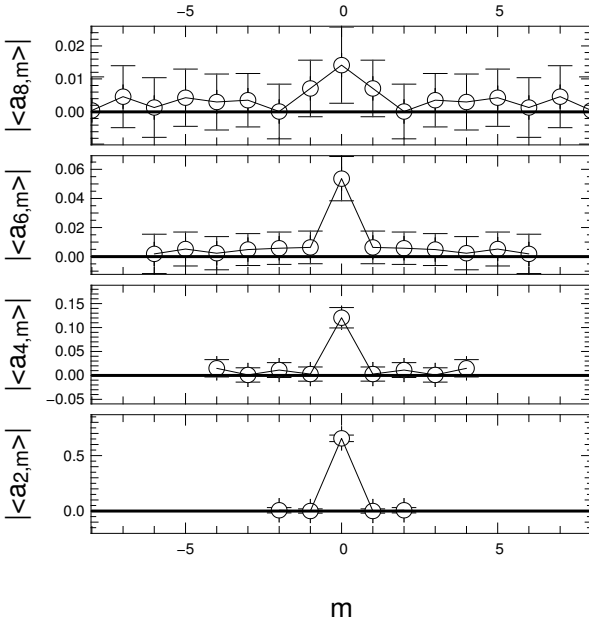


Figure 7. The convergence of modulus of the real part of $\langle \tilde{a}_{\ell}^m \rangle$, for $\ell = 2, 4, 6, 8$. The \tilde{a}_{ℓ}^m decomposition was computed for 25 000 haloes and each coefficient has been normalized with the corresponding C_0 (see text for details). Here, $\langle \rangle$ stands for the median while the error bars stand for the distance between the 5th and the 95th centile. The median value of $\langle \tilde{a}_{\ell}^m \rangle$ is zero except for the $\langle \tilde{a}_{\ell}^0 \rangle$ coefficient: this is a signature of a field invariant to azimuthal rotations.

correlation with the spatial distribution of the infall. Also bigger haloes tend to lie in more coherent regions, corresponding to rare peaks, whereas smaller haloes are more evenly distributed. The measured time evolution of the anisotropy of the infall of matter therefore seems to result from a competition between the trend for haloes to become more symmetric and the bias corresponding to a fixed mass cut.

In short, the infall of matter measured at the virial radius in the direction orthogonal to halo spin is larger than expected for an isotropic infall.

3.4 Harmonic expansion of anisotropic infall

As mentioned earlier (and demonstrated in appendix A), the dynamics of the inner halo and disk is partly governed by the statistical properties of the flux densities at the boundary. Accounting for the gravitational perturbation and the infalling mass or momentum requires projecting the perturbation over a suitable basis such as the spherical harmonics:

$$\varpi(\Omega) = \sum_{\ell, m} \alpha_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\Omega), \quad (18)$$

Here, ϖ stands for, e.g. the mass flux density, the advected momentum flux density, or the potential perturbation. The resulting α_{ℓ}^m coefficients correspond to the spherical harmonic decomposition in an *arbitrary* reference frame. The different m correspond to the different fundamental orientations for a given multipole ℓ . A spherical field with no particular orientation gives rise to a field averaged over the different realisations which appear as a monopole, i.e. $\langle \alpha_{\ell m} \rangle = 0$ for $\ell \neq 0$. Having constructed our virial sphere

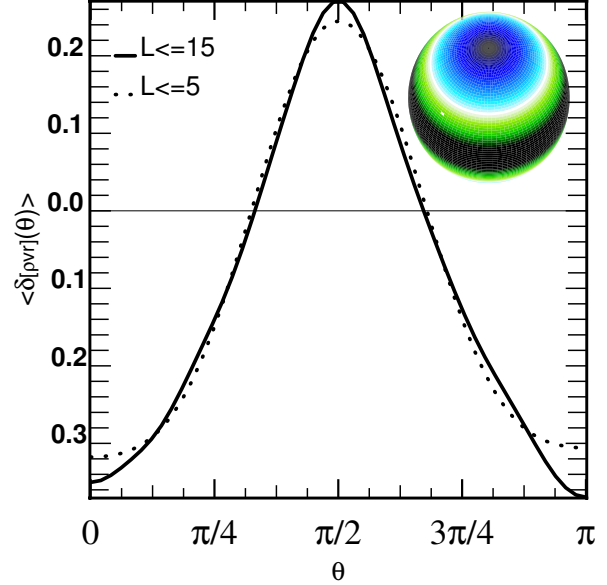


Figure 8. An illustration of the convergence of the $\tilde{a}_{\ell m}$ presented in Fig. 7. The solid line stands for the azimuthal average of the spherical contrast of accretion computed using Eq. (23). The dotted line for the spherical field reconstructed with $\ell \leq 5$. The insert represents the reconstructed spherical field using the expansion of the $\tilde{a}_{\ell m}$ of the mass flux measured at the virial sphere. The sphere presents an excess of accretion in the equatorial region because of the non-zero average value of $\tilde{a}_{\ell 0}$ coefficients (for even values of ℓ).

in a reference frame attached to the simulation box, we effectively performed a randomization of the spheres' orientation. However, since the direction of the halo's spin is associated to a general preferred orientation for the infall, it should be traced through the $\alpha_{\ell m}$ coefficients. Let us define the rotation matrix, \mathcal{R} , which brings the z -axis of the simulation box along the direction of the halo's spin. The spherical harmonic decomposition centered on the spin of the halo, a_{ℓ}^m , is given by (e.g. Varshalovich et al. (1988)):

$$a_{\ell}^m = \mathcal{R}[\alpha_{\ell'}^{m'}] \equiv \sum_{\ell', m'} \mathcal{R}_{\ell, \ell'}^{m, m'}(\vartheta, \varphi) \alpha_{\ell'}^{m'}. \quad (19)$$

If the direction of the spin defines a preferential plane of accretion, the corresponding a_{ℓ}^m will be systematically enhanced. We therefore expect the equatorial direction (which corresponds to $m = 0$ for every ℓ) not to converge to zero.

We computed the spherical harmonic decomposition of $\rho v_r(\vartheta, \varphi)$ given by Eq. (18) for the mass flux density of 25 000 haloes at $z = 0$, up to $\ell = 15$. For each spherical field of the mass density flux, we performed the rotation that brings the halo's spin along the z -direction to obtain a set of 'centered' a_{ℓ}^m coefficients. We also computed the related angular power spectra C_{ℓ} :

$$C_{\ell} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell}^m|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\alpha_{\ell}^m|^2. \quad (20)$$

Let us define the normalized \tilde{a}_{ℓ}^m (or harmonic contrast, see appendix C1),

$$\tilde{a}_{\ell}^m \equiv \sqrt{4\pi} \frac{a_{\ell}^m}{a_0^0} = \frac{a_{\ell}^m}{\text{sign}(a_0^0) \sqrt{C_0}}. \quad (21)$$

This compensates for the variations induced by our range of masses for the halo. For each ℓ , we present in Fig. 7 the median value,

$|\langle \text{Re}\{\tilde{a}_\ell^m\}\rangle|$ for $\ell = 2, 4, 6, 8$ computed for 25 000 haloes. All the \tilde{a}_ℓ^m have converged toward zero, except for the $\tilde{a}_{\ell 0}$ coefficients. The imaginary parts of \tilde{a}_ℓ^m have the same behaviour, except for the $\text{Im}\{\tilde{a}_{\ell 0}\}$ coefficients which vanish by definition (not shown here). The $m = 0$ coefficients are statistically non-zero. We find $\langle \tilde{a}_2^0 \rangle = -0.65 \pm 0.04$, $\langle \tilde{a}_4^0 \rangle = 0.12 \pm 0.02$, $\langle \tilde{a}_6^0 \rangle = -0.054 \pm 0.015$ and $\langle \tilde{a}_8^0 \rangle = 0.0145 \pm 0.014$. Errors stand for the distance between the 5th and the 95th centile. The typical pattern corresponding an $m = 0$ harmonic is a series of rings parallel to the equatorial plane. This confirms that the accretion occurs preferentially in a plane perpendicular to the direction halo's spin.

The spherical accretion contrast $\langle \delta_{\rho v_r}(\vartheta, \phi) \rangle$ can be reconstructed using the $\langle \tilde{a}_\ell^m \rangle$ coefficients (as shown in the appendix):

$$\delta_{[\rho v_r]}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} \tilde{a}_\ell^m Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) - 1. \quad (22)$$

In Fig. 8, the polar profile:

$$\langle \delta_{[\rho v_r]}(\vartheta) \rangle \equiv \sum_{\ell, m} \langle \tilde{a}_\ell^m \rangle Y_\ell^m(\vartheta, 0) - 1, \quad (23)$$

of this reconstructed spherical contrast is shown. This profile has been obtained using the $\langle \tilde{a}_\ell^m \rangle$ coefficients with $\ell \leq 5$ and $\ell \leq 15$. The contrast is large and positive near $\vartheta = \pi/2$ as expected for an equatorial accretion. The profile reconstructed using $\ell \leq 5$ is quite similar to the one using $\ell \leq 15$. This indicates that most of the energy involved in the equatorial accretion is contained in a typical angular scale of 36 degrees (a scale which is significantly larger than $\pi/20$ corresponding to the cutoff frequency in our sampling of the sphere as mentioned earlier).

Using a spherical harmonic expansion of the incoming mass flux density (Eq. (18)), we confirmed the excess of accretion in the equatorial plane found above. This similarity was expected since these two measurements (using a ring or using a spherical harmonic expansion) can be considered as two different filterings of the spherical accretion field as is demonstrated in the appendix C. The main asset of the harmonic filtering resides in its relevance for the description of the inner dynamics as is discussed in section 6.

3.5 Summary

To sum up, the two measurements of section 3.2 and 3.3 (or 3.4) are not sensitive to the same effects. The first measurement (involving the angular momentum $\rho \mathbf{L}$ at the virial radius) is mostly a measure of the importance of infalling matter in building the halo's proper spin. The second and the third measurements (involving the excess of accretion in the equatorial plane, δ_m , using rings and harmonic expansion) are quantitative measures of coplanar accretion. The equatorial plane of a halo is favoured relative to the accretion of matter (compared to an isotropic accretion) to a level of $\sim 12\%$ between $z = 2$ and $z = 0$. Down to the halo scale (~ 500 kpc), anisotropy is detected and is reflected in the spatial configuration of infalling matter.

4 ANISOTROPIC INFALL OF SUBSTRUCTURES

To confirm and assess the detected anisotropy of the matter infall on haloes in our simulations, let us now move on to a discrete framework and measure related quantities for satellites and substructures. In the hierarchical scenario, haloes are built up by successive mergers of smaller haloes. Thus if an anisotropy in the distribution of infalling matter is to be detected it seems reasonable

that this anisotropy should also be detected in the distribution of satellites. The previous galactocentric approach for the mass flow does not discriminate between an infall of virialised objects and a diffuse material accretion and therefore is also sensitive to satellites merging: one would need to consider, say, the energy flux density. However, it is not clear if satellites are markers of the general infall and Vitvitska et al. (2002) did not detect any anisotropy at a level greater than 20%.

The detection of substructures and satellites is performed using the code ADAPTAHOP which is described in details in the appendix. This code outputs trees of substructures in our simulations, by analysing the properties of the local dark matter density in terms of peaks and saddle points. For each detected halo we can extract the whole hierarchy of subclumps or satellites and their characteristics. Here we consider the leaves of the trees, i.e. the most elementary substructures the haloes contain. Each halo contains a 'core' which is the largest substructure in terms of particles number and 'satellites' corresponding to the smaller ones. We call the ensemble core + satellites the 'mother' or the halo. Naturally the number of substructures is correlated with the mother's mass. The bigger the number of substructures, the bigger the total mass. Because the resolution in mass of our simulations is limited, smaller haloes tend to have only one or two satellites. Thus in the following sections we will discriminate cases where the core have less than 4 satellites. A total of 50 000 haloes have been examined leading to a total of about 120 000 substructures.

4.1 Core spin - satellite orbital momentum correlations

In the mother-core-satellite picture, it is natural to regard the core as the central galactic system, while satellites are expected to join the halo from the intergalactic medium. One way to test the effect of large scale anisotropy is to directly compare the angle between the core's spin, \mathbf{S}_c , and the satellites' angular momentum, \mathbf{L}_s , relative to the core. These two angular momenta are chosen since they should be less correlated with each other than e.g. the haloes' spin and the angular momentum of its substructures. Furthermore, particles that belong to the cores are strictly distinct from those that belong to satellites, thus preventing any 'self contamination' effect. As a final safeguard, we took in account only satellites with a distance relative to the core larger than the mother's radius. The latter quantity is computed using the mean square distance of the particles belonging to the mother, thus we focus only on 'external' satellites. The core's spin is:

$$\mathbf{S}_c = \sum_p (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c) \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_c), \quad (24)$$

where \mathbf{r}_p and \mathbf{v}_p (resp. \mathbf{r}_c and \mathbf{v}_c) stands for particles' position and velocities (resp. the core's centre of mass position and velocity) and where:

$$r_p < d_c, \quad (25)$$

where d_c is the core's radius. The angular momentum for a satellite is computed likewise, with a different selection criterion on particles, namely:

$$|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s| < d_s, \quad (26)$$

where \mathbf{r}_s stands for the satellite's centre of mass position and d_s is its radius.

Fig. 9 displays the reduced distribution of the angle, θ_{cs} , between the core's spin and the satellites' orbital momentum, where θ_{cs} is defined by:

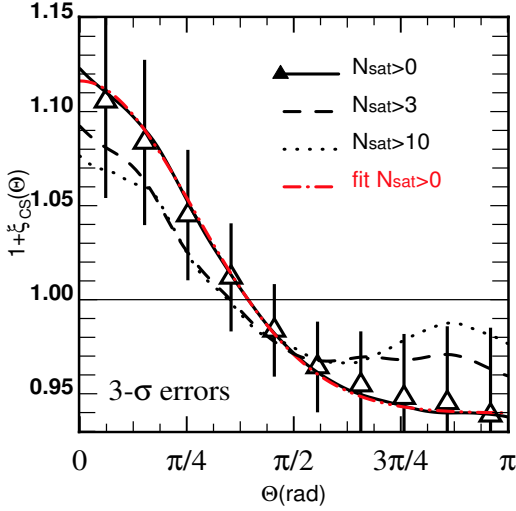


Figure 9. Excess probability, $1 + \xi_{CS}(\theta_{CS})$, of the angle between the core's spin and the orbital momentum of satellites. Cores have at least 1 satellite (solid line), 4 satellites (dashed line) and 10 satellites (dotted line). These curves have been normalized by the expected isotropic distribution and the Gaussian correction was applied to account for errors on the angle determination. Here $\xi_{CS}(\theta) = 0$ is expected for an isotropic distribution of angles between the core's spin and the orbital momentum. All satellites are external to the core, yet an excess of alignment is present. The triangles represent the angle distribution, the error bars stand for the 3σ -dispersion for 50 subsamples of 10 000 satellites (out of 35 000) while the red curve stands for the best gaussian fit of the distribution for systems with at least one satellite (see Eq. 13 for parameterization). The best fit parameters are: $a_1 = 0.3993 \pm 0.0038$, $a_2 = 0.0599 \pm 0.0083$, $a_3 = 0.8814 \pm 0.0055$, $a_4 = 0.9389 \pm 0.0002$. The isotropic case is excluded with a good confidence level, even for systems with a large number of satellites.

$$\theta_{CS} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{L}_s \cdot \mathbf{S}_c}{|\mathbf{L}_s| |\mathbf{S}_c|} \right). \quad (27)$$

The Gaussian correction was applied as described in section 3.2, to take into account the uncertainty on the determination of θ_{CS} .

The correlation of θ_{CS} indicates a preference for the aligned configuration with an excess of $\sim 12\%$ of aligned configurations relative to the isotropic distribution. We ran Monte-Carlo realisations using 50 subsamples of 10 000 haloes extracted from our whole set of substructures to constrain the error bars. We found a 3σ error of 6%: the detected anisotropy exceeds our errors, i.e. $\xi_{CS}(\theta_{CS})$ is not uniform with a good confidence level. The variations with the fragmentation level (i.e. the number of satellites per system) remains within the error bars. The best fit parameters for the measured distributions of systems with at least 1 satellite are $a_1 = 0.3993 \pm 0.0038$, $a_2 = 0.0599 \pm 0.0083$, $a_3 = 0.8814 \pm 0.0055$, $a_4 = 0.9389 \pm 0.0002$ (see Eq. 13 for parametrization). Not surprisingly, a less structured system shows a stronger alignment of its satellites' orbital momentum relative to the core's spin. In the extreme case of a binary system (one core plus a satellite), it is common for the two bodies to have similar mass. Since the two bodies are revolving around each other, a natural preferential plane appears. The core's spin will be likely to be orthogonal to this plane. Increasing the number of satellites increases the isotropy of the satellites' spatial distribution (the distributions maxima are lower and the slope toward low values of θ_{CS} is gentler), but switching from at least 4 satellites to at least 10 satellites per system does not change significantly the overwhole shape distribution. This sug-

gests that convergence, relative to the number of satellites, has been reached for the θ_{CS} distribution.

As the measurements of the anisotropy factor δ_m indirectly suggested, satellites have an anisotropic distribution of their directions around haloes. Furthermore the previous analysis of the statistical properties of δ (section 3.3) indicated an excess of aligned configuration of 15% which is consistent with the current method using substructures. While the direction of the core's spin should not be influenced by the infall of matter, we still find the existence of a preferential plane for this infall, namely the core's equatorial plane.

4.2 Satellite velocity - satellite spin correlation

The previous sections compared haloes' properties with the properties of satellites. In a galactocentric framework, the existence of this preferential plane could only be local. In the extreme each halo would then have its own preferential plane without any connection to the preferential plane of the next halo. Taking the satellite itself as a reference, we have analyzed the correlation between the satellite average velocity in the core's rest frame and the structures' spin. Since part of the properties of these two quantities are consequences of what happened outside the galactic system, the measurement of their alignment should provide information on the structuration on scales larger than the haloes scales, while sticking to a galactocentric point of view.

For each satellite, we extract the angle, θ_{vs} , between the velocity and the proper spin and derive its distribution using the Gaussian correction (see fig. 10). The satellite's spin \mathbf{S}_s is defined by:

$$\mathbf{S}_s = \sum_p (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) \times (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_s), \quad (28)$$

where \mathbf{r}_s and \mathbf{v}_s stands for the satellite's position and velocity in the halo core's rest frame. The angle, θ_{vs} , between the satellite's spin and the satellite's velocity is:

$$\theta_{vs} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{v}_s}{|\mathbf{S}_s| |\mathbf{v}_s|} \right). \quad (29)$$

Only satellites external to the mother's radius are considered while computing the distribution of angles. This leads to a sample of about 40 000 satellites, at redshift $z = 0$. The distribution $\xi(\theta_{vs})$ was calculated as sketched in section 2. An isotropic distribution of θ_{vs} would as usual lead to a uniform distribution $\xi(\theta_{vs}) = 0$. The result is shown in Fig. 10. The error bars were computed using the same Monte-Carlo simulations described before with 50 subsamples of 10 000 satellites.

We obtain a peaked distribution with a maximum for $\theta_{vs} = \pi/2$ corresponding to an excess of orthogonal configuration of 5% compared to a random distribution of satellite spins relative to their velocities. The substructures' motion is preferentially perpendicular to their spin. This distribution of angles for systems with at least 1 satellite can be fitted by a Gaussian function with the following best fit parameters (see Eq 13): $a_1 = 0.2953 \pm 0.0040$, $a_2 = 1.5447 \pm 0.0015$, $a_3 = 0.8045 \pm 0.0059$, $a_4 = 0.9144 \pm 0.0010$. The variation with the mother's fragmentation level is within the error bars. However the effect of an accretion orthogonal to the direction of the spin is stronger for satellites which belong to less structured systems. This may be again related to the case where two comparable bodies revolve around each other, but from a satellite point-of-view. The satellite spin is likely to be orthogonal to the revolution plane and consequently to the velocity's direction.

This result was already known for haloes in filaments (Faltenbacher et al. (2002)), where their motion occurs along the filaments with their spins pointing outwards. The current results show that the same behaviour is measured down to the satellite's scale. However this result should be taken with caution since Monte-Carlo tests suggest that the error (deduced from the 3σ dispersion) is about 4%.

This configuration where the spins of haloes and satellites are orthogonal to their motion fit with the image of a flow of structures along the filaments. Larger structures are formed out of the merging of smaller ones in a hierarchical scenario. Such small substructures should have small relative velocities in order to eventually merge while spiraling towards each other. The filaments correspond to regions where most of the flow is laminar, hence the merging between satellites is more likely to occur when one satellite catches up with another, while both satellites move along the filaments. During such encounter, shell crossing induces vorticity perpendicular to the flow as was demonstrated in Pichon & Bernardeau (1999). This vorticity is then converted to momentum, with a spin orthogonal to the direction of the filament.

Finally, the flow of matter along the filaments may also provide an explanation for the excess of accretion through the equatorial regions of the virial sphere. If a sphere is embedded in a 'laminar' flow, the density flux detected near the poles should be smaller than that detected near the 'equator' of the sphere. The flux measured on the sphere is larger in regions where the normal to the surface is collinear with the 'laminar' flow, i.e. the 'equator'. On the other hand, a nil flux is expected near the poles since the vector normal to the surface is orthogonal to direction of the flow. The same effect is measured on Earth which receives the Sun radiance: the temperature is larger on the Tropics than near the poles. Our observed excess of accretion through the equatorial region supports the idea of a filamentary flow orthogonal to the direction of the halo's spin down to scales ≤ 500 kpc.

5 PROJECTED ANISOTROPY

5.1 Projected satellites population

We looked directly into the spatial distributions of satellites surrounding the haloes cores to confirm the existence of a preferential plane for the satellites locations in projection. In Fig. 11, we show the compilation of the projected positions of satellites in the core's rest frame. The result is a synthetic galactic system with 100 000 satellites in the same rest frame. We performed suitable rotations to bring the spin axis collinear to the z-axis for each system of satellites, then we added all these systems to obtain the actual synthetic halo with 100 000 satellites. The positions were normalized using the mother's radius (which is of the order of the virial radius). A quick analysis of the isocontours of the satellite distributions indicates that satellites are more likely to be found in the equatorial plane, even in projection. The axis ratio measured at one mother's radius is $\epsilon(R_m) \equiv a/b - 1 = 0.1$ with $a > b$. We compared this distribution to an isotropic 'reference' distribution of satellites surrounding the core. This reference distribution has the same average radial profile as the measured satellite distributions but with isotropically distributed directions. The result of the subtraction of the two profiles is also shown in Fig. 11. The equatorial plane (perpendicular to the z-axis) presents an excess in the number of satellites (light regions). Meanwhile, there is a lack of satellites along the spin direction (dark regions). This confirms our earlier results

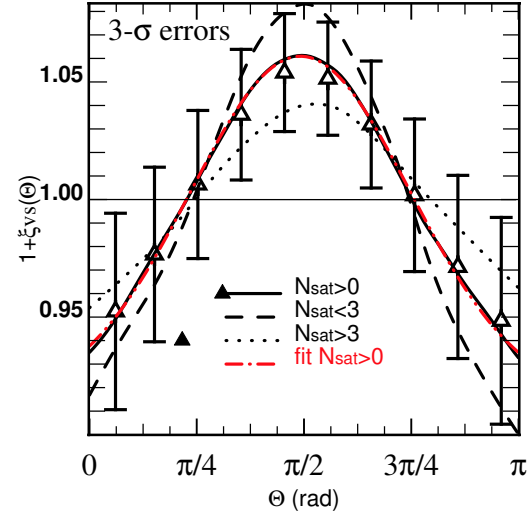


Figure 10. Excess probability, $1 + \xi_{vs}$, of the angle between the substructures' spin and their velocities in the mother's rest frame. The Gaussian correction was applied to take into account uncertainty on the angle determination. The distributions were measured for all mothers (solid), mothers with at least 4 substructures (dot) and mothers with at most 3 substructures (dash). The triangles represent the mean angle distribution. The error bars represent the Monte Carlo 3σ -dispersion for 50 subsamples of 10 000 haloes (out of 35 000). The red dash-dotted curve stands for the best fit of the distribution with a Gaussian function for systems with at least 1 satellite (see Eq. 13 for parametrization). The best fit parameters are: $a_1 = 0.2953 \pm 0.0040$, $a_1 = 1.5447 \pm 0.0015$, $a_2 = 0.8045 \pm 0.0059$, $a_3 = 0.9144 \pm 0.0010$. In the core's rest frame, the satellites' motion is orthogonal to the direction of the satellites' spin. This configuration would fit in a picture where structures move along filamentary directions.

obtained using the alignment of orbital momentum of satellites with the core's spin, i.e. satellites lie more likely in the plane orthogonal to the halo spin direction. Qualitatively, these results have already been obtained by Tormen (1997), where the major axis of the ellipsoid defined by the satellite's distribution is found to be aligned with the cluster's major axis. This synthetic halo is more directly comparable to observables since, unlike the dark matter halo itself, the satellites should emit light. Even though Λ CDM predicts too many satellites, its relative geometrical distribution might still be correct. In the following sections, our intent is to quantify more precisely this effect.

The propension of satellites to lie in the plane orthogonal to the direction of the core's spin appears as an 'anti-Holmberg' effect. Holmberg (1974) and more recently Zaritsky et al. (1997) have found observationally that the distribution of satellites around disks is biased towards the pole regions. Thus if the orbital momentum vector of galaxies is aligned with the spin of their parent haloes, our result seems to contradict these observations. One may argue that satellites are easier to detect out of the galactic plane. Furthermore our measurements are carried far from the disk while its influence is not taken in account. Huang & Carlberg (1997) have shown that the orbital decay and the disruption of satellites are more efficient for coplanar orbits near the disk. It would explain the lack of satellites in the disk plane. Thus our distribution of satellites can still be made consistent with the 'Holmberg effect'.

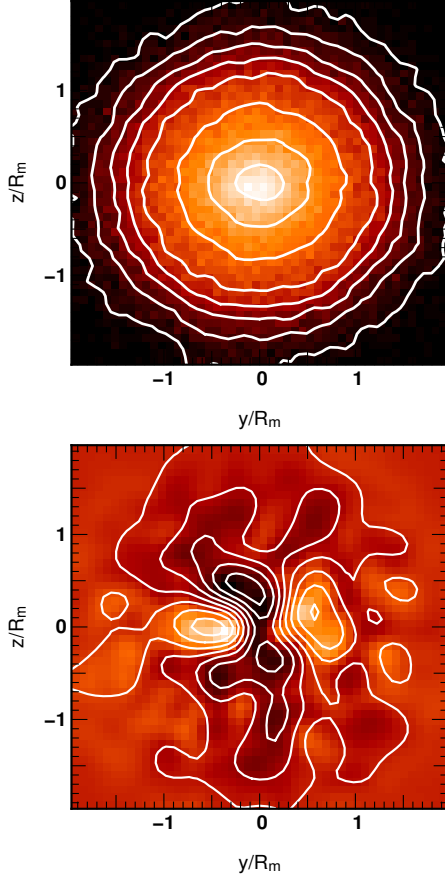


Figure 11. The projected distribution of satellites around the core’s centre of mass. We used the position of 40 000 satellites around their respective core to produce a synthetic halo+satellites (a ‘mother’) system. The projection is performed along the x-axis. The y and z coordinates are given in units of the mother’s radius. The z-axis is colinear to the direction of the core’s spin. *Top:* The isocontours of the number density of satellites around the core’s centre of mass present a flattened shape. The number of satellites is lower in darker bins than in lighter bins. The flattened isocontours indicate that satellites lie preferentially in the plane orthogonal to direction of the spin. *Bottom:* The excess number of satellites surrounding the core. We compared the distribution of satellites measured in our simulations to an isotropic distribution of satellites. Light zones stand for an excess of satellites in these regions (compared to an isotropic distribution) while dark zones stand for a lack of satellites. The satellites are more numerous in the equatorial region than expected in an isotropic distribution of satellites around the core. Also, there are fewer satellites along the spin’s axis than expected for an isotropic distribution of satellites.

5.2 Projected satellite orientation and spin

In addition to the known alignment on large scales, we have shown that the orientation of structures on smaller scales should be different from the one expected for a random distribution of orientations. Can this phenomenon be observed? The previous measurements were carried in 3D while this latter type of observations is performed in projection on the sky. The projection ‘dilutes’ the anisotropy effects detected using three-dimensional information. Thus an effect of 15% may be lowered to a few percents by projecting on the sky. However, even if the deviation from isotropy is as important as a few percents, as we will suggest, this should be rel-

evant for measurements involved in extracting a signal just above the noise level, such as weak lensing.

To see the effect of projection on our previous measurements, we proceed in two steps. First, every mother (halo core + satellites) is rotated to bring the direction of the core’s spin to the z-axis. Second, every quantity is computed using only the y and z components of the relevant vectors, corresponding to a projection along the x-axis.

The first projected measurement involves the orientation of satellites relative to their position in the core’s rest frame. The spin of a halo is statistically orthogonal to the main axis of the distribution of matter of that halo (Faltenbacher et al. (2002)), and assuming that this property is preserved for satellites, their spin \mathbf{S}_s is an indicator of their orientation. The angle, θ_P (in projection), between the satellites’ spin and their position vector (in the core’s rest frame) is computed as follow:

$$\theta_P = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{S}_s^{y,z} \cdot \mathbf{r}_{sc}^{y,z}}{|\mathbf{S}_s^{y,z}| |\mathbf{r}_{sc}^{y,z}|} \right), \quad (30)$$

with

$$\mathbf{r}_{sc} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_c, \quad (31)$$

where \mathbf{r}_s and \mathbf{r}_c stand respectively for the position vector of the satellite and the core’s centre of mass. Two extreme situations can be imagined. The ‘radial’ configuration corresponds to a case where the satellite’s main axis is aligned with the radius joining the core’s centre of mass to the satellite centre of mass (spin perpendicular to the radius, or $\theta_P \sim \pi/2$). The ‘circular’ configuration is the case where the satellite main axis is orthogonal to the radius (spin parallel to the radius, $\theta_P \sim 0[\pi]$). These reference configuration will be discussed in what follows.

The resulting distribution, $1 + \xi_P(\theta_P)$, is shown in Fig. 12. As before, an isotropic distribution of orientations would lead to $\xi_P(\theta_P) = 0$. The distribution is computed with 100 000 satellites, without the cores, while the error bars result from Monte-Carlo simulations on 50 subsamples of 50 000 satellites each. As compared to the distribution expected for random orientations, the orthogonal configuration is present in excess of $\xi_P(\pi/2) \sim 0.02$. If the spin of satellites is orthogonal to their principal axis, the direction vector in the core’s rest frame is more aligned with the satellites principal axes than one would expect for an isotropic distribution of satellites’ orientations. This configuration is ‘radial’. The peak of the distribution is slightly above the error bars: $\Delta\xi_P(\theta_P \sim \pi/2) \sim 0.02$. The distribution can be fitted by the Gaussian function given in Eq. 13 with the following parameters: $a_1 = 0.0999 \pm 0.0030$, $a_2 = 1.5488 \pm 0.0031$, $a_3 = 0.8259 \pm 0.0131$, $a_4 = 0.9737 \pm 0.0007$. The alignment seems to be difficult to detect in projection. With 50 000 satellites, we barely detect the enhancement of the orthogonal configuration at the 3- σ level, thus we do not expect a detection of this effect at the 1- σ level for less than 6000 satellites. Nevertheless, the distribution of the satellites’ orientation in projection seems to be ‘radial’ on dynamical grounds, without reference to a lensing potential.

Our previous measurement was ‘global’ since it does not take into account the possible change of orientation with the relative position of the satellites in the core’s rest frame. In Fig. 13, we explore the evolution of $1 + \xi_P$ with the radial distance relative to the core’s centre of mass and with the angular distance relative to the z-axis, i.e. relative to the direction of the core’s spin. The previous synthetic halo was divided in sectors and for each sector, $1 + \xi_P$ can be computed. The sectors are thus defined by their radius (in the mother’s radius units): $R \leq 0.4$, $0.4 < R \leq 0.8$, $0.8 <$

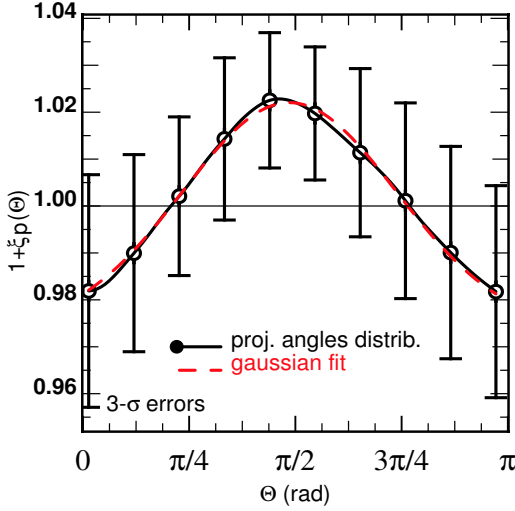


Figure 12. Excess probability, $1 + \xi_P$, of the projected angles between the direction of the spin of substructures and their position vector in the core's rest frame. The projection is made along the x-axis where the z-axis is concurrent with the core's spin direction. The solid line represents the average distribution of projected angles of 50 subsamples of 50 000 substructures (out of 100 000 available substructures). The error bars represent the 3σ -dispersion relative to these 50 subsamples. An isotropic distribution of orientation would correspond to a value of 1 for $1 + \xi_P$. The projection plus the reference to the position vector instead of the velocity's direction lowers the anisotropy effect. The red curve stands for the best Gaussian fit of the excess probability (see Eq. 13 for parameterization). The best fit parameters are: $a_1 = 0.0999 \pm 0.0030$, $a_2 = 1.5488 \pm 0.0031$, $a_3 = 0.8259 \pm 0.0131$, $a_4 = 0.9737 \pm 0.0007$. It seems that on average the projected orientation of a substructure is orthogonal to its projected position vector.

$R \leq 1.2$, $1.2 < R \leq 1.6$ and $1.6 < R \leq 2$ and by their polar angle relative to the direction of the core's spin (in degrees): $\phi_s \leq 36$, $36 < \phi_s \leq 72$, $72 < \phi_s \leq 108$, $108 < \phi_s \leq 144$ and $144 < \phi_s \leq 180$. Each of the previous Monte-Carlo subsamples can also be divided into sectors in order to compute the dispersion σ for the distributions within the subsamples. The error bars still represent the 3σ dispersions.

The Fig. 14 is a qualitative representation of the results presented in Fig. 13. Each sector with $R \leq 1$ in Fig. 13 is represented by an ellipse at its actual position. The orientation of the ellipse is given by the angle of the maximum of the corresponding $1 + \xi_P(\theta_p)$ function. We chose to represent the spin's direction perpendicular to the ellipse's major axis. We also chose to scale the ellipse axis ratio with the signal-to-noise ratio of $1 + \xi_P(\theta_p)$. Indeed large errors lead to weak constraints on the spin orientation and the galaxy would be seen as circular on average. Conversely a strongly constrained orientation leads to a typical axis ratio of 0.5.

Two effects seem to emerge from this investigation. For some sectors, the orthogonal configuration is in excess compared to an isotropic distribution of satellites' orientation relative to the radial vector. This seems to be true especially for radii smaller than the mother's radius but the effect is still present at larger distances, especially near $\phi_s \sim \pi/2$. Switching from low values to high values of ϕ_s changes the slope of the $1 + \xi_P(\theta)$ distribution. This may be a marker of a 'circular configuration' of the orientation of satellites.

The existence of a 'radial' component in the orientation of the satellites was expected, both from the unprojected measurements made in the previous sections and from the global distribution ex-

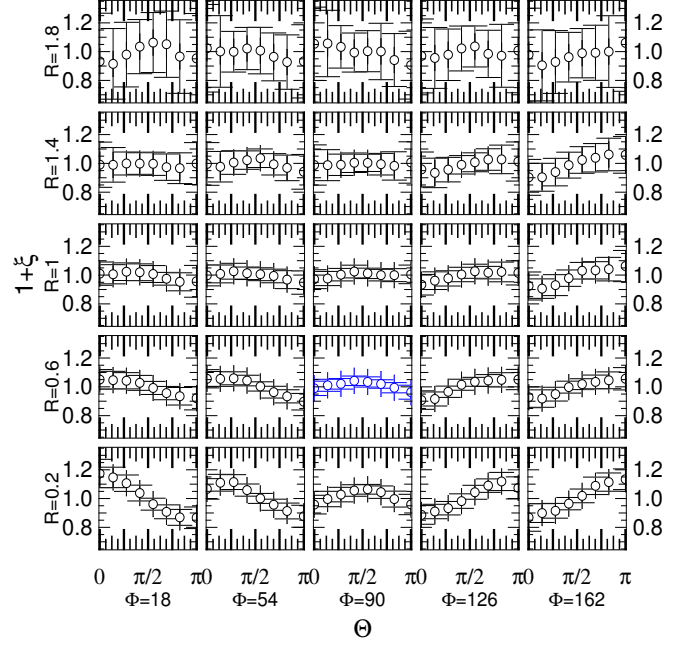


Figure 13. Radial and azimuthal grid of the excess probability, $1 + \xi_P$, of the projected angles between the direction of the spin of substructures and their direction relative to the central position of the core (as shown on average in Fig 12). The projection is made along the x-axis where the z-axis is concurrent with the direction of the core's spin. Each row represents a distance relative to central core in the mother's radius units (from bottom to top): $R \in [0, 0.4]$, $R \in [0.4, 0.8]$, $R \in [0.8, 1.2]$, $R \in [1.2, 1.6]$ and $R \in [1.6, 2]$. Each column represents an angular distance (in degrees) relative to the direction of the core's spin (z-axis): $\phi_s \in [0, 36]$, $\phi_s \in [36, 72]$, $\phi_s \in [72, 108]$, $\phi_s \in [108, 144]$ and $\phi_s \in [144, 180]$. The isotropic orientation distribution corresponds to a value of 1. Each sector presents a preferential direction that depends on its position relative to the spin direction of the central core. The distributions are computed using 50 samples of 50 000 satellites each. In each sector, the points represent the distribution averaged over the 50 samples. The error bars represent the 3σ -Monte Carlo dispersion of the distribution over these 50 samples.

tracted from the projected data. The fact that the 'radial' signature is stronger around the equatorial plane ($72 < \phi_s < 108$ in Fig. 13) may be another evidence for a filamentary flow of satellites, even in projection. It seems that the existence of a 'circular' component was mostly hidden in the previous measurements by the dominant signature of the 'radial' flow. Nevertheless, the dominance of 'circular' orientations near the poles fits with the picture of a halo surrounded by satellites with their spin pointing orthogonally to the filament directions.

The 'circular' flow may alternatively be related to the flow of structures around clusters located at the connection between filaments. There are observations of such configurations (Kitzbichler & Saurer 2003), where galaxies have their spin pointing along their direction of accretion and these observations could be consistent with our 'circular' component.

6 APPLICATIONS

Let us give here a quick overview of the implications of the previous measurements for the inner dynamics of the halo down to galactic scales. In particular let us see how the self-consistent dy-

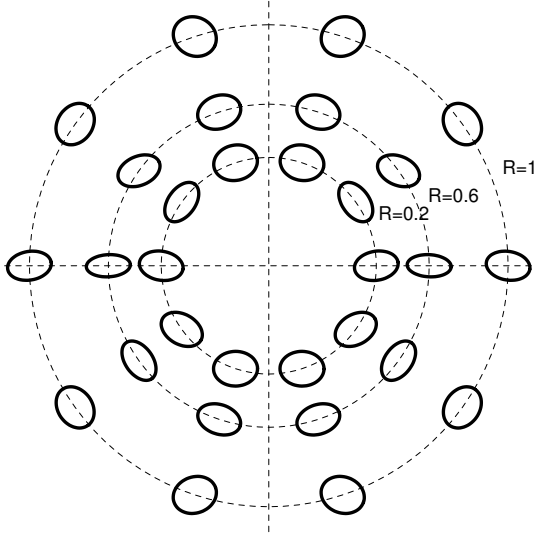


Figure 14. Geometric configuration of mean satellites around their core galaxy; each panel of Fig. 13 is represented by an ellipse at its log radius and angle around the core galaxy. The axis ratio of the ellipses is proportional to the peak-to-peak amplitude of the corresponding correlation (accounting for the relative SNR), while its orientation is given by the orientation of the maximum of $1 + \xi_p$.

namical response of the halo propagates anisotropic infall inwards, and then briefly and qualitatively discuss implications of anisotropy to galactic warps, disk thickening and lensing.

6.1 Linear response of galaxies

In the spirit of e.g. Kalnajs (1971) or Tremaine & Weinberg (1984) we show in appendix A and elsewhere (Aubert & Pichon (2004)) how to propagate dynamically the perturbation from the virial radius into the core of the galaxy using a self consistent combination of the linearized Boltzmann and Poisson equations under the assumption that the mass of the perturbation is small compared to the mass of the host galaxy. Formally, we have:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}[F, \Omega, \mathbf{x}, t - \tau](\varpi(\Omega, \tau)), \quad (32)$$

where \mathbf{R} is a linear operator which depends on the equilibrium state of the galactic halo (+disk) characterized by its distribution function F , and $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ represents the self consistent response of the inner halo at time t due to a perturbation $\varpi(\Omega, \tau)$ occurring at time τ . Here ϖ represents formally the perturbed potential on the virial sphere and the flux density of advected momentum, mass and kinetic energy at R_{200} . A ‘simple’ expression for \mathbf{R} is given in Appendix A for the self consistent polarisation of the halo. The linear operator, \mathbf{R} , follows from Eq. (A6), (A13) and (A16). These equations generalize the work of Kalnajs in that it accounts for a consistent infall of advected quantities at the outer edge of the halo. It is shown in particular in appendix A that self-consistency requires the knowledge of all ten (scalar, vector and symmetric tensor) fields $\varpi_\rho(\Omega, \tau)$, $\varpi_{\rho\mathbf{v}}(\Omega, \tau)$, $\varpi_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\Omega, \tau)$.

When dealing with disk broadening, \mathbf{r} could be the velocity orthogonal to the plane of the disk, or, for the warp, its amplitude, as a function of the position in the disk, \mathbf{x} (or the orientation of each ring if the warp is described as concentric rings). More gen-

erally, it could correspond to the perturbed distribution function of the disk+halo. The whole statistics of \mathbf{r} is relevant. The average response $\langle \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \rangle$ can be written as:

$$\langle \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{R} \langle \varpi(\Omega, \tau) \rangle = \sum_{\ell m} \mathbf{R} Y_\ell^m(\Omega) \langle a_\ell^m \rangle \quad (33)$$

Since the accretion is anisotropic, $\langle a_\ell^m \rangle$ do not converge toward zero (see section 3.4) inducing a non-zero average response. Most importantly the two point correlation of the response since it will tell us qualitatively what the correlation length and the root mean square amplitude of the response will be. For the purpose of this section, and to keep things simple, we will ignore temporal issues (discussed in Appendix A) altogether, both for the mean field and the cross-correlations. The two-point correlation of $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ then depends linearly on the two-point correlation of ϖ :

$$\langle \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}^\top(\mathbf{y}) \rangle = \mathbf{R} \langle \varpi(\Omega) \cdot \varpi^\top(\Omega') \rangle \mathbf{R}^\top, \quad (34)$$

where $^\top$ stands for the transposition. Clearly, if the infall, $\varpi(\Omega)$, is anisotropic the response will be anisotropic. As was discussed in section 3.4 when the infall is not isotropic, we have

$$\langle |\tilde{a}_\ell^m|^2 \rangle \neq \langle |\tilde{a}_\ell^m|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \langle |\tilde{a}_\ell^m|^2 \rangle, \quad (35)$$

Let us therefore introduce:

$$\Delta \tilde{R}_\ell^m \equiv \langle |\tilde{a}_\ell^m|^2 \rangle - \langle |\tilde{a}_\ell^m|^2 \rangle, \quad (36)$$

which would be identically zero if the field were stationary on the sphere. Here $\Delta \tilde{R}_\ell^m$ represents the anisotropic excess for each harmonic correlation. In particular, the excess polarisation of the response induced by the anisotropy reads

$$\Delta \langle \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}^\top(\mathbf{y}) \rangle = \sum_{\ell m} \mathbf{R} Y_\ell^m(\Omega) \Delta \tilde{R}_\ell^m Y_\ell^m(\Omega') \mathbf{R}^\top. \quad (37)$$

Fig. 15 displays $\Delta \tilde{R}_\ell^m$, for $\ell = 1, 2, 3, 4$. The different $\Delta \tilde{R}_\ell^m$ clearly converge toward different non-zero values. Consequently the response should reflect the anisotropic nature of the external perturbations.

It is beyond the scope of this paper to pursue the quantitative exploration of the response of the inner halo to a given anisotropic infall, since this would require an explicit expression of the response operator, \mathbf{R} , for each dynamical problem investigated.

6.2 Implication for warps, thick disks and lensing

In this paper, the main emphasis is on measured anisotropies. It turns out that it never exceeds 15 % in accretion. For a whole class of dynamical problems where anisotropy is not the dominant driving force it can be ignored at that level. Here we now discuss qualitatively the implication of the previous measurements to galactic warps, the thick disk and weak lensing where anisotropy is essential.

6.2.1 Galactic warps

The action of the torque applied on the disk of a galaxy is different for different angular and radial position of the perturbation. Consequently the warp’s orientation and its amplitude are functions of the spatial configuration of the external potential. For example, López-Corredoira et al. (2002) found that the warp’s amplitude due to an intergalactic flow is dependent on the direction of the incoming

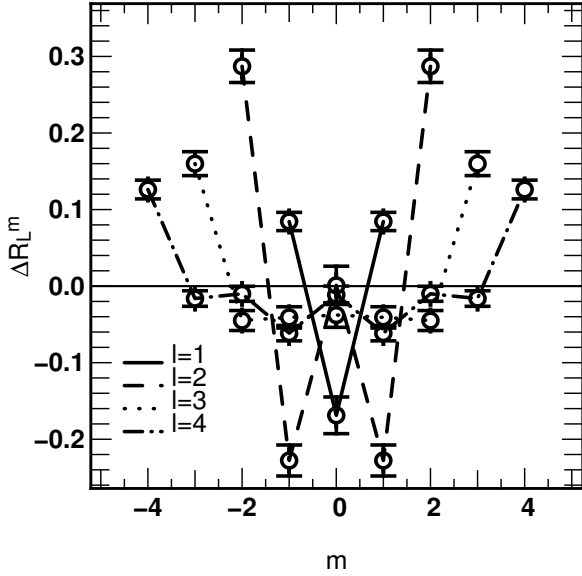


Figure 15. The residual anisotropic harmonic power spectra, $\Delta \tilde{R}_\ell^m$, introduced in Eq. (36) as a function of m for $\ell = 1, 2, 3, 4$. These residuals will serve as input to the computation of the dynamical response of the halo.

‘beam’ of matter. Having modelled the intergalactic flow applied to the Milky Way, they found that the warp amplitude rises steeply as the beam leaves the region coplanar to the disk and this warp amplitude reaches a maximum for an inclination of 30 degrees relative to the disk’s plane. As the beam direction becomes perpendicular to the galactic plane, the warp amplitude decreases slowly. In this context, the existence of a typical spatial configuration for the incoming intergalactic matter or satellites infall may induce a kind of ‘typical’ warp in the disk of galaxies.

The existence of a preferential plane for the accretion of angular momentum also implies that the recent evolution of the halo’s spin has been rather smooth. Bullock et al. (2001) have shown that the angular momentum tends to remain aligned within haloes. Furthermore, the accretion of matter by haloes is preferentially performed on plunging radial orbits, thus the inner parts of haloes are aware of the properties of the recently accreted angular momentum. Therefore, a disk embedded in the halo would also ‘feel’ this anisotropic accretion. Ostriker & Binney (1989) have shown that the misalignment of the accreted angular momentum and the disk’s spin forces the latter to slew the symmetry axis of its inner parts. The warp line of nodes is also found to be aligned with the axis of the torque applied to the disk. As stressed by Binney (1992), non straight line of nodes can be associated with changes in the direction of the accreted angular momentum. Using a sample of 12 galaxies, Briggs (1990) established rules of thumb for galactic warps, one of them being that the line of nodes is straight in the inner region of disk while it is wound in the outer parts. If the angular momentum is accreted along a stationary preferential direction, as we suggest, the warp line of nodes should remain mostly straight. However, if the accretion plane differs slightly from the disk plane, more than one direction of accretion become possible (by symmetry around the vector defining the disk plane) and, as a consequence, different directions are possible for the torque induced by accreted matter. We may then consider a varying torque along accretion history with an accreted angular momentum ‘precessing’ around the halo’s spin but close to its direction. In this scenario, the

difference in the behaviour of the warp line of nodes between the inner and outer regions of the galaxies may be explained.

6.2.2 Galactic disk thickening

Thin galactic disks put serious constraints on merging scenarios, since their presence implies a fine-tuning between the cooling mechanisms (e.g. coplanar infall of gas), and the heating processes (merging of small virialised objects, deflection of spirals on molecular clouds). It has been shown that small mergers can produce a thick disk (e.g. Quinn et al. (1993), Walker et al. (1996)). However, the presence of old stars within the thin disk cannot be explained in the framework of the merging scenario unless a fraction of the accretion took place within the equatorial plane of the galaxy. Furthermore, the geometric characteristic of the infall is essential in the formation process of a thick disk. In Velazquez & White (1999), numerical simulations of interactions between galactic disks and infalling satellites show that the heating and thickening is more efficient for coplanar satellites. They also stressed the differences between the effect of prograde or retrograde orbits of infalling satellites (relative to the rotation of the disk): prograde orbits induce disk heating while retrograde orbits induce disk tilting. Our results indicate that the infall is preferentially prograde and coplanar relative to the halo’s spin: if we consider an alignment between the halo’s spin and the galaxy’s angular momentum, the thickening process may be more efficient than the one expected in an isotropic configuration of infalling matter. Furthermore, our estimate of the fraction of coplanar accretion at the virial scale may be considered as a lower bound near the disk since the presence of a disk will focus the infall closer to the galactic plane. In fact, Huang & Carlberg (1997) found that the disk tends to tilt toward the orbital plane of infalling prograde low-density satellites. This effect would also contribute to enhance the excess of coplanar accretion down to galactic scales.

However the nature of infalling virialised objects was shown to affect their ability to heat or destroy the disk. Huang & Carlberg (1997) found that the presence of low density satellites should induce preferentially a tilting of the disk instead of a thickening: one needs to enhance the relative mass of the satellite ($\sim 30\%$ of the disk mass) to produce an observable thickening in the inner parts of the galaxy. Unfortunately such a massive satellite has a destructive impact on the outer parts of the disk. The relationship between the excess of accretion and the satellite mass should be constrained but our limited mass resolution prevents us from performing such a quantitative analysis. We should therefore aim at achieving higher angular resolution of the virial sphere and higher mass resolution in order to describe well compact virialised objects.

6.2.3 Gravitational lensing

The first detection of cosmic shear was reported by four different groups in 2000 (Bacon et al. (2000), Kaiser et al. (2000), Van Waerbeke et al. (2000), Wittman et al. (2000)). One of the basic assumptions made by cosmic shear studies is that the intrinsic ellipticities of galaxies are expected to be uncorrelated, and that the observed correlations are the results of gravitational lensing induced by the large scale structures between those galaxies and the observer. Hence, the detection of weak lensing signal assumes a gravitationally induced departure from a random distribution of the galactic shapes. Consequently, if there exists intrinsic alignments or preferential patterns in galactic orientations, this would potentially affect the interpretation from weak lensing measurements.

Table 1. Summary of the fitting parameters for the angular correlations

angle	a_1	a_2	a_3	a_4
$\theta_{\rho L}$	2.351 ± 0.006	-0.178 ± 0.002	1.343 ± 0.002	0.669 ± 0.000
$\theta_{\rho v r L}$	3.370 ± 0.099	-0.884 ± 0.037	1.285 ± 0.016	0.728 ± 0.001
θ_{cs}	0.399 ± 0.003	0.059 ± 0.008	0.881 ± 0.005	0.938 ± 0.000
θ_{vs}	0.295 ± 0.004	1.544 ± 0.001	0.804 ± 0.005	0.914 ± 0.001
θ_p	0.099 ± 0.003	1.548 ± 0.003	0.825 ± 0.013	0.973 ± 0.000

Here $\theta_{\rho L}$ is the angle between the halo's spin and the angular momentum measured on the virial sphere; $\theta_{\rho v r L}$ is the angle between the halo's spin and the accreted angular momentum measured on the virial sphere; θ_{cs} is the angle between the core's spin and the satellite orbital momentum; θ_{vs} is the angle between the satellite velocity in the core's rest frame and the satellite's spin; θ_p is the projected angle between the satellite's spin and its direction relative to the core's position. The fitting model we used is $1 + \xi(\theta) = a_1 / (\sqrt{2\pi}a_3) \exp[-(\theta - a_2)^2 / (2a_3^2)] + a_4$.

Several papers have already considered the ‘contamination’ of the weak lensing signal by intrinsic galactic alignment. Using analytic arguments, Catelan et al. (2001) have shown that such alignments should exist. The issue of the amplitude of the intrinsic correlations compared to the correlation induced by the cosmic shear has also been explored by Croft & Metzler (2000) and Heavens et al. (2000). The ‘intrinsic’ correlations may overcome the shear-induced signal in surveys with a narrow redshift range. We have shown that the orientation of satellites around haloes is not randomly distributed, which is a clear indication of intrinsic correlations for our considered scales (~ 500 kpc). Taking $z_m = 1$ as a typical median redshift for large lensing surveys, the corresponding angular scale is 1 arcminute in our simulations’ cosmogony. Furthermore, the prospect of studying the redshift evolution of gravitational clustering via shear measurements will require investigating narrower redshift bins and as such, small scale dynamically induced polarisation might become an issue. As recommended by Catelan et al. (2001), our measurement may also be used as a ‘numerical’ calibration of the relation between ellipticity and tidal fields. Interestingly, they suggested to compensate for the finite number of galaxies around clusters by ‘stacking’ several clusters, which is precisely the procedure we followed to extract signal from our simulations. Finally, Weak lensing predicts no ‘curl’ component in the shear field (e.g. Pen et al. (2000)) and such ‘curl’ configurations would serve to extract the intrinsic signal. Even though satellites exhibit both ‘circular’ and ‘radial’ configurations in our simulations, we do not observe a clear signature of a ‘curl’ component of orientations at our level of detection.

7 CONCLUSION & PROSPECTS

7.1 Conclusion

Using a set of 500 Λ CDM simulations, we investigated the properties of the spatial configuration of the cosmic infall of dark matter around galactic $\approx L_*$ haloes. The aim of the present work was to find out if the existence of preferential directions existing on large scales (such as filaments) is reflected in the behaviour of matter accreted by haloes, and the answer is a clear quantitative yes.

Two important assumptions were made in the present paper. We did not consider different class of haloes’ masses (except for Fig. D2), but instead applied normalisations to includes all haloes in

Table 2. Summary of other quantities related to anisotropic accretion

$\langle \delta_m \rangle(z)$	$0.0161(\pm 0.0103) z + 0.147 (\pm 0.005)$
$S_3(\delta_m)$	0.44
$\epsilon(R_m)$	0.1
\tilde{a}_{20}	-0.65 ± 0.04
\tilde{a}_{40}	0.12 ± 0.02
\tilde{a}_{60}	-0.054 ± 0.015
\tilde{a}_{80}	0.0145 ± 0.0014

$\langle \delta_m \rangle(z)$ is the redshift evolution of the average excess of accretion in the plane orthogonal to the direction of the spin. $S_3(\delta_m)$ is the skewness of the distribution of excess of accretion. $\epsilon(R_m)$ is the axis ratio $a/b - 1$ with $a > b$ of the projected satellite distribution. \tilde{a}_{20} , \tilde{a}_{40} , \tilde{a}_{60} and \tilde{a}_{80} are the normalized harmonic coefficients of the ‘equatorial’ modes.

our measurements (considering e.g. the statistical average of contrasts). We also did not take in account outflows and focused on accreted quantities.

First we looked at the angular distribution of matter at the interface between the intergalactic medium and the inner regions of the haloes. We measured the accreted mass and the accreted angular momentum at the virial radius, describing these quantities as spherical fields.

- The total (resp. advected) angular momentum measured at the virial radius is strongly aligned with the inner spin of the halo with a proportion of aligned configuration 30% (resp. 50%) more frequent than the one expected in an isotropic distribution of accreted angular momentum ($1 + \xi_{LS}(0) \sim 1.5$). This result reflects the importance of accreted angular momentum in the building of the haloes’ inner spin.

- The accretion of mass measured at the virial radius in the ring-like region perpendicular to the direction of the halo’s spin is $\sim 15\%$ larger than the one expected in the case of an isotropic infall of matter.

We also detected the excess of accretion at the same level in the equatorial plane using a spherical harmonic expansion of the mass density flux.

- In the spin’s frame, the average of the harmonic $a_{\ell 0}$ coefficients does not converge toward zero, indicating that there is a systematic accretion structured in rings parallel to the equatorial plane.

Using the substructure detection code ADAPTAHOP, we confirmed that the existence of a preferential plane for the infalling mass is reflected in the distribution of satellites around haloes.

- Investigating the degree of alignment between the orbital momentum of satellites and the central spin of the halo, it is shown that the aligned configuration is present in excess of $\sim 12\%$. Satellites tend to revolve in the plane orthogonal to the direction of the halo’s spin. The two methods (using spherical fields and satellites’ detection) yield consistent results and suggest that the image of a spherical infall on haloes should be reconsidered at the quoted level.

We studied the distribution of the angle between the direction of accretion of satellites and their own spin.

- An orthogonal configuration is 5% more frequent than what would one expect for an isotropic distribution of spin and directions of accretion. Satellites tend to be accreted in the direction orthogonal to their own spin.

These findings are interpreted as the results of the filamentary

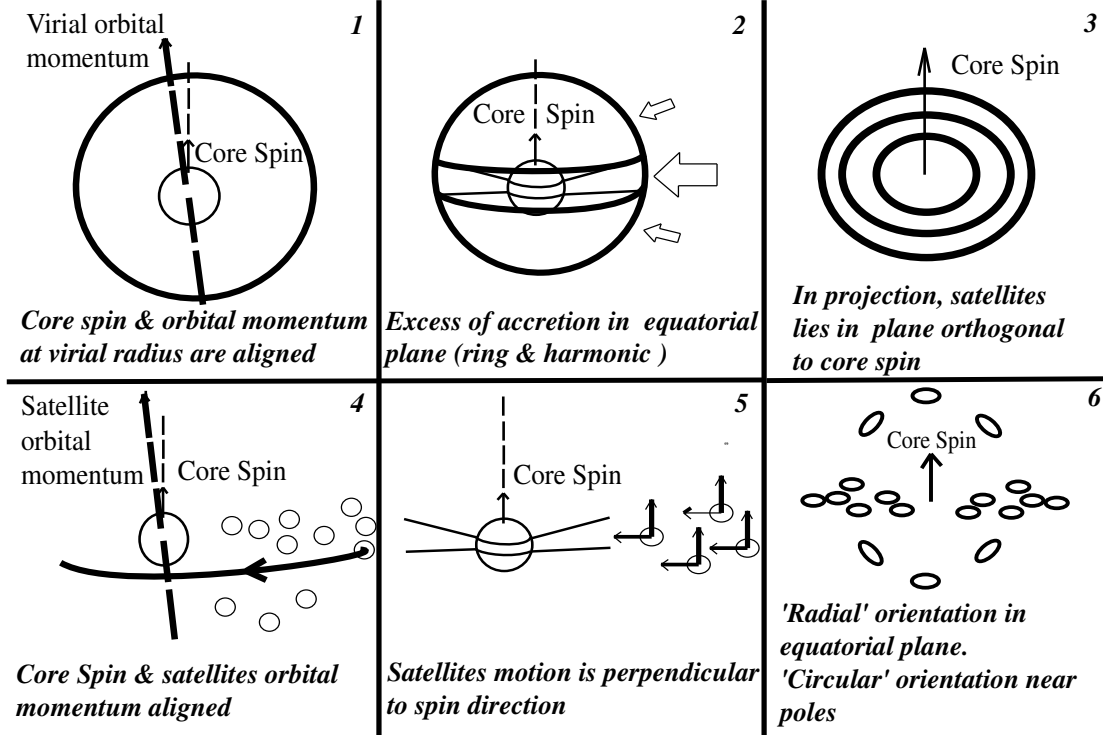


Figure 16. A schematic representation of all estimates of anisotropic accretion considered in this paper. **1):** we measured the distribution of the angle between the orbital momentum on the virial sphere and the halo’s spin. The average orbital momentum measured on the virial sphere is mostly aligned with the spin of the halo embedded in the virial sphere (discussed in section 3.2). **2):** we compared the accretion in the plane orthogonal to the direction of the halo’s spin with the average accretion on the sphere. On the virial sphere, we detected an excess of ring-like or harmonic accretion in the equatorial plane (discussed in section 3.3 and 3.4). **3):** in projection, we used a ‘synthetic’ halo to look at the distribution of satellites detected with ADAPTAHOP and at the orientation of their spin around the direction of the spin. In projection, satellites lie preferentially in the projected equatorial plane (discussed in section 5.1). **4):** We measured the angle between the halo’s spin and the orbital momentum of each satellite. The orbital momentum of satellites is preferentially aligned with the spin of their hosting core (discussed in section 4.1). **5):** We compared the orientation of each satellite velocity vector (in the core’s rest frame) with the orientation of their own spin. The velocity vector of satellites (in the core’s rest frame) is orthogonal to the direction of their spin (discussed in section 4.2). **6):** In the equatorial plane, the projected orientation of satellites is more ‘radial’, while near the direction of the spin a ‘circular’ configuration of orientation seems to emerge (discussed in section 5.2).

flows of structures, where satellites and haloes are accreted along the main direction of filaments with their spins orthogonal to this preferential direction. The flow along filaments also explains why the matter is accreted preferentially in the equatorial plane at the virial radius. The halo points its spin perpendicular to the flow and sees a larger flux in the regions normal to the flow direction, i.e. near the equator. Thus, it appears that the existence of preferential directions on large scales is still relevant on galactic scales and should have consequences for the inner dynamics of the halo.

We addressed the issue of observing these alignments in projection.

- The distribution of satellites projected onto the sky is flattened, with an axis ratio of 1.1 at the virial radius.

- It seems that the orientation of satellites around their haloes is not random, even if the two dimensional representation dilutes the effects of alignments. The ‘radial’ orientation, where the satellites main axis is aligned with the line joining the satellite to the halo centre, is $\sim 5\%$ more frequent than the one expected in a completely random distribution of orientation. The ‘circular’ configuration, where the satellites main axis is perpendicular to the line joining the satellite to the halo centre, is also present in excess compared to a random distribution near the pole of the host galaxy.

All corresponding fits are summarized in Table 1 and 2, while Fig. 16 gives a schematic view of the measurements we carried out.

We investigated how the self-consistent dynamical response of the halo would propagate anisotropic infall down to galactic scales. In particular we gave the corresponding polarisation operator in the context of an opened system. We have shown in appendix A that accounting for dark matter infall required the knowledge of the first three moments of the flux densities, $\varpi_\rho(\Omega, \tau)$, $\varpi_{\rho\mathbf{v}}(\Omega, \tau)$, $\varpi_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\Omega, \tau)$.

It is suggested that the existence of a preferential plane of accretion of matter, and thus of angular momentum, should have an influence on warp generation and disk thickening. If the anisotropic properties of infalling matter measured in the outer parts of haloes are conserved in the inner region of galaxies, there may exist a ‘typical’ warp amplitude and this anisotropic accretion of matter may explain the properties of warp line of nodes. In the same spirit, the efficiency of the thickening of the disk may be enhanced or reduced by equatorial accretion. Finally, our finding of intrinsic alignments on small scales as well as specific orientations of structures should be relevant for cosmic shear studies on wide and shallow surveys.

7.2 Prospects

The main purpose of our investigation was to provide quantitative measurements of the level of anisotropy involved in the infall on scales ~ 500 kpc. The next step should clearly involve working out quantitatively their implications for warp, disk heating etc... as was discussed in section 6.

Our measurements were carried out at R_{200} , which on galactic scales is a long way from the inner region of the galaxy. One should clearly propagate the infall (and its anisotropy) towards the centre of the galaxy, and more radial infalling components will play a more important role and should be weighted accordingly. It should also be stressed that we did not take into account the extra polarisation induced by the presence of an embedded disk, which will undoubtedly reinforce the polarisation and the anisotropy of the infall. We also concentrated on mass accretion, as the lowest order moment of the underlying “fluid” dynamics. Clearly higher moments involving the anisotropically accreted momentum, the kinetic energy etc. are dynamically relevant for the evolution of the central object as is discussed in section 6 and in the appendix. The time evolution of the statistics of these flux densities is also essential for the inner dynamic of the halo and should be addressed systematically as well. It will be worthwhile to explore different cosmologies and their implications on small scale dynamics, and on the characteristics of infalling clumps, though we hope that the qualitative results sketched here should persist.

It should be emphasized that some aspects of the present work are exploratory only, in that the resolution achieved ($M_{\text{halo}} > 5 \cdot 10^{12} M_{\odot}$) is somewhat high for L_* galaxies. In fact, it would be interesting to see if the properties of infall changes for lower mass ($M_{\text{halo}} < 5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$) together with the intrinsic properties of galaxies. In addition a systematic study of biases induced by the estimators of angular correlations should be conducted, e.g. the mass weighted errors we introduced in section 3.2.

Observationally, the synthetic halo described in section 5.1 could be compared to stacked satellite distributions relying on galactic surveys such as the SDSS. Once the anisotropy has been propagated to the inner regions of the galactic halo following the method sketched in section 6, we should be in a position to compile a synthetic edge-on galactic disk and compare the flaring of the disk with the corresponding predictions. The residual preferred orientation of galactic disks around more massive objects discussed in section 5.2 should be observed on the scales ≤ 500 kpc.

Using larger simulations will allow us to combine high resolution with the statistics required to detect the anisotropic accretion of mass and angular momentum. A wide range of halo masses will become accessible and the halo mass dependency of our findings will be constrained without suffering from the lack of statistics. Better angle determinations will naturally follow from a better resolution and will improve the accuracy of our quantitative results. Resimulations (zoom simulations) should give access to a larger range of satellite masses, while we were here mostly sensitive to the biggest substructures. Large infalling objects are likely to feel differently the effects of tidal forces or dynamical friction than smaller satellites. Resimulated haloes allow us to investigate the dependency on the spatial distribution of satellites with their masses corresponding to a given cosmological environment. However using only a few resimulations may not be sufficient to overcome cosmic variance and, given the difficulty to produce a large number of high resolution haloes, such a project remains challenging.

The inclusion of gas physics in these simulations and their impact on the results is the natural following step. For example,

gas filaments are known to be narrower than dark matter filaments, thus we expect to see a higher level of anisotropy in the distribution of accreted gas by the haloes. Furthermore, the transmission of angular momentum from one parcel of gas to another (or to the underlying dark matter) may be highly effective and would lead to higher homogeneity of the properties of the accreted angular momentum direction, enhancing the effect of spin alignments. The loss of angular momentum from the gas to the halo will lead to a modification of our pure dark matter findings. Yet, the inclusion of gas physics in simulations would force us to address issues such as the over-cooling, the requirement to take star formation and related feedback processes into account. It remains that in the longer term, the inclusion of gas physics cannot be avoided and will give new insights into the anisotropic accretion of matter by haloes.

Acknowledgements

We are grateful to J. Devriendt, J. Heyvaerts, A. Kalnajs, D. Pogosyan, E. Scannapieco, F. Stoehr, R. Teyssier, E. Thiébaud, for useful comments and helpful suggestions. DA would like to thank C. Boily for reading early versions of this paper. CP would like to thank F. Bernardeau for stimulating discussions during the premises of this work. We would like to thank D. Munro for freely distributing his Yorick programming language (available at <ftp://ftp-icf.llnl.gov/pub/Yorick/doc/index.html>), together with its MPI interface, which we used to implement our algorithm in parallel. The simulations were carried out on the Pleiades cluster, Strasbourg, at the CINES, Montpellier and at the UKAFF, Leicester.

We thank the referee for useful remarks on the manuscript.

REFERENCES

- Aubert D., Pichon C., 2004, MNRAS, in prep.
- Bacon D. J., Refregier A. R., Ellis R. S., 2000, MNRAS, 318, 625
- Bardeen J. M., Bond J. R., Kaiser N., Szalay A. S., 1986, ApJ, 304, 15
- Bertschinger E., 2001, ApJS, 137, 1
- Binney J., 1992, ARAA, 30, 51
- Briggs F. H., 1990, ApJ, 352, 15
- Bullock J. S., Dekel A., Kolatt T. S., Kravtsov A. V., Klypin A. A., Porciani C., Primack J. R., 2001, ApJ, 555, 240
- Catelan P., Kamionkowski M., Blandford R. D., 2001, MNRAS, 320, L7
- Croft R. A. C., Metzler C. A., 2000, ApJ, 545, 561
- Eisenstein D. J., Hut P., 1998, ApJ, 498, 137
- Faltenbacher A., Gottlöber S., Kerscher M., Müller V., 2002, AAP, 395, 1
- Goldstein H., 1950, Classical mechanics. Addison-Wesley World Student Series, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950
- Gross M. A. K., Somerville R. S., Primack J. R., Holtzman J., Klypin A., 1998, MNRAS, 301, 81
- Hatton S., Ninin S., 2001, MNRAS, 322, 576
- Heavens A., Refregier A., Heymans C., 2000, MNRAS, 319, 649
- Holmberg E., 1974, Arkiv for Astronomi, 5, 305
- Huang S., Carlberg R. G., 1997, ApJ, 480, 503
- Jenkins A., Frenk C. S., White S. D. M., Colberg J. M., Cole S., Evrard A. E., Couchman H. M. P., Yoshida N., 2001, MNRAS, 321, 372
- Jost J., 2002, Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer
- Kaiser N., Wilson G., Luppino G., 2000, astro-ph/0003338
- Kalnajs A. J., 1971, ApJ, 166, 275

- Kitzbichler M. G., Saurer W., 2003, *ApJL* , 590, L9
- López-Corredoira M., Betancort-Rijo J., Beckman J. E., 2002, *AAP* , 386, 169
- Monaghan J. J., 1992, *ARAA* , 30, 543
- Murali C., 1999, *ApJ* , 519, 580
- Ostriker E. C., Binney J. J., 1989, *MNRAS* , 237, 785
- Peirani S., Mohayaee R., De Freitas Pacheco J. A., 2003, *astro-ph/0311149*
- Pen U., Lee J., Seljak U., 2000, *ApJL* , 543, L107
- Pichon C., Bernardeau F., 1999, *AAP* , 343, 663
- Plionis M., Basilakos S., 2002, *MNRAS* , 329, L47
- Press W. H., Schechter P., 1974, *ApJ* , 187, 425
- Quinn P. J., Hernquist L., Fullagar D. P., 1993, *ApJ* , 403, 74
- Springel V., 1999, Ph.D. Thesis
- Springel V., White S. D. M., Tormen G., Kauffmann G., 2001, *MNRAS* , 328, 726
- Springel V., Yoshida N., White S. D. M., 2001, *New Astronomy*, 6, 79
- Tormen G., 1997, *MNRAS* , 290, 411
- Tremaine S., Weinberg M. D., 1984, *MNRAS* , 209, 729
- van Haarlem M., van de Weygaert R., 1993, *ApJ* , 418, 544
- Van Waerbeke L., Mellier Y., Erben T., Cuillandre J. C., Bernardeau F., Maoli R., Bertin E., Mc Cracken H. J., Le Fèvre O., Fort B., Dantel-Fort M., Jain B., Schneider P., 2000, *AAP* , 358, 30
- Varshalovich D. A., Moskalev A. N., Khersonskii V. K., 1988, *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific
- Velazquez H., White S. D. M., 1999, *MNRAS* , 304, 254
- Vitvitska M., Klypin A. A., Kravtsov A. V., Wechsler R. H., Primack J. R., Bullock J. S., 2002, *ApJ* , 581, 799
- Walker I. R., Mihos J. C., Hernquist L., 1996, *ApJ* , 460, 121
- West M. J., 1994, *MNRAS* , 268, 79
- Wittman D. M., Tyson J. A., Kirkman D., Dell’Antonio I., Bernstein G., 2000, *Nature*, 405, 143
- Zaritsky D., Smith R., Frenk C. S., White S. D. M., 1997, *ApJL* , 478, L53+

APPENDIX A: LINEAR RESPONSE OF A SPHERICAL HALO TO INFALLING DARK MATTER FLUXES

In the following section, we extend to open spherical stellar systems the formalism developed by Tremaine & Weinberg (1984) and e.g. Murali (1999) by adding a source term to the collisionless Boltzmann equation.¹ For an open system, the dark matter dynamics within the R_{200} sphere is governed by the collisionless Boltzmann equation coupled with the Poisson equation:

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad \text{and} \quad \nabla^2 \Psi = 4\pi G \int d^3v F(\mathbf{v}). \quad (\text{A1})$$

where $\{ \}$ is the standard Poisson bracket, $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ is the system's distribution function submitted to $\Psi(\mathbf{r}, t)$, the total gravitational potential (self-gravity + external perturbation). The r.h.s. of (A1) is non-zero because of infalling fluxes from the environment which require adding a source term, $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, to the Vlasov equation. We may now discriminate between a stationary part corresponding to the unperturbed state from a weak time-dependent perturbation induced by the environment. Thus the DF can be written as $F = F_0 + f$. Provided the mass of the incoming flux of dark matter is small compared to the mass of the halo, we may assume that f is small compared to F_0 . Similarly, the Hamiltonian H of the system can be expanded as $H_0 + \Delta H$, with $\Delta H = \psi^e + \psi$ where ψ^e and ψ stand respectively for the external perturbative potential and for the small response in potential of the open system.

A1 The Boltzmann equation in action-angle

Given the periodicity of the system, the most adequate representation of a spherical halo corresponds to action-angle variables (Goldstein (1950)). The linearized Boltzmann equation in such a representation is:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t)}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = \mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} \Delta H_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, t). \quad (\text{A2})$$

The new variables are the actions \mathbf{I} and the angles \mathbf{w} together with the angular rates $\boldsymbol{\omega} \equiv d\mathbf{w}/dt$. In equation A2 we have Fourier expanded the linearized equation A1 over the periodic angles:

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}), \quad \text{with} \quad X_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) X(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (\text{A3})$$

where X is any function of $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ with \mathbf{k} being the Fourier triple index corresponding to the three degrees of freedom on the sphere. The equilibrium state F_0 does not depend on time nor angles since it is assumed to be stationary. Then the solution to (A2) can be written as:

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t)) \left[i\mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \right], \quad (\text{A4})$$

where we have written $\Delta H_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)$. We can integrate (A4) over velocities and sum over \mathbf{k} to recover the density perturbation:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^t d\tau \int d^3\mathbf{v} \left(\exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \left[i\mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{I}, \tau) + \psi_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau)] + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \right] \right). \quad (\text{A5})$$

Let us expand the potential and the density over a bi-orthogonal complete basis function $\{\psi^{[n]}, \rho^{[n]}\}$ such that

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[n]}(\mathbf{r}); \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t) \rho^{[n]}(\mathbf{r}); \quad \nabla^2 \psi^{[n]} = 4\pi G \rho^{[n]}; \quad \int d^3\mathbf{r} \psi^{[n]*}(\mathbf{r}) \rho^{[p]}(\mathbf{r}) = \delta_p^n. \quad (\text{A6})$$

The external potential can be expanded along the same basis as:

$$\psi^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[n]}(\mathbf{r}). \quad (\text{A7})$$

Note that in Eq. (A6) the expansion runs over a triple index $\mathbf{n} \equiv (n, \ell, m)$ corresponding to the radial, azimuthal and alt-azimuthal degrees of freedom, while in Eq. (A6) the three coefficients are not independent since the radial variation of the external potential is fixed by its boundary value on the sphere R_{200} . Making use of the biorthogonality, multiplying (A5) by $\psi^{[p]*}(\mathbf{r})$ for some given \mathbf{p} and integrating over \mathbf{r} yields:

$$a_{\mathbf{p}}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^t d\tau \int \int d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{r} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \psi^{[p]*}(\mathbf{r}) \left[\sum_{\mathbf{n}} i\mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} [a_{\mathbf{n}}(\tau) + b_{\mathbf{n}}(\tau)] \psi_{\mathbf{k}}^{[n]}(\mathbf{I}) + s_{\mathbf{k}}^e(\mathbf{I}, \tau) \right] \quad (\text{A8})$$

¹ This is formally equivalent to summing the response of the halo to a point-like particle for all entering particles.

A2 Self-consistency of the response

We may now swap from position-velocity to angle-action variables since $d^3\mathbf{v}d^3\mathbf{r} = d^3\mathbf{w}d^3\mathbf{I}$. In (A8) only $\psi^{[p]}(\mathbf{r})$ depends on \mathbf{w} so we may carry the \mathbf{w} integration over $\psi^{[p]*}$, yielding $\psi_k^{[p]*}(\mathbf{I})$ which leads to

$$a_p(t) = \sum_k \int_{-\infty}^t d\tau \int d^3\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t)) \left[\sum_n i\mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} [a_n(\tau) + b_n(\tau)] \psi_k^{[p]*}(\mathbf{I}) \psi_k^{[n]}(\mathbf{I}) + s_k^e(\mathbf{I}, \tau) \psi_k^{[p]*}(\mathbf{I}) \right] \quad (\text{A9})$$

Note that the last term of Eq. (A9) corresponds to the modulated potential along the unperturbed trajectories weighted by the number of entering particles with $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega})$ at time τ . This is expected since it just reflects the fact that could have linearly summed over all incoming individual particles (since the interaction between particles in a collisionless fluid is purely gravitationnal). In this sense, this terms corresponds to a ray tracing problem in a variable index medium. Note also that Eq. (A9) does not account for dynamical friction since we integrate over the unperturbed trajectories. At this point, we expand the source term over a complete basis; this basis should also describe (known) velocity space variations. We assume that such a basis $\phi^{[n]}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ exists. We write:

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_n c_n(t) \phi^{[n]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \text{ so } s_k^e(\mathbf{I}, \tau) = \sum_n c_n(\tau) \sigma_k^{[n]e}(\mathbf{I}) \text{ where } \sigma_k^{[n]e}(\mathbf{I}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \phi^{[n]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{A10})$$

Calling $\mathbf{a}(\tau) = [a_1(\tau), \dots, a_n(\tau)]$, $\mathbf{b}(\tau) = [b_1(\tau), \dots, b_n(\tau)]$, $\mathbf{c}(\tau) = [c_1(\tau), \dots, c_n(\tau)]$, and $\Theta(\tau)$ the Heaviside function, we define two tensors:

$$K_{pn}(\tau) = (1 - \Theta(\tau)) \cdot \sum_k \int d^3\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) i\mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} \psi_k^{[p]*}(\mathbf{I}) \psi_k^{[n]}(\mathbf{I}), \quad (\text{A11})$$

which depends only on the halo equilibrium state via F_0 and

$$H_{pn}(\tau) = (1 - \Theta(\tau)) \cdot \sum_k \int d^3\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) \sigma_k^{[n]e}(\mathbf{I}) \psi_k^{[p]*}(\mathbf{I}), \quad (\text{A12})$$

which depends only on the expansion basis, equation (A9) becomes:

$$\mathbf{a}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ \mathbf{K}(\tau - t) \cdot [\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)] + \mathbf{H}(\tau - t) \cdot \mathbf{c}(\tau) \}. \quad (\text{A13})$$

We now perform a Fourier transform with respect to time, hence convolutions become multiplications and we get:

$$\hat{\mathbf{a}}(p) = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}}(p))^{-1} \cdot [\hat{\mathbf{K}}(p) \cdot \hat{\mathbf{b}}(p) + \hat{\mathbf{H}}(p) \cdot \hat{\mathbf{c}}(p)], \quad (\text{A14})$$

where p stands for the frequency conjugate to time. The computation of the variance-covariance matrix is straightforward:

$$\langle \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{*\top} \rangle = \langle (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}})^{-1} \cdot [\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{c}}] \cdot [\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{c}}]^{*\top} \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}})^{-1* \top} \rangle, \quad (\text{A15})$$

where \mathbf{I} the identity matrix. Note that $\langle \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{*\top} \rangle$ involves autocorrelation like $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^{*\top} \rangle$ and $\langle \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$ but also cross correlation terms such as $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$. In other words, recalling that \mathbf{b} and \mathbf{c} stand respectively for the expansion coefficients of the external potential, Eq. (A7), and the parametrized velocity distribution, Eq. (A10), their cross-correlation will *in fine* modify the correlation of the response of the inner halo. Two-points statistics are sufficient to characterize stationary perturbations and therefore the induced response. Nevertheless, higher statistics of the response can be easily expressed in terms of higher order correlations of the perturbation if needed. For example, it can be shown that the three-point correlation function of the response's coefficients can be written as function of the two- and three-points correlation of the perturbations' coefficients. There are yet quite a few caveats involved; for instance, it is not completely clear today that we have a good understanding of what the unperturbed distribution function of a halo+disk should be.

A3 The source term

A possible choice² for the source term consistent with the first two velocity moments of the entering matter, involves constructing $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ in the following manner:

$$\begin{aligned} s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{\mathbf{m}} Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \frac{\delta_D(r - R_{200}) \hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}(t) (2\pi)^{-3/2}}{\det[\hat{\omega}_{\rho\sigma_i\sigma_j, \mathbf{m}}(t) / \hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}(t)]} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\mathbf{v} - \frac{\hat{\omega}_{\rho\mathbf{v}, \mathbf{m}}(t)}{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}(t)} \right)^{\top} \left(\frac{\hat{\omega}_{\rho\sigma_i\sigma_j, \mathbf{m}}(t)}{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}(t)} \right)^{-1} \left(\mathbf{v} - \frac{\hat{\omega}_{\rho\mathbf{v}, \mathbf{m}}(t)}{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}(t)} \right) \right] \\ &\equiv \sum_{\mathbf{m}} Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \delta_D(r - R_{200}) \mathcal{C}_{\mathbf{m}}(\mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

where \mathbf{m} stands for the two harmonic number, (ℓ, m) and $Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \equiv Y_{\ell}^m(\boldsymbol{\Omega})$. Here the Dirac function $\delta_D(r - R_{200})$ is introduced since we measure the source terms at the virial radius. The global form is Gaussian and is constructed using $\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}$, $\hat{\omega}_{\rho\mathbf{v}, \mathbf{m}}$, $\hat{\omega}_{\rho\sigma_i\sigma_j, \mathbf{m}}$, the harmonic

² An alternative choice is made in Aubert & Pichon (2004) to account for the bimodality of the velocity distribution.

components of respectively the mass flux density field, velocity flux density vector field and the specific kinetic energy flux density tensor field measured on the R_{200} sphere. When taking the successive moment of this flux distribution over velocity, we get:

$$\int d^3\mathbf{v} s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varpi_\rho(\mathbf{r}), \quad \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varpi_{\rho\mathbf{v}}(\mathbf{r}), \quad (\text{A17})$$

while

$$\int d^3\mathbf{v} \left(v_i - \frac{\varpi_{\rho\mathbf{v},i}}{\varpi_\rho} \right) \left(v_j - \frac{\varpi_{\rho\mathbf{v},j}}{\varpi_\rho} \right) s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varpi_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\mathbf{r}) + \left(\sum_{\mathbf{m}} Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \delta(r - R_{200}) \frac{\hat{\omega}_{\rho\mathbf{v},\mathbf{m}}(t)^2}{\hat{\omega}_{\rho,\mathbf{m}}(t)} - \frac{\varpi_{\rho\mathbf{v}}(\mathbf{r})^2}{\varpi_\rho(\mathbf{r})} \right) \approx \varpi_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\mathbf{r}), \quad (\text{A18})$$

so that the Ansatz, Eq. (A16), satisfy the first two moments, and approximatively the third moment of the fluid equations. Let us now expand $C_{\mathbf{m}}(\mathbf{v}, t)$ over a linear complete basis, say b-splines covering the radial velocity component and spherical harmonics for the angle distribution of the velocity vector:

$$C_{\mathbf{m}}(\mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha} C_{\mathbf{m},\alpha}(t) b_{\alpha}(\mathbf{v}). \quad (\text{A19})$$

The particular choice of Eq. (A16) has led to the parametrisation:

$$c_{\mathbf{n}}(t) = C_{\mathbf{m},\alpha}(t) \quad \text{and} \quad \phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = b_{\alpha}(\mathbf{v}) Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) \delta_D(r - R_{200}), \quad (\text{A20})$$

while Eq. (A10) becomes

$$\sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) Y_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}, \mathbf{w})] b_{\alpha}(\mathbf{v}[\mathbf{I}, \mathbf{w}]) \delta_D(r(\mathbf{I}, \mathbf{w}) - R_{200}). \quad (\text{A21})$$

Note that we can make use of the δ_D function occurring in Eq. (A21) since $w_r \equiv \tilde{w}_r(r, \mathbf{I})$. Therefore Eq. (A21) reads:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) &= \int \frac{d^2\mathbf{w}}{(2\pi)^3} \int dw_r \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) Y_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}, \mathbf{w})] b_{\alpha}(\mathbf{v}[\mathbf{I}, \mathbf{w}]) \frac{1}{|\partial\tilde{w}_r/\partial r|^{-1}} \delta_D(w_r - \tilde{w}_r[R_{200}, \mathbf{I}]), \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{w}}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) Y_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}, \mathbf{w}, \tilde{w}_r[R_{200}, \mathbf{I}])] b_{\alpha}(\mathbf{v}[\mathbf{I}, \mathbf{w}, \tilde{w}_r(R_{200}, \mathbf{I})]) \frac{\omega_r(\mathbf{I})}{|\dot{r}(R_{200}, \mathbf{I})|} \exp(-ik_r \cdot \tilde{w}_r[R_{200}, \mathbf{I}]) \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

In Eq. (A22) we sum over all intersections of the orbit \mathbf{I} with the R_{200} sphere, at the radial phase corresponding to that intersection (with a weight corresponding to $\omega_r/|\dot{r}|$).

Given Eq. (A6), Eq. (A16), together with Eq. (A22), Eq. (A13) can be recast formally as

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}\{F_0, t, \tau, \boldsymbol{\Omega}\} \left[\psi_e(\boldsymbol{\Omega}, \tau), \varpi_\rho(\boldsymbol{\Omega}, \tau), \varpi_{\rho\mathbf{v}}(\boldsymbol{\Omega}, \tau), \varpi_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\boldsymbol{\Omega}, \tau) \right] \quad (\text{A23})$$

which corresponds to the form given in the main text in Equation 32. It should be emphasized once again that the splitting of the gravitationnal field into two components, one outside of R_{200} , and one inside, via point particles obeying the distribution $s_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ is completely arbitrary from the point of view of the dynamics. In fact, one should account that $\psi_e(\boldsymbol{\Omega}, t)$ should be switched on long before any particles enter R_{200} since no particle is created at the boundary. This last constraint is clearly satisfied by our simulations.

APPENDIX B: ADAPTAHOP: A SUBSTRUCTURE FINDER BASED ON SADDLE POINT HANDLING

Dark matter haloes can contain a hierarchy of subhaloes, which can be viewed as a tree of structures and sub-structures. Given a mass resolution (a finite number of particles such as in our N -body simulations), there is a limit to this hierarchy, which can be formalised as an ensemble of leaves in a tree. The goal here is to draw this tree by applying the simplest principles of Morse theory (e.g. Jost (2002)). Morse theory basically involves relating the topology of an excursion, e.g., the regions of space with density above a given threshold, $\rho > \rho_t$, to the set of critical points it contains, $\{\mathbf{x}, \nabla\rho(\mathbf{x}) = 0\}$, and to the field lines connecting these points together, i.e. the curves obtained by following the gradient of the density field. In that approach, the smallest substructures, which are the leaves of the tree, can be identified as peak patches, i.e. ensembles of field lines converging to the same local maximum. The connectivity between substructures is ruled by the saddle points, which are local maxima in the surfaces defining the contours of the peak patches: from the knowledge of these saddle points and the local maxima they connect, it is possible to extract the full tree of structures (haloes) and sub-structures (subhaloes) in four steps:

(i) In order to eliminate, at least partly, the effects of Poisson noise and to have an estimate of the local density as close as possible to a Morse function,³ while conserving as much as possible details of the distribution, we perform adaptive smoothing of this distribution with standard SPH technique (Smooth Particle Hydrodynamics, e.g. Monaghan (1992)). This smoothing assumes that each particle is a smooth spherical cloud of given radius R , e.g. a spline $S(r)$. For each particle, the list of its N_{SPH} closest neighbors is found, typically N_{SPH} of a few tens (here we take $N_{\text{SPH}} = 64$). The distance from the furthest neighbor fixes R , while the SPH density at the particle of interest is estimated by a summation over its neighbors with weight $S(r)$. To find rapidly the closest neighbors of each particle, we use a standard Oct-tree algorithm, which decomposes hierarchically space in subcells until they contain zero or one particle.

(ii) The leaves of the tree of structures and substructures are identified while associating each particle to the peak patch it belongs to. This is performed by a simple walk from particle to particle, while following the gradient until convergence: at each step of the walk, the SPH density of the particle is compared to its N_{HOP} closest neighbors (which were stored during the SPH smoothing step), the particle for the next step of the walk being the one with the largest SPH density. We take $N_{\text{HOP}} = 16$, as advocated by Eisenstein & Hut (1998).

(iii) For each leaf of the tree, the connections with the other leaves are created by searching the saddle points on the intersecting surfaces \mathcal{S}_{ij} between peak patches i and j . Each surface \mathcal{S}_{ij} is made of particles belonging to one of the peak patches and having at least one of their closest neighbors among N_{HOP} in the other peak patch, and vice versa. If the set \mathcal{S}_{ij} contains only particles belonging to i or only particles belonging to j , the connection between i and j is considered as non significant (because non symmetric) and eliminated, $\mathcal{S}_{ij} = \emptyset$. Saddle points are local maxima in \mathcal{S}_{ij} . To establish the connectivity as a function of a density threshold, only the highest saddle point matters, when there are several.

³ i.e. a smooth function such that the ensemble of critical point is discrete and the matrix of second derivatives in their neighborhood is non degenerate.

The search for this saddle point involves finding the maximum of the SPH density among particles belonging to \mathcal{S}_{ij} . We proceed as follows to estimate accurately the SPH density in \mathcal{S}_{ij} . For each particle A in \mathcal{S}_{ij} , say belonging to peak patch i and with density ρ_A , we consider the list of its closest neighbors among N_{HOP} belonging to peak patch j , with density ρ_k , $k = 1, \dots, N_j \leq N_{\text{HOP}}$. The density associated to this particle in \mathcal{S}_{ij} is then given by $\rho = \min(\rho_A, \rho_k)$. By applying this procedure, we locate accurately \mathcal{S}_{ij} and avoid slight overestimation of the SPH density at the saddle point.

(iv) It is possible to build the tree of structures and sub-structures, when the list of neighboring leaves to which a given leaf is connected is given, as well as the corresponding saddle points. This is performed recursively by increasing progressively a threshold parameter, ρ_t , from an initial value, ρ_{TH} , corresponding to the typical overdensity used to select galaxy haloes, here called structures. A typical choice for ρ_{TH} is $\rho_{\text{TH}} = 81$, which corresponds approximately to friend-of-friend haloes selected with a linking parameter $b = 0.2$ (e.g., Eisenstein & Hut (1998)). Suppose we are at step n of the process and let us compute step $n + 1$. At this point, we are sitting on a branch of the tree –a structure or a sub-structure– and we aim to draw the details of this branch. This (sub-) structure contains a number of peak patches connected by saddle points of densities ρ_s . For the considered value of ρ_t , the connections inside that (sub-) structure are examined and destroyed when $\rho_s < \rho_t$. The (sub-) structure is then broken into as many components as necessary. During the process, the particles above ρ_t belonging to each sub-component are tagged, which allows us to determine at any time various properties of a given (sub-) structure, namely the number of particles it contains, its mass, its average and maximum SPH density, for possible application to various morphological criterions of selection. One such criterion is Poisson noise. In order to assess if a given sub-structure containing N particles should be considered as statistically significant compared to Poisson noise, its average density must be sufficiently significant compared to ρ_t :

$$\langle \rho \rangle_{\text{sub-structure}} > \rho_t \left[1 + \frac{f_{\text{Poisson}}}{\sqrt{N}} \right], \quad (\text{B1})$$

where f_{Poisson} is a “ $f_{\text{Poisson}}\sigma$ ” detection parameter, typically a few unities. A good choice is $f_{\text{Poisson}} = 4$. If the sub-structure is below this threshold, it disappears, i.e. it is not considered in next step of the recursion. At the end of the selection, two situations are possible: (i) two sub-structures or more are detected and new nodes are created in the tree (ii) the (sub-)structure was not broken into multiple components and nothing happens at this step. The process is then repeated on the new sub-structures by increasing locally the threshold ρ_t :

$$\rho_t \rightarrow \rho_t \times \left[1 + \frac{f_{\text{Poisson}}}{\sqrt{N}} \right], \quad (\text{B2})$$

until there is only one peak patch in the (sub-)structure. Note that the Poisson noise selection, eq. (B1) is not applied to the haloes, when $\rho_t = \rho_{\text{TH}}$.

At the end of the process, one obtains a tree of structures and sub-structures, where each node of the tree corresponding to a (sub-)structure, with its position, its number of particles, its mean square radius, its average and maximum SPH density, and the density ρ_s of the highest saddle point which connects it to another substructure. In addition, a flag is given to each particle. This flag is a pointer to the node the closest possible to a leaf (if not a leaf), which allows

one to find recursively the list of particles belonging to any (sub-)structure and thus perform some more elaborate post-treatment, such as some relying on dynamical prescriptions (boundness). The difficulty in that case is to estimate accurately the gravitational potential. Its computation can be rather costly, since “peeling” the (sub-)haloes requires iterating several forward and backward walks in the tree of structures and sub-structures with corresponding calculations of the gravitational potential. Our prescription is therefore at the present time purely morphological and does not involve the estimate of the gravitational potential. The current implementation is rather fast, most of the CPU time being taken by the SPH smoothing, e.g. 1-3 hours on 16 millions particles on current fast scalar processors.

Our algorithm is called ADAPTAHOP since we aim at improving HOP (Eisenstein & Hut (1998)): the first two step above are exactly the same as in HOP, but the last two are different. Indeed, in HOP, the idea is to combine informations on the saddle point densities, ρ_s , on the local maxima, ρ_{\max} , inside a connected set of peak patches to decide whether it has to be broken into multiple *disjoint haloes*. The aim of HOP is indeed to improve standard friend-of-friend methods in order to obtain more compact and spherical haloes. The goal of ADAPTAHOP is quite different since it focuses on sub-structure detection.

In spirit, ADAPTAHOP is in fact very similar to the substructure finder of Springel (1999): SUBFIND (see also Springel et al. (2001)). Of course, there is a major difference, since SUBFIND has in addition a sophisticated dynamical prescription involving exact calculation of the gravitational potential. Springel uses also a slightly more elegant method to construct the tree of structures and substructures prior to dynamical post-treatment. After step one above, the idea is to rank the particles by decreasing density and treat them in this order. Investigating the distribution of particles is such a way is equivalent to examining isocontours of decreasing density. It uses (as in ADAPTAHOP) the closest neighbors of a particle to decide if the particle examined during the process (i) creates a new (sub-)structure since it is isolated (ii) belongs to an existing substructure or (iii) connects two substructures, which makes the construction of the tree of structures and substructures much simpler than in ADAPTAHOP and more accurate, since there no need for using the threshold parameter ρ_t . In SUBFIND, no treatment is made to account for the local Poisson noise: it is not necessary because of the dynamical post-processing, which destroys unbounded structures.

It is important to note that since ADAPTAHOP has no dynamical post-treatment, it gives slightly different results compared to SUBFIND in its present form. In particular, for a given sufficiently massive dark matter halo, SUBFIND (Springel et al. (2001)) describes it in terms of a large, smooth central component, and a bunch of much less massive sub-haloes. In ADAPTAHOP, the result is quite similar, except that the central component is much less spatially extended (it is extended up to the isocontour level corresponding to the saddle point connecting it to a sub-halo), and it is therefore less massive.

Fig. B1 illustrates how well ADAPTAHOP performs in one of the simulations we realized for this work, for the most massive halo detected in this realization.

APPENDIX C: STATISTICS ON THE SPHERE

When dealing with spherical fields, there are different ways to characterize their angular structure. In the present paper, we essentially

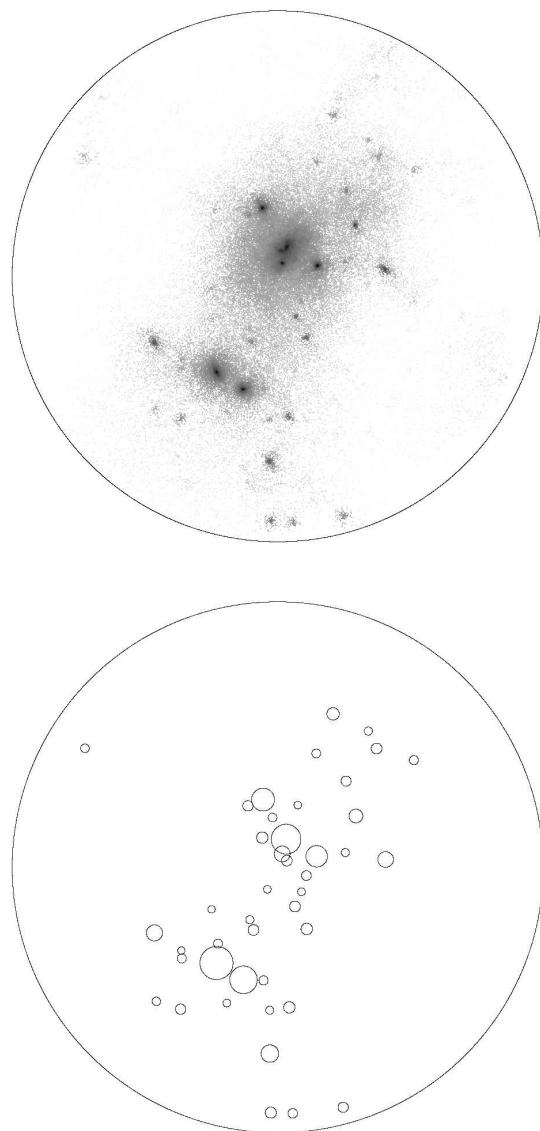


Figure B1. Illustration of the output of ADAPTAHOP for one of the simulations of this work. A sphere of radius 5 Mpc centered on the most massive halo is represented. In the upper panel, the dark matter density is shown using a logarithmic scale. Darker regions correspond to higher density contrasts. The lower panel displays the detected subhaloes (i.e. the most elementary structures corresponding to the peak patches or the leaves of the tree). The size of the circle scales with $M^{1/3}$, where M is the mass of the subhalo. Most of the subhaloes seen on the figure belong to the most massive halo. Clearly, ADAPTAHOP is rather successful at detecting all the significant substructures.

deal with centered statistics, i.e. we describe the angular structuration of scalar or vector fields relative to a specific direction, defined by the halo or satellite’s spin \mathbf{S} . Let us first formally introduce filtering on the sphere, statistical and angular averages, and present one-point statistics (probability distribution functions) while postponing two-point statistics (correlation functions, or excess probability of joint events) to Aubert & Pichon (2004).

C1 One point statistics

For any field, x , on the sphere, let us introduce the smoothed field, $(x)_\alpha$ (filtered on scale α), as

$$(x)_\alpha(\Omega) \equiv \frac{1}{\int \Theta_\alpha(\Omega') d\Omega'} \int \Theta_\alpha(\Omega' - \Omega) x(\Omega') d\Omega' \quad (C1)$$

$$\equiv \int w_\alpha(\Omega - \Omega') x(\Omega') d\Omega', \quad (C2)$$

where Θ_α stands for the top hat function,

$$\Theta_\alpha(\Omega) = 1 \quad \text{if} \quad |\vartheta| \leq \alpha, \quad (C3)$$

and w_α is defined by C7 the standard top hat filter on the sphere.

Consider now the centered top-hat-filtered (on scale α) field, $[x]_\alpha$, defined by

$$[x]_\alpha \equiv (x)_\alpha(\frac{\pi}{2}), \quad (C4)$$

$$\equiv \frac{1}{\int \Theta_\alpha(\Omega') d\Omega'} \int \Theta_\alpha(\vartheta' - \pi/2) x(\Omega') d\Omega', \quad (C5)$$

$$\equiv \int W_\alpha(\Omega') x(\Omega') d\Omega'. \quad (C6)$$

Note that Eq. (C6) defines W_α . Our filtering is now centred, in that the average is carried on a window which is centred at the equatorial plane (since we are in this paper interested in the polarisation of accretion processes with respect to that plane). Let us also introduce the average of x on the sphere, as

$$\bar{x} \equiv (x)_{\pi/2} = \frac{1}{\int d\Omega} \int x(\Omega) d\Omega, \quad (C7)$$

We may also for a given x define its contrast as

$$\delta_x \equiv \frac{x}{\bar{x}} - 1. \quad (C8)$$

Note that, in contrast to standard cosmology, we expect that $\bar{x} \neq \langle x \rangle$, (i.e. no ergodicity) since the angular average over one virial sphere is not representative of the whole cosmological set, and since $\langle x \rangle$ depends on ϑ whereas \bar{x} doesn't. As a consequence,

$$\langle \delta_x \rangle = \langle \frac{x}{\bar{x}} \rangle - 1 \neq \frac{\langle x \rangle}{\bar{x}} - 1.$$

Consider now the top-hat-filtered-centred flux density contrast, $[\delta_\varpi]_\alpha$, defined by

$$[\delta_\varpi]_\alpha \equiv (\delta_\varpi)_\alpha(\pi/2) = \frac{1}{\bar{\varpi}} \int W_\alpha(\Omega) \varpi d\Omega - 1. \quad (C9)$$

Since by construction, $[\delta_\varpi]_\alpha$, is a filtered version of δ_ϖ , it inherits some of its statistical properties. In particular, the PDF of $\delta_\varpi(\pi/2)$ and $[\delta_\varpi]_\alpha$ should be quite similar provided α is small enough.

In the main text, we consider the anisotropic parameter, $\delta_m \equiv [\delta_{\rho v_r}]_{\pi/8}$, which therefore corresponds formally to the centered top-hat-smoothed (on scales of $\pi/8$) mass flux density contrast. Following the same spirit, we could also consider quantities such as $[\delta_{\rho v_r, v^2}]_{\pi/8}$, which would measure the anisotropy in the accreted kinetic energy: the excess of accreted kinetic energy should allow us to track the excess of incoming virialised objects in the equatorial plane without performing their explicit identification. One should also consider $[\delta_{\rho v_r, L}]_{\pi/8}$, the anisotropy in the accreted momentum, since this quantity is directly related to the torque applied onto the system by the infall. More generally still we could investigate $(\delta_\varpi)_\alpha(\vartheta)$, the flux density contrast top-hat-smoothed on a ring of size α centred on ϑ .

Note that we can think of the harmonic coefficients, a_ℓ^m introduced in section 3.4 as a specific type of filtering, where the window function, W_α , is replaced by an axisymmetric spherical harmonic, $Y_\ell^0(\Omega)$:

$$[\delta_\varpi]_\ell = \frac{1}{\bar{\varpi}} \int Y_\ell^{0*}(\Omega) \varpi(\Omega) d\Omega = \frac{a_\ell^0}{\bar{\varpi}}. \quad (C10)$$

We can also write $\bar{\varpi}$ in terms of spherical harmonics:

$$\bar{\varpi} \equiv \frac{1}{4\pi} \int \varpi d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int Y_0^{0*}(\Omega) \varpi d\Omega = \frac{a_0^0}{\sqrt{4\pi}}. \quad (C11)$$

Therefore we obtain :

$$[\delta_\varpi]_\ell = \frac{a_\ell^0}{\text{sign}(a_0^0) \sqrt{C_0}}, \quad (C12)$$

where $C_0 = |a_0^0|^2 / 4\pi$ is the $\ell = 0$ component of the angular power spectrum C_ℓ .

Since a step function can be expanded along spherical harmonics as

$$\Theta_\alpha(\vartheta - \frac{\pi}{2}) = \sum_\ell b_\ell Y_\ell^0(\vartheta, 0); \quad (C13)$$

therefore, $[\delta_\varpi]_\alpha$ defined by Eq. C9 obeys

$$[\delta_\varpi]_\alpha = \sum_\ell b_\ell [\delta_\varpi]_\ell - 1. \quad (C14)$$

Taking $x = \rho v_r$ for example, we have :

$$\delta_{[\rho v_r]}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} d_\ell^m Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) = \frac{\rho v_r(\vartheta, \varphi)}{\bar{\rho v_r}} - 1, \quad (C15)$$

where

$$\bar{\rho v_r} = \frac{1}{4\pi} \int d\vartheta d\varphi \rho v_r(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta = \frac{a_0^0}{\sqrt{4\pi}}. \quad (C16)$$

Since

$$\int d\vartheta d\varphi Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta = \sqrt{4\pi} \delta_{\ell 0} \delta_{m 0}$$

(e.g. Varshalovich et al. (1988)), we find :

$$d_\ell^m = \tilde{a}_\ell^m - \sqrt{4\pi} \delta_{\ell 0} \delta_{m 0}. \quad (C17)$$

We finally obtain :

$$\delta_{[\rho v_r]}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} \tilde{a}_\ell^m Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) - 1. \quad (C18)$$

APPENDIX D: CONVERGENCE ISSUES**D1 Substructures & the halo's spin**

For each tree of substructure-satellites, we computed the total spin inside the mother structure, \mathbf{S}_M , and the momentum of each substructure inside the mother structure, \mathbf{L}_s . Then we compared the inner satellites' and the contribution of the core to the mother's spin. The comparison is only made on the components of the substructures momentum parallel to \vec{S}_M . The results are shown in Fig. D1. We plotted the *total* contribution of satellites to the mother's spin versus the core's contribution. From the barycenter of the distribution shown in Fig. D1, it appears that substructures contain about 80 % of the total host's spin with a satellites contribution of 50%

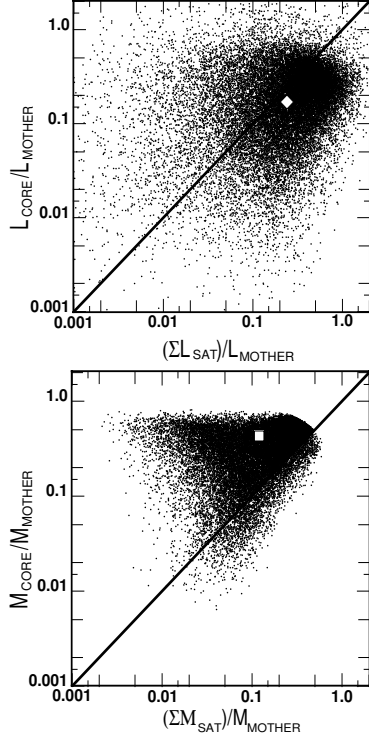


Figure D1. Comparison of the substructure's and the core's contribution to the amplitude of the mother's spin and to the mother's mass. *Top:* Comparison of the core's contribution to the mother's spin compared to the contribution of all the satellites for each mother detected in our simulations. *Bottom:* same comparison but for the core's and satellites' mass relative to the mother's total mass. In both figures, the symbol indicates the barycenter of the cloud of points while the thick line's slope is unity. While the total mass is dominated by the core's contribution, the mother's spin is dominated by satellites showing that their specific orbital momentum is more important than that of the core.

and about 30 % for the core. The bottom panel shows the total contribution of substructures to the mother's mass versus the contribution of the core. As expected given the definition of the core, we found that the relative proportion are almost reversed compared to the previous plot. A core contains about half of the total mass while satellites represent about 40% of the total mass. Clearly the specific angular momentum is larger in satellites than in the core. The distance of satellites relative to the mother's centre and their velocities induce a 'lever arm' effect. Even if satellite remnants are light in terms of mass they are important if not dominant for the spin of the galactic system. This effect also suggests that the mother's spin is aligned with the orbital momentum of infalling satellites because they determine the direction of the halo's spin.

D2 the mass dependence of $\langle \delta_m \rangle$

We measured the average excess of accretion $\langle \delta_m \rangle$ (see section 3.3) for three different class of masses at redshift $z=0$: $5 \cdot 10^{12} M_\odot < m < 1.25 \cdot 10^{13} M_\odot$, $1.25 \cdot 10^{13} M_\odot < m < 2.5 \cdot 10^{13} M_\odot$ and $m > 2.5 \cdot 10^{13} M_\odot$. Each class contains approximately 16 500 haloes. The results are shown in Fig. D2. It is found that $\langle \delta_m \rangle$ increases with mass but does not change significantly even if the three classes cover different mass magnitudes.

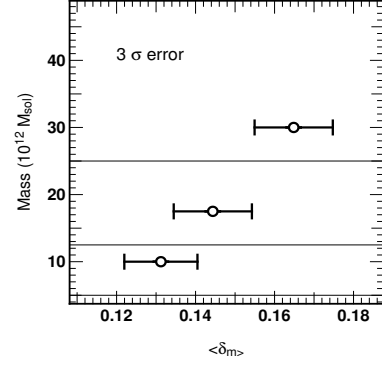


Figure D2. Comparison of $\langle \delta_m \rangle$ for different classes of halo mass at $z=0$. The error bars stand for the 3σ error. The thin lines separate the three classes of mass: $5 \cdot 10^{12} M_\odot < m < 1.25 \cdot 10^{13} M_\odot$, $1.25 \cdot 10^{13} M_\odot < m < 2.5 \cdot 10^{13} M_\odot$ and $m > 2.5 \cdot 10^{13} M_\odot$. Each class contains 16500 haloes.

Consequently, no class of mass dominates when all the haloes are being used in the computation of $\langle \delta_m \rangle$.

8

Statistique des environnements : Méthodologie

La propagation statistique des caractéristiques des environnements aux propriétés des halos impose de connaître les conditions limites auxquels ces derniers sont soumis. L'approche développée dans ce chapitre consiste à extraire ces conditions aux bords à partir des simulations de matière noire en répondant à deux questions : *quel est le champ de marée typique auquel est soumis un halo ? Quelles sont les propriétés typiques du matériau accréte par les halos ?* L'ambition est de parvenir à une description statistique de ces conditions limites en mettant à profit le grand nombre de simulations à disposition.

On se concentrera dans un premier temps sur la méthodologie de la mesure. Les études mentionnées dans ce chapitre ont fait l'objet de la rédaction d'un article, non encore soumis : *Dynamical flows through Dark Matter haloes I : One and Two points statistics at the Virial radius*. En particulier, il sera largement fait mention [aux figures](#) qui y sont contenues.

De l'environnement

Le terme *environnement* se doit d'être défini. Le halo perçoit ce dernier de deux façons différentes : au travers du champ de marée qu'il génère et au travers des flux de matière qu'il induit.

Le calcul de perturbations induites par un champ de marée constitue un "classique" des approches analytiques de la dynamique du halo (par exemple Tremaine & Weinberg (1984), Murali (1999), Seguin & Dupraz (1994)). Toutefois, ces études se sont généralement limitées à des cas d'école, tel un satellite lancé sur une trajectoire ad hoc, la croissance d'un disque ou l'effet d'une barre. Afin d'aller au delà de ces conditions limites "idéalisées", l'un des objectifs de cette thèse est la caractérisation du champ de marée auquel sont soumis les halos formés au sein des simulations cosmologiques.

L'accrétion constitue en revanche un concept dont la définition est moins univoque que celle du champ marée externe. D'emblée deux types d'accrétion peuvent être distingués : le gain de masse d'un halo peut résulter de l'assimilation d'objets-satellites

(processus de *fusion*) ou de l'accrétion diffuse de matériel non auto-gravitant (processus d'accrétion *diffuse*). De fait, doit-on les traiter d'emblée comme deux canaux différents d'un même processus ou à l'inverse faire une étude à posteriori de leurs contributions relatives ? Il faut noter que la définitions de ces deux modes d'accrétion n'est pas sans ambiguïté. Ainsi, la définition même d'un satellite dans une simulation n'est pas des plus évidentes et a donné lieu aux développement de multiples outils plus ou moins sophistiqués (par ex. ADAPTAHOP (Aubert et al. (2004)), MPLAMP (Gill et al. (2004)), SUBFIND (Springel et al. (2001))). La notion d'accrétion diffuse est quant à elle dépendante de la résolution des simulations, plaçant un seuil arbitraire sur la taille minimale des objets. Compte tenu de ces ambiguïtés, les deux types d'accrétion sont considérées ensemble dans ce chapitre, via une description sous forme de champ, tel *un fluide de matière noire*, dont la *source* est détectée aux limites des halos dans les simulations. Objets et accrétion diffuse se retrouvent mêlés dans cette description et constituent deux "phases" différentes de ce fluide.

Cette description est apparentée à celle utilisée modèles analytiques et semi-analytiques de formation des galaxies (e.g. Kauffmann et al. (1993), Hatton et al. (2003), Roukema et al. (1997), Benson et al. (2001)) et dont le principe fondamental repose sur la construction d'arbres de fusions des halos. L'approche fluide appliquée ici au terme source permet d'ajouter une information spatiale et cinématique à la description de l'accrétion de matière, cette connaissance étant fondamentale pour l'étude de leurs réponses dynamiques. De telles études sur la distribution de matière autour des halos ont déjà été pratiquées dans les simulations, via des halos à très haute résolution (e.g. Knebe et al. (2004), Gill et al. (2004)) ou en identifiant les différents modes d'accrétion du gaz par les galaxies (e.g. Murali et al. (2002), Katz et al. (2003)). Dans l'approche décrite ici, l'adoption d'un point de vue halocentrique permet une application directe des mesures des flux à la dynamique du halo (voir le chapitre 2). De plus, elle permet de limiter l'information contenue dans les simulations à celle directement pertinente pour la dynamique des objets : ce fluide "noir" combiné au champ de marée constituent aux yeux de la dynamique du halo la partie visible de l'environnement. Cette description des flux, combinée au grand nombre de halos disponibles dans les simulations (décrites dans le chapitre 5), doit enfin pouvoir apporter des contraintes quantitatives et statistiquement significatives sur les interactions que subissent ces objet.

De la statistique

Une façon habituelle de déterminer la distribution statistique d'une quantité consiste à estimer son espérance et sa variance, qui suffisent par exemple à caractériser une loi gaussienne. De façon analogue, les travaux présents chercheront typiquement à caractériser les statistiques à 1 et 2 points des champs de marée et du fluide "noir" afin d'en dégager les échelles caractéristiques¹. Ces champs possèdent des spécificités qui influent sur la procédure de caractérisation, parmi lesquelles :

- Les champs évoluent au cours du temps. De fait, une partie des corrélations étudiées sont spatio-temporelles et permettent de dégager des temps de cohérence du champ de marée ou de la source de matière. De plus, ces champs ne sont pas stationnaires et présentent une évolution dite "séculaire".

¹il faut noter qu'aucune hypothèse de gaussianité n'est faite à ce stade et que la caractérisation des deux premiers moments des distributions de ces champs constitue uniquement une première étape

- La source est une fonction à 5 dimensions, deux de positions et trois de vitesse. Ceci implique que sa caractérisation statistique est très complexe au vu du nombre de corrélations croisées (comment la vitesse se corrèle avec la taille des structures par exemple) qui doivent être contraintes.
- L'environnement est décrit par deux champs différents (la source et le champ de marée). Dans un souci de cohérence dynamique, il a été montré que les corrélations entre ces deux champs doivent aussi être mesurées (voir le chapitre 2).

Ces spécificités font de la contrainte statistique des environnements une tâche particulièrement ardue à implémenter et à effectuer. Une façon simple de synthétiser la grande quantité d'information à contraindre consiste à projeter les champs pertinents sur une *base de fonctions* pavant l'espace des phases. Une telle projection permet, entre autres, un découplage de l'évolution temporelle des autres dépendances et l'ensemble des corrélations se ramènent à des opérations simples. La mise de contrainte statistiques s'effectue alors sur des coefficients de projection. C'est ce type d'approche qui a été adoptée pour caractériser le “fluide noir” accrété par les halos.

Après cette brève introduction sur les concepts d'environnement et de statistique, on explicite dans la section suivante l'approche “fluide” consistant à décrire l'environnement sous forme de champs. Suit ensuite le détail pratique de la mesure de ces champs à partir de simulations. Enfin, ce chapitre se clôt sur un “glossaire sphérique” décrivant certains outils propres aux mesures sur la sphère et dont il sera largement fait usage par la suite.

8.1 Une description de l'environnement en termes de champs

Le halo est décrit comme un système sphérique baignant dans un potentiel créé par la distribution de matière environnante et qui accrète (ou rejette) de la matière noire au travers d'une sphère de rayon R . La dynamique d'un système ouvert et non-collisionnel est décrite par l'équation de Poisson et l'équation de Boltzmann :

$$\Delta\Psi = 4\pi G \int d\mathbf{v} F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (8.2)$$

où F décrit la fonction de distribution du halo dans l'espace des phases. Le potentiel gravitationnel global, Ψ , inclut le potentiel créé par la matière externe au halo, ψ^e . La quantité $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ désigne le terme source qui nourrit le halo par injection de matériel. La matière est accrétée au travers d'une sphère de rayon R_{200} qui tient lieu d'interface d'échange et qui est défini dans la section suivante.

Le rayon de “Viriel” comme frontière

Une accrétion ne se conçoit qu'au travers d'une “paroi” qui fait office d'interface d'échange entre le milieu étudié (le halo dans le cas présent) et le milieu extérieur (le milieu “inter-halo” ici). Dans ce manuscrit, l'accrétion de matière est mesurée au rayon de Viriel R_{200} . Cette quantité est définie comme le rayon à l'intérieur duquel la densité moyenne est égale à 200 fois la densité moyenne dans la simulation.

Pratiquement, le rayon de Viriel d'un halo de matière noire est mesuré en classant les particules suivant leur distance au centre de masse et en associant à chacune de ces particules une densité interne moyenne. Compte tenu du nombre important de particules par halo (au moins 1000 à $z=0$), l'évolution de cette densité interne avec la distance au centre est suffisamment lisse pour que R_{200} soit déterminé précisément.

Il a déjà été mentionné que l'appellation *rayon de Viriel* est à priori abusive car tous les halos possèdent un tel rayon au vu de la façon dont ce rayon est calculé, et ceci, qu'ils soient effectivement virielisés ou non. Toutefois Tormen et al. (1997) ont montré que de façon générale les halos sont effectivement plutôt à l'équilibre à l'intérieur de ce rayon. Le halo est d'autant plus proche d'un vrai équilibre que celui-ci est peu perturbé. Compte tenu du régime de faible accréation dans lequel l'étude se place, il apparaît que R_{200} constitue une approximation raisonnable des limites du halo "virielisé".

Le choix de ce rayon comme rayon de mesure est dans une certaine mesure arbitraire. Toutefois, un rayon de mesure plus faible aurait placé l'interface à l'intérieur du halo et la distinction entre la matière appartenant au halo et celle lui tombant dessus pour la première fois aurait été plus difficile. Ce rayon, se trouvant somme toute à grande distance (~ 500 kpc pour une galaxie L_*), permet de limiter la contribution de la matière du halo dans les mesures faites à l'interface. Un rayon plus grand aurait nécessité de traiter un volume de simulation plus important par halo et la contribution de satellites "fly-by" (de passage) ou même d'autres halos voisins se serait fait sentir, alors qu'ils ne constituent pas à proprement parler une accréation. Ce choix du rayon de Viriel R_{200} comme lieu de mesure, constitue un compromis permettant de mesurer l'accréation au plus près du halo tout en limitant la contribution dans les mesures de la matière interne.

Le terme source

Le terme source contient toute l'information sur la matière accrétée par le halo. La quantité s^e est défini comme la fonction de distribution dans l'espace des phases qui est advectée par le matériel accrété :

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv v_r f^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta_{\text{Dirac}}(r - R_{200}). \quad (8.3)$$

Cette définition résulte du besoin d'obtenir des équations de Jeans modifiées qui soient cohérentes. Ainsi, l'intégration de l'équation de Boltzmann sur les vitesses conduit à l'équation de conservation de la masse (cf. par exemple Binney & Tremaine (1987) ou Mamon (2001)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = -\delta_{\text{Dirac}}(r - R_{200})(\rho v_r)_e(\mathbf{r}, t). \quad (8.4)$$

Le premier moment du terme source, $\int d\mathbf{v} s^e$, conduit à l'apparition d'un terme de flux de masse supplémentaire, $(\rho v_r)^e(\mathbf{r}, t)$, au travers de la sphère frontière. De même, le second moment de l'équation de Boltzmann conduit à l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\delta_{\text{Dirac}}(r - R_{200})(\rho v_r \mathbf{v})_e(\mathbf{r}, t). \quad (8.5)$$

Le second moment du terme source conduit à l'apparition d'un terme de flux de moment supplémentaire dans le deuxième membre de l'équation de Jeans. Ces termes dans le second membre possèdent la forme attendue, où le terme source se traduit à chaque fois par une contribution supplémentaire au moment considéré de la fonction de distribution.

Ce terme source est défini de façon continue dans l'espace des phases, sous la forme d'un champ à 5 dimensions, $s^e(\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}, t)$, où $\mathbf{\Omega}$ désigne une direction sur la sphère de Viriel.

le potentiel extérieur

De façon plus classique, le potentiel extérieur, $\psi^e(\mathbf{r}, t)$, trace les forces de marées exercées par le milieu extérieur sur le halo. Ce potentiel est créé par la disposition à grande échelle de la matière ainsi que par le passage à distance de satellites ou de halos voisins. Bien qu'étant par essence tridimensionnel, le potentiel dans le halo créé par la matière externe est complètement décrit par la mesure de $\psi^e(\mathbf{\Omega}, t)$ sur la sphère du Viriel (en vertu du théorème de Gauss). Le potentiel extérieur n'est pas à proprement parler un fluide, mais sa description sous la forme d'un champ de marée sur la sphère de Viriel est analogue à la description fluide du terme source.

8.2 Des simulations à une mesure de l'environnement

La donnée des deux champs s^e et ψ^e permet de décrire complètement les interactions d'un halo avec son environnement. La mise de contrainte sur les conditions aux bords des halos consiste à caractériser statistiquement ces deux champs : valeurs moyennes, moments d'ordres deux (corrélations et cross-corrélations), voire moment d'ordre supérieurs. A cette fin, les deux champs $\psi^e(\mathbf{\Omega}, t)$ et $s^e(\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}, t)$ doivent dans un premier temps être mesurés à partir des halos détectés dans les simulations. Dans un second temps, les caractéristiques statistiques de ces champs sont contraintes en profitant du grand nombre de réalisations d'environnements, via une projection sur une base de fonction appropriée.

L'algorithme HOP extrait les halos des simulations. Pour chaque halo détecté à redshift $z = 0$, le rayon de "Viriel" R_{200} est mesuré, ainsi que la vitesse circulaire V_{200} à ce rayon. La sphère de rayon R_{200} tient lieu d'interface entre le halo et le milieu externe, au travers de laquelle l'accrétion s'effectue et sur laquelle le potentiel sera mesuré.

Toutes les mesures se font en coordonnées physiques et non comobiles, afin de simplifier les applications futures sur la dynamique interne du halo, sachant que ces études sur la dynamique galactique (au sens large) se font habituellement hors expansion.

De plus, la sphère du Viriel est maintenue *rigide* au cours du temps. En particulier, la valeur de R_{200} n'est pas actualisée en remontant le cours de l'évolution du halo et doit s'entendre au sens de R_{200} à $z = 0$. Pour un halo dont la masse augmente au cours du temps, ceci implique que le rayon de mesure tend à être plus grand que le R_{200} effectif. Néanmoins, le choix d'un R_{200} non statique nécessiterait de prendre en compte un flux inertiel, induit non pas par l'accrétion mais par le déplacement de la frontière où se fait la mesure. Toutefois, ce choix de rayon de Viriel constant constitue une approximation raisonnable : la variation entre $z = 1$ et $z = 0$ du rayon de Viriel *comobile* est majoritairement inférieure à 30% (voir la [figure 2](#) de l'article ci-joint).

8.2.1 Terme source

L'histoire d'accrétion du halo est reconstruite en remontant le temps en suivant le plus gros progéniteur (PGP) du halo final et ceci à chaque pas de temps. Le sphère de rayon R_{200} est centrée sur le centre de masse du PGP. Les vitesses des particules sont mesurées par rapport à la vitesse moyenne du PGP. Les particules se trouvant à l'intérieur de la sphère de Viriel au redshift z_n sont identifiées et comparées aux particules se trouvant à l'intérieur au redshift z_{n+1} . Les positions-vitesses des particules ayant traversé la sphère de Viriel entre les deux pas de temps sont stockées.

Effets d'échantillonnage temporel

Notons que les sorties des simulations cosmologiques ne sont généralement pas espacées régulièrement dans le temps. Or, la mesure d'une quantité liée à la source à chacun de ces pas de temps peut être altérée par un échantillonnage non régulier. Par exemple, si l'on suit au cours du temps un objet passant au travers de la sphère, l'échelle angulaire associée à cet objet va être dépendante de l'échantillonnage temporel. Ainsi, si le pas d'échantillonnage est plus grand que le temps de passage d'une structure au travers de la sphère, celle-ci va apparaître comme projetée sur la sphère et présenter une taille caractéristique supérieure à celle obtenue pour un échantillonnage plus fin (voir aussi la figure 8.1 et la figure 4 de l'article ci-joint). Un cas extrême consisterait en un pas d'échantillonnage suffisamment long pour qu'il y ait confusion entre deux structures passant successivement dans la même direction au travers de la sphère. Ceci implique que le terme source tel qu'il est mesuré dans les simulations doit être rééchantillonné régulièrement en temps.

Interpolation

La résolution temporelle liée aux instantanés des simulations étant finie, il est impossible d'avoir accès à l'instant exact de traversée t_{200} d'une particule au travers de la sphère de Viriel. Le temps de passage est obtenu en interpolant linéairement l'évolution de la distance au centre r entre deux redshifts :

$$t_{200} = t(z_n) + \frac{t(z_{n+1}) - t(z_n)}{r(z_{n+1}) - r(z_n)} \times (R_{200} - r(z_n)). \quad (8.6)$$

De même, les positions \mathbf{r}_{200} et vitesses \mathbf{v}_{200} de la particule à cet instant de passage sont interpolées linéairement. Ce type d'interpolation constitue clairement une approximation. En particulier, elle suppose que le mouvement est purement balistique (i.e. à vitesse constante) et radial, deux hypothèses qui ne sont pas rigoureusement exactes.

Néanmoins, l'échantillonnage des simulations est suffisamment fin pour que l'effet de l'interpolation soit faible. De plus, cette interpolation n'introduit pas de vitesses "anormales" là où d'autres schémas d'interpolations attribuent des vitesses radiales positives à des particules détectées comme entrantes (cf. la figure 3 de l'article ci-joint). Enfin, l'hypothèse de vitesses à forte tendance radiale sera vérifiée à posteriori. En résumé, le schéma d'interpolation précédent a été conservé par souci de simplicité et les mesures faites sur la sphères ne semblent pas indiquer de relicats dus à cette façon de procéder.

Connaissant l'instant de passage au travers de la sphère de chaque particule, le rééchantillonnage régulier peut être effectué. Aucun à priori ferme ne peut être posée sur la bonne taille de pas de temps et l'échantillonnage choisi est en grande partie arbitraire. Pratiquement, l'échantillonnage retenu fut de 15 pas de temps régulièrement espacés entre $z = 0$ et $z = 1$ (voir la figure 8.2), tous les ~ 500 Myrs. Cet échantillonnage particulier est suffisamment fin tout en permettant à suffisamment de particules d'être accrétées entre deux pas de temps au travers de la sphère, limitant ainsi le bruit d'échantillonnage.

Construction du terme source

Bien que dorénavant régulier, l'échantillonnage temporel est toujours de résolution finie. Pour cette raison, le terme source effectivement mesuré à $z_{n+1/2}$ est moyenné entre z_n et z_{n+1} :

$$s^e(\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}, z_{n+1/2}) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t(z_n)}^{t(z_{n+1})} dt s^e(\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}, t). \quad (8.7)$$

Ces précautions sur l'échantillonnage temporel étant prises, le terme source est approximé par :

$$s^e(\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}, z_{n+1/2}) \sim \frac{1}{R_{200}^2 \Delta T} \sum_i \frac{\delta_D(v - v_i)}{v^2} \frac{\delta_D(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_i)}{\sin \Omega_1} \frac{\delta_D(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}_i)}{\sin \Gamma_1} w_i, \quad (8.8)$$

où l'indice i décrit les particules passant au travers de la sphère entre les redshifts z_n et z_{n+1} , séparés de ΔT en temps. Le poids w_i d'une particule est de $+1$ si celle-ci rentre à l'intérieur de la sphère et de -1 si celle-ci est sortante. Par conséquent, les différents flux qui peuvent être extraits de s^e doivent être entendus comme des flux *nets*. Par exemple, deux particules localisées en un même point de la sphère de Viriel, mais ayant des poids opposés, auront une contribution nulle à la densité de flux mesurée à R_{200} . Ce cas de figure reste néanmoins exceptionnel et l'utilisation d'une source nette ne devient critique que lorsque la fraction de matière éjectée n'est plus négligeable et que l'on marginalise fortement la fonction source (par exemple en moyennant sur toute les positions et orientations de la vitesse).

Les fonctions δ_D sont des fonctions de Dirac, ce qui implique que les particules des simulations sont assimilées à des points dans l'espace des phases. Cette représentation constitue une approximation d'un point de vue physique (une particule possède une masse qui n'est clairement pas réductible à un point) mais également d'un point de vue de la "cohérence numérique" car le potentiel des particules est lissé lors de l'intégration cosmologique. Ceci implique que la contribution des petites échelles tend à être surestimée dans la mesure du terme source. Cette description ponctuelle a été conservée par simplicité, tout en gardant à l'esprit que les particules de matière noire ne sont pas rigoureusement des masses ponctuelles.

8.2.2 Potentiel extérieur

La mesure du potentiel extérieur au halo est plus simple que celle du terme source. La quantité $\psi^e(\mathbf{r})$ est mesurée directement à partir de la position des particules se trouvant dans une sphère de rayon physique égal à 4 Mpc, tout en ayant une distance au centre,

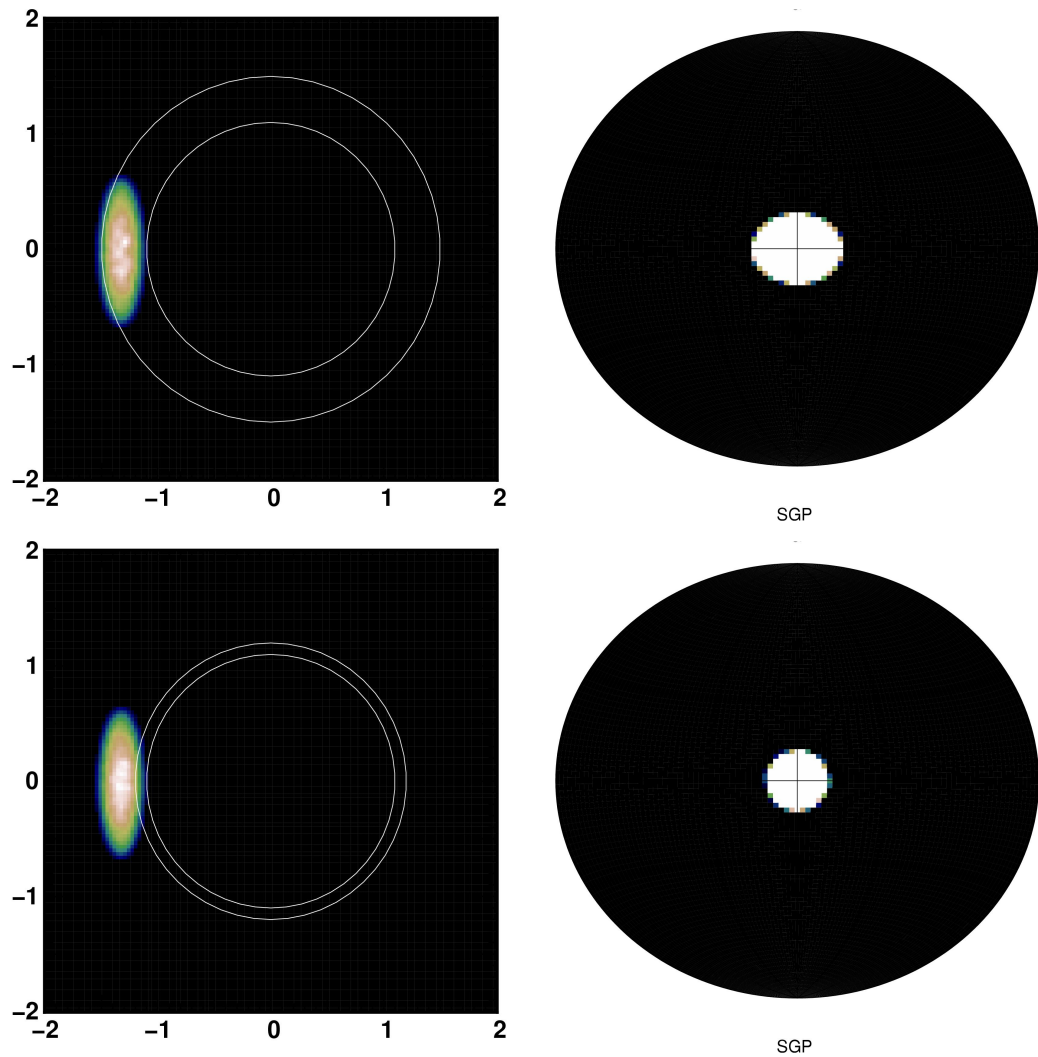


Figure 8.1: Effet d'échantillonnage sur la taille caractéristique des structures. Un échantillonnage temporel très espacé est équivalent à considérer les particules dans une coquille épaisse, un échantillonnage fin est équivalent à une coquille fine. A gauche, une vue projetée d'une ellipse passant au travers de la sphère de Viriel, à droite, la projection sur la sphère de la fraction de l'ellipse se trouvant dans la coquille. En haut l'échantillonnage temporel est à plus faible résolution que pour le cas présenté en bas.

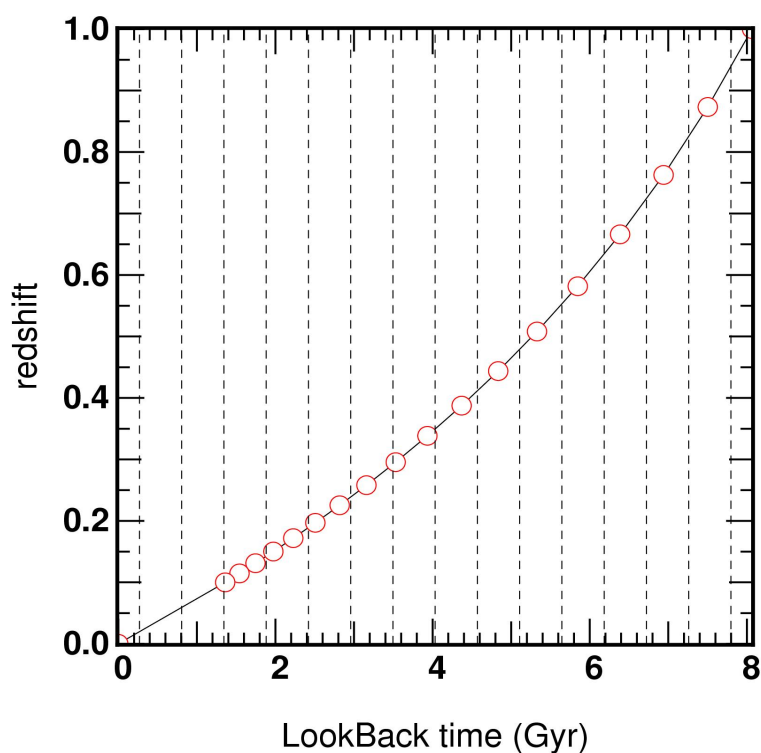


Figure 8.2: Redshift en fonction du temps (exprimé en milliards d'années). Les points symbolisent l'échantillonnage original des simulations. Les traits en tiretés montre l'échantillonnage régulier en temps qui a été retenu pour la mesure du potentiel et du terme source. Les trois derniers pas de temps suréchantillonne la distribution originale des instantanés, et ont été moyennés dans l'ensemble des résultats suivants.

$\mathbf{r}_i(t)$, supérieure à R_{200} :

$$\psi^e(\mathbf{r}, t) = \sum_i^N \psi^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i(t)). \quad (8.9)$$

L'indice i désigne une particule répondant aux critères de distance. Le potentiel d'une particule est celui d'une masse ponctuelle en $\psi^p(\mathbf{r}_i(t)) \sim 1/r$ et ceci constitue à nouveau une approximation du véritable potentiel utilisé lors de l'intégration. Toutefois au vu des distances considérées et compte tenu que le potentiel est par nature une fonction lisse, la masse ponctuelle constitue une approximation raisonnable. L'échantillonnage temporel en z est le même que celui utilisé pour le terme source et les positions des particules externes à ces instants sont déduites par interpolation en suivant la même procédure que pour $s^e(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}, t)$. Il est à noter que le volume de simulation traité par halo est important. Par conséquent, bien que conceptuellement plus simples que pour le terme source, les calculs de potentiels restent des opérations coûteuses en temps de calculs. Les passages du potentiel tridimensionnel $\psi^e(\mathbf{r}, t)$ au potentiel sur la sphère $\psi^e(\boldsymbol{\Omega}, t)$ est expliqué dans la section suivante.

8.3 Projections de la source et du potentiel

La description fluide des quantités $\psi^e(\boldsymbol{\Omega}, t)$ et $s^e(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}, t)$ conduit naturellement à une description en terme de projection sur des bases de fonctions. L'information statistique contenue dans le grand nombre de réalisations d'environnements se trouve naturellement compressée sous la forme de coefficients :

$$s^e(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(t) \phi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}), \quad (8.10)$$

$$\psi^e(\boldsymbol{\Omega}, t) = \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega}). \quad (8.11)$$

Les bases $\phi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v})$ et $\psi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega})$ étant données, la description statistique du terme source et du potentiel extérieur se résume à la description statistique des coefficients $c_{\mathbf{n}}(t)$ et $b_{\mathbf{n}}(t)$, qui dépendent uniquement du temps. Les bases de projection choisies sont :

$$\phi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}) = Y_{\ell m}(\boldsymbol{\Omega}) Y_{\ell' m'}(\boldsymbol{\Gamma}) g_{\alpha}(v), \quad (8.12)$$

$$\psi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega}) = Y_{\ell m}(\boldsymbol{\Omega}). \quad (8.13)$$

Les harmoniques sphériques $Y_{\ell m}(\boldsymbol{\Omega})$ constituent la base naturelle de projection des dépendances spatiales des champs sphériques $\phi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v})$ et $\psi^{[\mathbf{n}]}(\boldsymbol{\Omega})$. De la même façon, le vecteur vitesse \mathbf{v} est décrit dans une représentation sphérique (v, Γ_1, Γ_2) , où v désigne l'amplitude de la vitesse et (Γ_1, Γ_2) désignent les deux angles définissant la direction du vecteur (voir aussi la figure 1 de l'article ci-joint). La variation en angle $\boldsymbol{\Gamma}$ peut aussi être décrite en termes d'harmoniques sphériques tandis que la dépendance en amplitude est projetée sur une base de 25 gaussiennes $g_{\alpha}(v)$, régulièrement espacées entre $v = 0$ et $v = 1.5$ (en unité de vitesse circulaire), de moyennes μ_{α} et d'écart-type constant $\sigma = 0.03$. Comme expliqué dans l'article ci-joint et dans le chapitre 2, la mise de contrainte statistique sur s^e et ψ^e revient à caractériser les coefficients respectifs $c_{\mathbf{n}}(t)$ et $b_{\mathbf{n}}(t)$.

Pour le terme source, les coefficients $c_{\mathbf{n}}(t)$ sont obtenus en combinant les équations (8.10) et (8.8) :

$$c_{\alpha, \ell', m'}^{\ell, m}(t) = \left(\mathbf{G}^{-1} \sum_i^N w_i \frac{\mathbf{g}(v_i(t)) Y_{\ell m}^*(\boldsymbol{\Omega}_i(t)) Y_{\ell' m'}^*(\boldsymbol{\Gamma}_i(t))}{\Delta T R_{200}^2} \right), \quad (8.14)$$

où $G_{\alpha\beta} = \int dv v^2 g_{\alpha}(v) g_{\beta}(v)$ désigne la matrice des produits de gaussiennes centrée en v_{α} et v_{β} tandis que i désigne les particules impliquées dans le calcul.

En plus de permettre un découplage entre le temps et l'espace des phases, les coefficients $c_{\mathbf{n}}(t)$ permettent de retrouver les différents moments en vitesse ou en angles à partir des manipulations simples. Pour exemple, la décomposition en harmonique sphérique du flux de masse $\varpi_{\rho}(\boldsymbol{\Omega}, t) = \int d\mathbf{v} s^e$ s'écrit :

$$a_{\ell m}(t) \equiv \int d\boldsymbol{\Omega} Y_{\ell m}^*(\boldsymbol{\Omega}) \varpi_{\rho}(\boldsymbol{\Omega}, t) = \sqrt{4\pi} \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha}^2 + \sigma^2) c_{\alpha, 0, 0}^{\ell m}(t). \quad (8.15)$$

D'autres exemples sont donnés dans l'article ci-joint et dans son annexe, permettant de retrouver à partir de la connaissance de $\mathbf{c}(t)$:

- la densité de flux de masse $\varpi_{\rho}(\boldsymbol{\Omega}, t)$,
- la densité de flux de moment $\varpi_{\rho\mathbf{v}}(\boldsymbol{\Omega}, t)$,
- la densité de flux d'énergie $\varpi_{\rho\sigma^2}(\boldsymbol{\Omega}, t)$,
- la distribution de vitesse $\varphi(v, t)$,
- la distribution d'angles d'incidences $\vartheta(\boldsymbol{\Gamma}_1, t)$,
- le flux intégré de masse $\Phi(t)$.

A partir d'une mesure *unique*, toutes les mesures des différents moments peuvent se faire à posteriori, par manipulation des coefficients.

Pour le potentiel extérieur mesuré sur la sphère, le calcul des coefficients $b_{\mathbf{n}}(t)$ se fait directement à partir de la position des particules extérieures (Murali et Tremaine 1996):

$$b_{\ell m}(t) = -\frac{4\pi G m_p}{2\ell + 1} \sum_i Y_{\ell m}^*(\boldsymbol{\Omega}_i(t)) \frac{R_{200}^{\ell}}{r_i^{\ell+1}(t)}, \quad (8.16)$$

où i désigne une particule, sa position étant définie par r_i et $\boldsymbol{\Omega}_i$ et sa masse étant égale à m_p . Le potentiel tridimensionnel $\psi^e(\mathbf{r})$ à l'intérieur de la sphère de Viriel est relié aux coefficients $b_{\ell m}$ par :

$$\psi^e(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m} b_{\ell m} Y_{\ell m}(\boldsymbol{\Omega}) \left(\frac{r}{R_{200}} \right)^{\ell}, \quad (8.17)$$

où $r < R_{200}$. Un exemple de reconstruction du potentiel $\psi^e(r = R_{200}/2, \boldsymbol{\Omega})$ à partir de la mesure des coefficients $b_{\ell m}$ est donné dans la figure 8.3. Les résidus de reconstruction sont inférieur au pourcent pour $\ell_{\max} = 20$.

Connaissant la valeur de $c_{\alpha, \ell', m'}^{\ell, m}(t)$ et $b_{\ell m}(t)$ pour chaque halo, l'objectif est de mettre à profit l'échantillon de halos pour en extraire les distributions de ces coefficients.

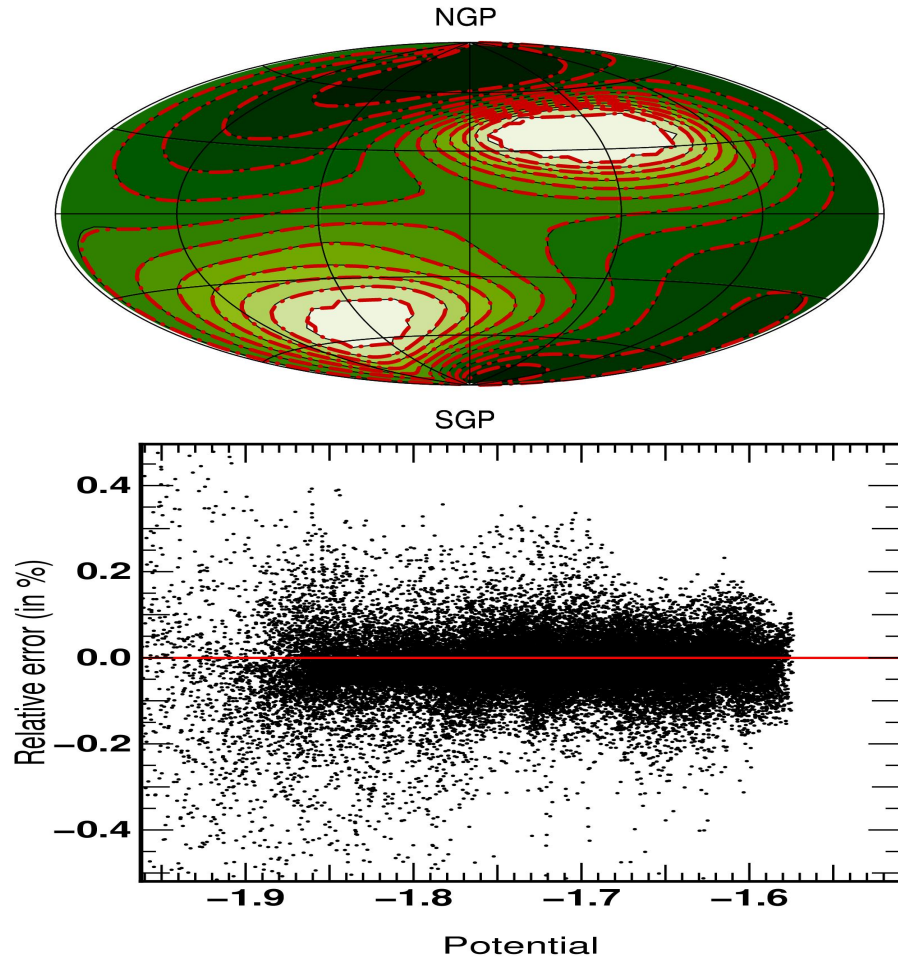


Figure 8.3: Exemple de reconstruction du potentiel à partir de l'équation (8.17). Les coefficients b_{ℓ_m} ont été calculés à partir de la mesure du potentiel à R_{200} , avec $\ell_{\max} < 20$, et permettent de reconstruire $\psi^e(r = R_{200}/2, \Omega)$. *En haut*: le potentiel mesuré dans le halo (carte verte) et la reconstruction (contours rouges). *En bas* : les résidus de la reconstruction. La reconstruction est précise à mieux du pourcent.

8.4 Glossaire sphérique

L'objectif de cette section est de définir et de décrire les principales quantités intervenant dans la caractérisation des champs ψ^e et s^e mesurés sur la sphère.

Corrélation angulaire

La fonction de corrélation angulaire $w(\theta)$ permet de remonter aux échelles angulaires caractéristiques d'un champ $X(\mathbf{\Omega}, t)$ mesuré sur la sphère. Par analogie avec le cas tridimensionnel, la fonction de corrélation à deux points est reliée au spectre de puissance angulaire C_ℓ^X par (cf. par exemple Peebles (1993)):

$$w(\theta, t) \equiv \langle X(\mathbf{\Omega}_1, t) X(\mathbf{\Omega}_2, t) \rangle = \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_\ell(t)^X P_\ell(\cos(\theta)), \quad (8.18)$$

où P_ℓ désigne le polynôme de Legendre d'ordre ℓ . Le champ sphérique est considéré comme isotrope en première approximation et la fonction de corrélation à deux points ne dépend par conséquent que de la distance angulaire θ entre les points de positions $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{\Omega} + \Delta\mathbf{\Omega}$.

Si l'on écrit la décomposition en harmoniques sphériques du champ X comme:

$$X(\mathbf{\Omega}, t) = \sum_{\ell m} x_{\ell m}(t) Y_{\ell m}(\mathbf{\Omega}), \quad (8.19)$$

alors, le spectre de puissance angulaire du potentiel s'exprime en fonction des coefficients $x_{\ell m}$ définis ci-dessus :

$$C_\ell^X = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m |x_{\ell m}|^2, \quad (8.20)$$

où l'on rappelle que l'échelle angulaire associée à ℓ est π/ℓ . Pour le potentiel extérieur ψ^e l'identification de $b_{\ell m}(t)$ à $x_{\ell m}(t)$ est immédiate, tandis que pour le terme source s^e , le passage de $c_{\alpha\ell'm'}^{\ell m}(t)$ aux coefficients $a_{\ell m}(t)$ de la densité de flux de masse ϖ_ρ par exemple, est donnée par l'équation 42 de l'article ci-joint.

Quelques échelles angulaire ℓ ont une signification particulière ou possède une dénomination spécifique dans le chapitre suivant. Une illustration de ces effets est donnée dans la figure 8.4. Ces échelles particulières correspondent aux harmoniques :

- $\ell = 0$: cette échelle angulaire correspond au *monopôle* sphérique. Ainsi, le coefficient x_{00} est directement relié à la valeur moyenne du champ X sur la sphère :

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{\Omega} X(\mathbf{\Omega}) = \frac{x_{00}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (8.21)$$

- $\ell = 1$: cette échelle est associée au *dipôle* du champ $X(\mathbf{\Omega})$. Les fluctuations à cette échelle sont associées à des modes de "décentrement", typiquement induit par des vitesses de déplacement global du référentiel de mesure ou par un référentiel non centré sur la distribution environnante de matière. Les mesures étant pratiquées dans le référentiel du centre de masse se déplaçant à la vitesse moyenne du halo, cette composante tend à être généralement faible.
- $\ell = 2$: cette échelle est associée au *quadrupôle* du champ $X(\mathbf{\Omega})$. L'intersection d'un ellipsoïde avec une sphère tend à induire un fort signal quadrupolaire, qui ressort dans certaines des mesures suivantes, dont celle du potentiel ψ^e .

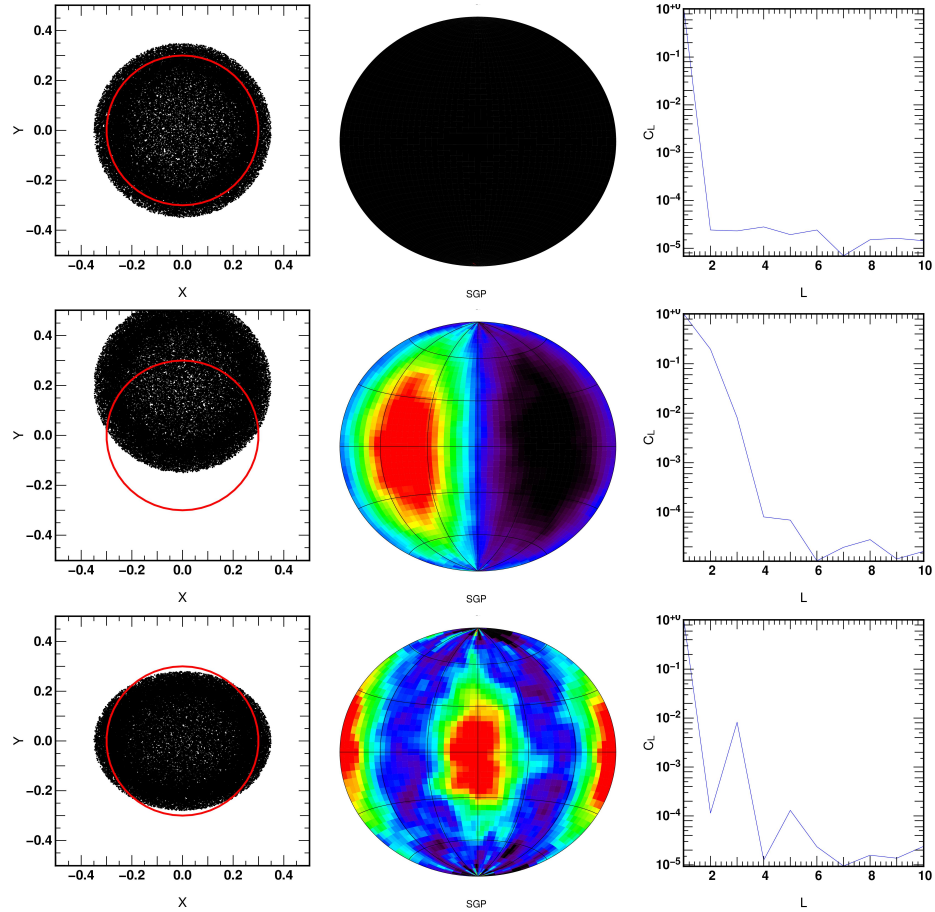


Figure 8.4: Illustration des effets liés aux harmoniques d'ordres $\ell = 0$ (en haut), $\ell = 1$ (au milieu) et $\ell = 2$ (en bas). Pour chacun des ordres sont représentés, la position des particules en XY ainsi que le rayon de mesure en rouge (colonne de gauche), la densité de points sur la sphère (colonne du milieu) et le spectre de puissance C_ℓ associé. Le mode $\ell = 0$ trace le monopole. Le mode $\ell = 1$ est associé au décentrement de la distribution de particules. Le mode $\ell = 2$ est lié à l'intersection d'une distribution non sphérique avec la sphère de mesure.

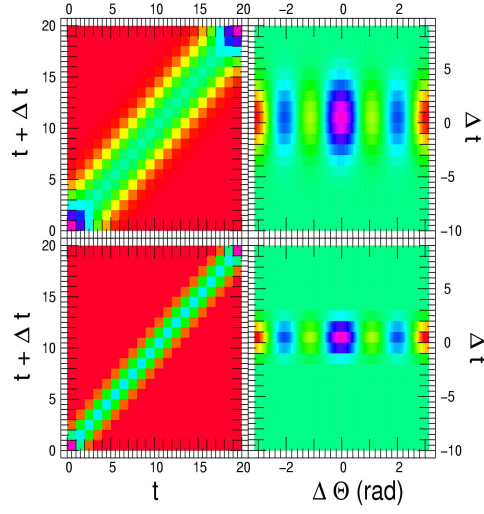


Figure 8.5: Exemples de fonctions de angulo-temporelles. Colonne de gauche : deux exemples de matrice $T_\ell^X(t, t + \Delta t)$ avec $\ell = 3$. Colonne de droite : les deux fonctions de corrélations angulo-temporelles $w^e(\Delta\Omega, t, t + \Delta t)$ correspondantes pour $t = 10$. Le temps de cohérence est donnée par l'extension du fuseau central dans la direction temporelle. Un temps de cohérence court se traduit par une matrice $T_\ell^X(t, t + \Delta t)$ fortement diagonale.

Corrélation angulo temporelle

Pour des champs isotropes, il est raisonnable de penser que la corrélation de deux points appartenant à deux champs X espacés dans le temps ne dépend que de la distance angulaire θ entre les deux points et non de leur position absolue. Par conséquent, pour deux temps t et $t + \Delta t$, la corrélation angulaire peut s'écrire :

$$w^e(\theta, t, t + \Delta t) \equiv \langle X(\Omega_1, t) X(\Omega_2, t + \Delta t) \rangle = \sum_{\ell} (2\ell + 1) T_\ell^X(t, t + \Delta t) P_\ell(\cos(\Delta\Omega)), \quad (8.22)$$

où $T_\ell^X(t, t + \Delta t)$ est défini par analogie comme un spectre de puissance angulaire à deux temps. On peut montrer que $T_\ell^X(t, t + \Delta t)$ est relié aux coefficients $x_{\ell, m}$ via :

$$T_\ell^X(t, t + \Delta t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m x_{\ell m}(t) x_{\ell m}^*(t + \Delta t). \quad (8.23)$$

Pour un échantillonnage temporel discret régulier, le spectre de puissance à deux temps $T_\ell^X(t, t + \Delta t)$ est décrit comme une matrice $[T_\ell^X]_{ij}$, où $t = t_i$ et $t + \Delta t = t_j$. La diagonale de cette matrice est le spectre de puissance angulaire "classique", $C_\ell^X(t)$. La distance à la diagonale d'un de ces éléments de matrice reflète la distance temporelle ΔT entre deux mesures du potentiel sur la sphère.

De façon intuitive, la corrélation entre deux mesures du potentiel doit décroître avec la distance temporelle (dans le cas stationnaire) : deux champs espacés d'une durée infinie ont toutes les chances d'être complètement décorrélés. En terme de matrice

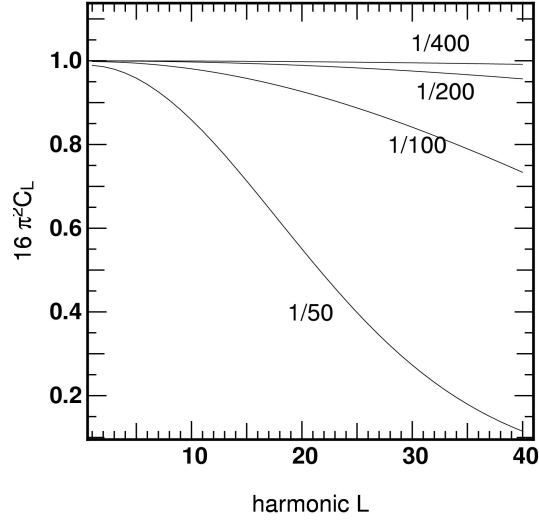


Figure 8.6: Illustration de l'effet de particule isolée. Spectre de puissance de cartes à un seul pixel non nul, pour des cartes 50x50, 100x100, 200x200 et 400x400. Le spectre de puissance d'un Dirac sur une carte sphérique est théoriquement constant.

$T_\ell^X(t, t + \Delta t)$, l'amplitude de ces éléments doit être d'autant plus forte que leur distance à la diagonale est faible. Une matrice $T_\ell^X(t, t + \Delta t)$ diagonale implique un temps de cohérence faible pour l'échelle angulaire ℓ . À l'inverse une matrice dont l'amplitude des éléments décroît lentement avec la distance à la diagonale implique une cohérence temporelle plus longue de l'échelle angulaire considérée. Une illustration de cet effet est donnée dans la figure 8.5.

Décomposition harmonique d'un Dirac

En représentation sphérique, la fonction de Dirac représentant un point localisé en Ω_i s'écrit :

$$\frac{\delta_D(\Omega - \Omega_i)}{\sin(\Omega_1)}. \quad (8.24)$$

Le spectre de puissance d'un point sur la sphère est alors donné par :

$$C_\ell^{\delta_D} = \frac{1}{(4\pi)^2}, \quad (8.25)$$

où toutes les échelles contribuent également aux fluctuations sur la sphère (voir aussi la figure 8.6). Par la suite, certains spectres de puissance présenteront des effets de plateau aux petites échelles. Ces spectres de puissance “constants” sont clairement les marqueurs d'effets de résolution induits par des particules isolées sur la sphère.

Le principe de la mesure de s^e et ψ^e décrit, reste à l'appliquer à des halos issus de simulations. Notamment, la mesure des coefficients et leur manipulation sur un halo typique fait l'objet d'une section (section 4) dans l'article ci-joint. Sur une autre échelle, le chapitre suivant présente les premières mesures du potentiel et du flux de masse sur un grand nombre de simulations.

9

Statistique des environnements : Mesures dans les simulations

Le chapitre précédent a décrit la procédure de mesure du potentiel extérieur et du terme source. La convergence statistique des caractéristiques de ces deux champs ne peut se faire qu'à l'aune d'un grand nombre de réalisations d'environnement de halos, d'où l'ambition de faire cette étude sur une quantité importante de simulations.

Une description de la source en terme de densités de flux

La description du terme source proposée dans le chapitre 8 est très générale, conduisant à synthétiser une grande quantité d'information. Par conséquent, le nombre de coefficients $c_{\alpha,\ell',m'}^{\ell,m}(t)$ à déterminer est très important. Ainsi, la décomposition du terme source sur plusieurs cas tests (voir par exemple [l'annexe A](#) ou [la partie 3.4 de l'article ci-joint](#)), ont conduit à considérer les ordres maximaux suivants pour les différents types de projections :

- $\ell_{\max} = 50$ pour les angles Ω décrivant les positions sur la sphère, i.e. 1326 coefficients à calculer,
- $\ell'_{\max} = 25$ pour les angles Γ décrivant l'orientation des vecteurs vitesse, i.e. 351 coefficients à calculer,
- $\alpha_{\max} = 25$ pour les amplitudes v , i.e. 25 coefficients à calculer.

Au final, le nombre total de coefficients $c_{\alpha,\ell',m'}^{\ell,m}(t)$ à mesurer s'élève à $\sim 10^7$! A supposer que les distributions de ces coefficients soient gaussiennes, i.e. entièrement caractérisé par leur deux premiers moments, la quantité de nombres caractéristiques à contraindre est doublée et le nombre brut de corrélations croisées, nécessaires à une bonne description des flux entrants (voir le chapitre 2), devient très important.

Le nombre de corrélations “pertinentes” est probablement réduit sous certaines hypothèses. Si la distribution angulaire du terme source est isotrope par exemple (ce qui

est une approximation raisonnable), les corrélations croisées mettant en jeu des coefficients d'indice m différents seront nulles. Néanmoins, il reste difficile de trouver à priori et de façon générale quels sont les couplages qui existent entre les différents indices : la vitesse dépend probablement de l'échelle caractéristique des objets accrétés (couplage α - ℓ), l'amplitude du vecteur vitesse est sûrement couplée avec son caractère radial (couplage α - ℓ'), une structure diffuse n'orbite pas de la même façon qu'une structure compacte (couplage ℓ - ℓ'). Il est ainsi difficile de savoir à l'avance quels sont les coefficients $c_{\alpha,\ell',m'}^{\ell,m}(t)$ et les corrélations associées qui seront nuls en moyenne et une mesure exhaustive de ces coefficients paraît inévitable.

Une manière d'atténuer cette difficulté consiste à exprimer le terme source en fonction de ses différents moments en vitesse. Si l'on imagine un terme source unidimensionnel et mono-flot, celui-ci peut s'écrire :

$$s^e(r, v, t) \sim \frac{\varpi_\rho}{\sqrt{2\pi\varpi_{\rho\sigma^2}/\varpi_\rho}} \exp\left(-\frac{(v - \varpi_{\rho v}/\varpi_\rho)^2}{2(\varpi_{\rho\sigma^2}/\varpi_\rho)}\right), \quad (9.1)$$

où le symbole $\varpi_X(r, t)$ désigne la densité de flux de la quantité advectée X et par exemple, $\varpi_{\rho v}(r, t) \equiv (\rho v_r v)(r, t)$ désigne le flux d'impulsion auquel est soumis un halo. Les trois premiers moment en vitesse de cette écriture du terme source sont :

$$\int dv s^e(r, v, t) = \varpi_\rho, \quad (9.2)$$

$$\int dv v s^e(r, v, t) = \varpi_{\rho v}, \quad (9.3)$$

$$\int dv (v - \varpi_{\rho v}/\varpi_\rho)^2 s^e(r, v, t) = \varpi_{\rho\sigma^2}. \quad (9.4)$$

Cette écriture du terme source via ses propres moments est donc cohérente avec les trois premiers moments de l'équation de Boltzmann, par construction, tout en reposant sur une hypothèse de gaussianité du champ de vitesse accrété.

Pour une représentation tridimensionnelle de la vitesse et si l'on représente la dépendance angulaire de $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ via sa décomposition en harmoniques sphériques, le terme source peut s'écrire sous la forme :

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\ell, m} Y_{\ell, m}(\mathbf{\Omega}) \frac{(2\pi)^{3/2} \varpi_{\rho, \ell, m}}{\det(\varpi_{\rho\sigma^2, \ell, m}/\varpi_{\rho, \ell, m})} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\mathbf{v} - \frac{\varpi_{\rho\mathbf{v}, \ell, m}}{\varpi_{\rho, \ell, m}}\right)^T \left(\frac{\varpi_{\rho\sigma^2, \ell, m}}{\varpi_{\rho, \ell, m}}\right)^{-1} \left(\mathbf{v} - \frac{\varpi_{\rho\mathbf{v}, \ell, m}}{\varpi_{\rho, \ell, m}}\right)\right], \quad (9.5)$$

où $\varpi_{X, \ell, m}(t)$ est la décomposition en harmonique sphérique de la densité de flux X mesurée sur la sphère. Les relations de passage des coefficients $\mathbf{c}(t)$ aux diverses densités de flux sont explicitées dans le texte de l'article ci-joint et dans ses annexes. Il faut noter que l'équation (9.5) ne constitue pas la seule forme possible et vise juste à illustrer la possibilité d'expression du terme source en fonction de ses moments successifs.

Une telle représentation possède les avantages de la compacité, puisque "qu'il suffit" de connaître 10 champs : ϖ_ρ (1 champ), $\varpi_{\rho\mathbf{v}}$ (3 champs) et $\varpi_{\rho\sigma^2}$ (6 champs) pour en déduire le terme source. Ainsi pour chaque halo, le nombre de coefficients à calculer se réduit à ~ 13000 , tous de types harmoniques, en supposant par exemple $\ell_{\max} = 50$ pour

les trois types de champs. Techniquement, les coefficients harmoniques des différentes densités de flux se ramènent à des opérations simples sur *des sous-ensembles* de coefficients $\mathbf{c}(t)$ (cf. les équations 42, D6, D11 de l'article ci-joint par exemple), réduisant le nombre de mesures à pratiquer. De plus, cette description en termes de moments est plus simple à appréhender : la quantité intermédiaire permettant de construire la source ne sont plus des “coefficients” mais des quantités physiques, dont l'interprétation des propriétés est plus directe que pour les $\mathbf{c}(t)$. La complexité du terme source n'est ainsi plus abordée directement via des quantités simples mais difficiles à interpréter (les coefficients) mais au travers de quantités de complexité intermédiaires, dont les propriétés physiques sont plus aisément abordables (les densités de flux). Enfin, il faut noter que la génération de sources s^e synthétiques peut se faire via les différents moments (voir aussi l'annexe F de l'article ci-joint).

Une hypothèse de forme pour $s^e(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}, t)$ ne permet toutefois pas de contourner complètement l'obstacle de la projection sur une base de fonction 5D (décrite dans l'équation (8.10)) et qui permettait un découplage total entre le temps et l'espace des phases. Autant les différentes densités de flux peuvent être obtenues des coefficients, autant l'obtention des coefficients à partir de l'équation (9.5) s'avère impossible à faire sans recourir à une projection explicite. Or le découplage temps-espace via les coefficients $\mathbf{c}(\mathbf{t})$ permet une expression plus simple des corrélations de la source dans une optique de propagation statistique et l'utilisation de la forme (9.5) nécessiterait une projection *à posteriori*. L'hypothèse de forme de l'équation (9.5) doit être vue comme une simplification de la mesure du terme source, repoussant “la complexité mathématique” induite par la projection à 5 dimensions au moment de l'application dynamique ultérieure.

En résumé, une description de la source en terme de moments constitue une alternative à une projection globale sur une base de fonction 5D. La source y est décrite en terme de quantités physiques et pratiquement, le nombre de coefficients $\mathbf{c}(\mathbf{t})$ à calculer est moindre. En revanche, elle nécessite une hypothèse de forme pour la source (voir eq. (9.5) par exemple) et n'est pas directement utilisable pour la propagation statistique, décrite dans le chapitre 2.

Présentation des mesures

Les constatations précédentes ont permis d'envisager un compromis entre une mesure exhaustive en termes de coefficients et une mesure représentative en termes de nombre de halos étudiés. Seul un sous-ensemble de coefficients $\mathbf{c}(t)$ a été extrait des simulations pour 16 000 halos jusqu'à présent. Ce sous-ensemble a été choisi de manière à pouvoir étudier les propriétés cinématiques de l'accrétion et la densité de flux de masse $\varpi_\rho(\boldsymbol{\Omega}, t)$, via les équations (42), (44), (46), (47), (50), (51), (D6) et (D11) de l'article ci-joint. D'un point de vue pratique, cette mesure aura permis de tester la mise en place de la mesure et de la projection du terme source. De plus, le flux de masse est une quantité pertinente en soi, avant d'être un moment du terme source et à fortiori avant d'être une composante de l'équation (9.5). Par exemple, van den Bosch (2002) et Wechsler et al. (2002) ont mis en évidence une histoire d'accrétion universelle via des approches Press-Schechter, montrant qu'une convergence statistique des propriétés de l'accrétion existe en dépit du caractère singulier de l'histoire de chacun des halos. Les propriétés cinématiques de l'accrétion permettent également d'étudier la nature des interactions subies par les halos simulés

(vitesse ou paramètre d'impact des satellites par exemple). Par exemple, l'existence de populations distinctes cinématiquement autour de quelques halos à haute résolution a été abordé par Gill et al. (2005) en les reliant aux objets ayant vu leurs trajectoires modifiées par un premier passage au travers du halo hôte (Gill et al. (2004)). L'étude des propriétés cinématiques de l'accrétion et de ϖ_ρ via le terme source permet d'aborder les même thématiques. En mettant à profit le grand nombre de halos, l'approche décrite ici a de plus pour objectif de mettre des contraintes quantitatives sur les propriétés de l'accrétion, tout en garantissant une certaine représentativité des différents types d'environnements. En parallèle, le champ de marée environnant de chacun de ces halos est contraint via les coefficients $\mathbf{b}(\mathbf{t})$. Les caractéristiques du potentiel extérieur permettent d'une part d'envisager une étude statistique de la réponse du halo dans le régime de pur forçage gravitationnel. D'autre part, elles fournissent un éclairage différent sur les propriétés de la matière accrétée qui se manifeste également via un champ de marée.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans un premier temps, les critères de sélection des halos sont décrits. Les mesures de corrélation du potentiel mesuré sur la sphère ainsi que son auto-corrélation angulo-temporelle sont exposés dans la section suivante. Les premières propriétés du terme source sont ensuite décrites : propriétés cinématique dans un premier temps, corrélations sur la sphère dans un deuxième temps. Enfin, une discussion sur les quelques points critiques apparus en cours d'analyse suit, ainsi que la conclusion.

9.1 Critères de sélection des halos.

Tous les halos détectés dans les simulations ne sont pas traités et seuls ceux répondant à certains critères sont retenus. Le premier critère est un critère de résolution : seuls les halos formés de plus de 1000 particules ($5 \times 10^{12} M_\odot$) à $z = 0$ sont étudiés. L'objet initial de ces mesures étant de servir d'entrée aux modèles de réponse dans un régime perturbatif, il apparaît clairement que toute une classe de halos subissent des interactions qui les font sortir de ce cadre. Les critères de sélection qui ont été appliqués sont :

- Le champ d'application est celui des halos de type galactiques ou des halos d'amas légers : seuls les halos de masse finale inférieure à $10^{14} M_\odot$ sont retenus.
- Une fraction des halos continuent de subir de fortes fusions à $z < 1$. Pour cette raison, les halos accrétant plus de la moitié de leur masse entre deux instantanés sont rejetés.
- Les halos accrétant plus de $5 \times 10^{12} M_\odot$ sont également rejetés, cette masse correspondant à celle des plus petits halos considérés.

Ces critères peuvent paraître hautement restrictifs, néanmoins seuls 20% des halos en moyenne sont rejetés par simulation. Une centaine de simulations seulement ont été complètement réduites pour ces mesures, donnant accès aux caractéristiques de 16 000 halos, de $z=1$ jusqu'à $z=0$. Bien que l'intervalle en redshift soit restreint, il demeure que l'examen des histoires d'accrétion des halos extraites des simulations montrent que ceux-ci subissent toujours des interactions avec leurs environnements (cf. figure 9.1). Clairement, ces interactions vont continuer à modéliser les propriétés du halo (et éventuellement de son disque), validant à posteriori la philosophie de l'approche développée dans ce manuscrit.

A nouveau, ces critères de sélection se justifient par la volonté de se restreindre au régime de faibles accrétions. Toutefois, cette “simplification” à priori implique des biais qui s’ajoutent à ceux intrinsèques au type de simulation utilisé ici. Ces biais sont évidents et décrit ci-dessus : halos de faibles masse à $z=0$, histoire d’accrétion “calme” et plafond absolu de masse accrétée. En revanche, l’impact de ces critères de sélection sur les mesures est plus difficile à prévoir. Par exemple, la “granulosité” de la densité de flux de masse ϖ_ρ est dépendante de la masse du halo considéré, chose non évidente à priori (voir aussi la figure 11 de l’article ci-joint). La quantification de tels biais ne peut se faire que par une étude exhaustive et minutieuse de l’impact des différents choix ad hoc qui ont été faits. Le développement à proprement dit aura clairement primé sur l’étude exhaustive des biais, l’objet à court terme des travaux présents étant l’évaluation de la faisabilité de la mesure des flux, la mise en lumière des points délicats et l’implémentation de la chaîne de mesure. A la lumière des différents résultats décrits dans le chapitre suivant, il apparaît clairement qu’une telle étude devra être faite à l’avenir, afin de garantir une meilleure contrainte de la statistique des flux.

9.2 Mesures statistiques sur le potentiel extérieur

Variation du potentiel moyen

Le potentiel extérieur est entièrement tracé par la décomposition harmonique $b_{\ell m}(t)$ de ses fluctuations sur la sphère de Viriel. Afin de traiter des quantités sans dimensions, il est d’usage pour les mesures sur la sphère de ne pas considérer la décomposition brute de $\psi^e(\boldsymbol{\Omega}, t)$ mais plutôt celle du contraste du potentiel mesuré sur la sphère :

$$\delta_{[\psi^e]} = \frac{\psi^e(\boldsymbol{\Omega}, t) - \bar{\psi}^e}{\langle \bar{\psi}^e \rangle}, \quad (9.6)$$

où $\bar{\psi}^e$ est le potentiel moyenné sur toutes les directions et où $\langle \cdot \rangle$ désigne le mode (ou valeur la plus probable) de la distribution. La décomposition harmonique $\tilde{b}_{\ell m}(t)$ du contraste de potentiel est reliée aux coefficients $b_{\ell m}(t)$ par :

$$\tilde{b}_{\ell m}(t) \equiv \sqrt{4\pi} \left(\frac{b_{\ell m}(t) - \delta_{\ell 0} b_{00}(t)}{\langle b_{00}(t) \rangle} \right). \quad (9.7)$$

La quantité $b_{00}(t)$ est reliée au potentiel moyenné sur la sphère par :

$$\bar{\psi}^e = \frac{b_{00}(t)}{\sqrt{4\pi}}, \quad (9.8)$$

et donc au potentiel tridimensionnel moyen dans la sphère ayant servi à calculer les coefficients, via l’équation (8.17). Le choix d’utiliser la valeur la plus probable $\langle b_{00}(t) \rangle$ au lieu de $b_{00}(t)$ permet d’avoir une même normalisation pour tous les halos. Toutefois, le choix de l’une ou l’autre des conventions ne modifie pas significativement les résultats, le potentiel moyenné dans une sphère de 4 Mpc étant sensiblement le même quel que soit le halo considéré. Seul les gradients de potentiels sont pertinents d’un point de vue dynamique et la quantité $b_{00}(t)$ ne comporte par conséquent que peu d’informations physiques. Néanmoins, son rôle dans la normalisation des harmoniques du potentiel impose de caractériser ce coefficient.

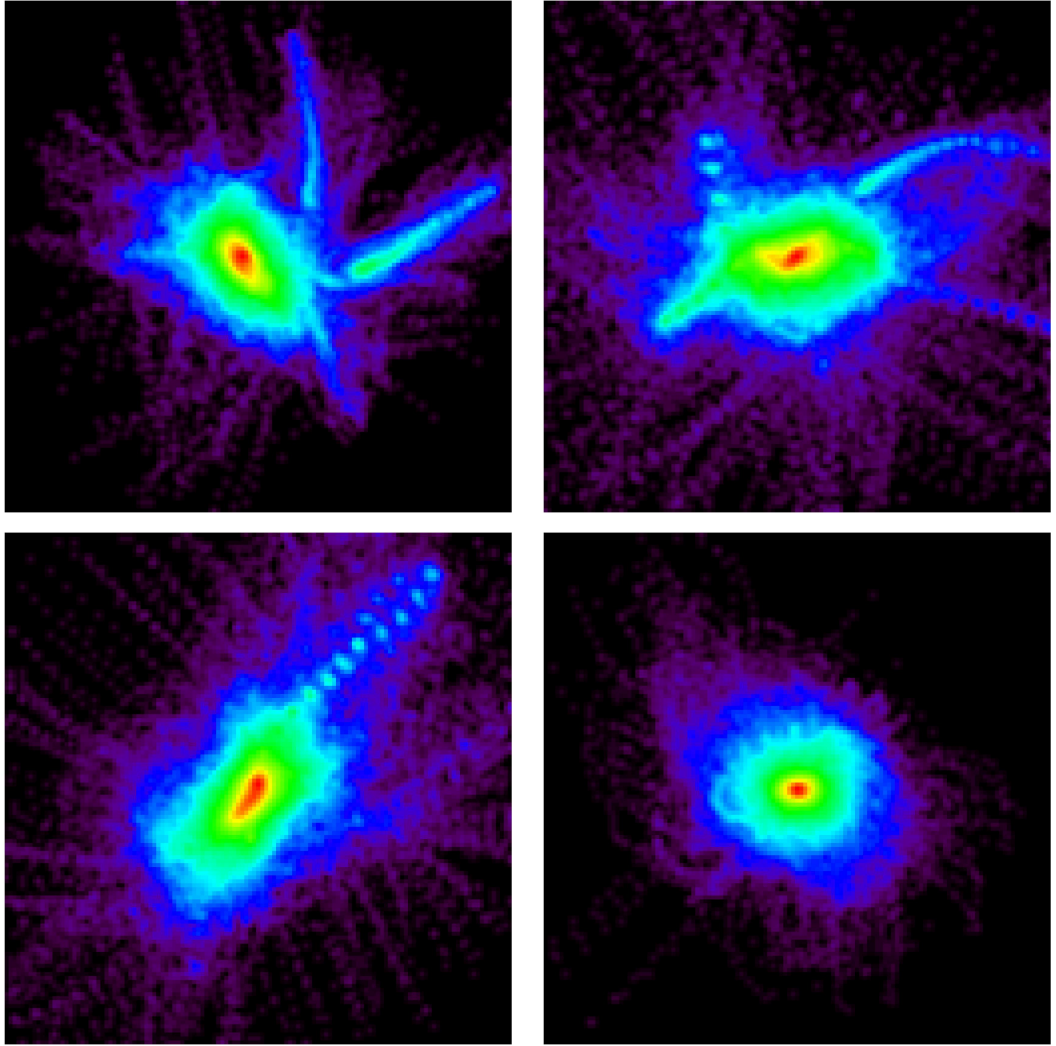


Figure 9.1: Quatre exemples d'histoire d'accrétion de halos satisfaisant les critères décrits dans la section 9.1. Ces quatre images ont été formées par superposition des particules aux différents instantanés entre $z=1$ et $z=0$. Seules les particules finissant dans le halo à $z=0$ ont été utilisées. A chaque instant, les positions ont été centrées sur les positions du plus gros progéniteur du halo final.

La distribution des coefficients $b_{00}(t)$ est ajustée par une loi Log-Normale. L'évolution temporelle du mode $\langle b_{00}(t) \rangle$ de cette loi est donnée dans la figure 13 de l'article ci-joint. La baisse au cours du temps peut s'expliquer comme un effet de la mesure. Les particules utilisées pour le calcul sont celles contenues dans une sphère de volume physique fixé. Sous l'effet de l'expansion, une fraction des particules quittent ce volume. La baisse du coefficient au cours du temps ne fait que refléter la baisse de la densité moyenne dans cette sphère.

9.2.1 Corrélations angulaires

La quantité $C_\ell^{\psi^e}$ est mesurée pour chaque halo, et la distribution mesurée est ajustée par une loi log-Normale, à chaque pas de temps et pour chaque ℓ . L'évolution du mode $\langle C_\ell^{\psi^e} \rangle$ au cours du temps est présentée dans la figure 22 de l'article ci-joint. La forme du spectre de puissance varie peu au cours du temps et est clairement dominée par les grandes échelles angulaires. Cette tendance est attendue, le potentiel étant une fonction très lisse de la densité (tel qu'illustré par les cartes sphériques de potentiel et de densité de flux de la figure 9.2). Deux régimes d'évolution temporelle existent. L'un implique l'augmentation de la contribution des fluctuations à petite échelle $\ell > 5$ au cours du temps. L'autre est la "non-évolution" des contributions des fluctuations à grande échelle ($\ell = 2$ essentiellement).

Evolution des petites échelles

Les fluctuations à petite échelles sont les plus susceptibles de rendre compte du potentiel créé par les satellites. Compte tenu de l'augmentation de la contribution à grand ℓ relativement aux fluctuations à grande échelle, ceci implique que les fluctuations deviennent plus "denses" au cours du temps. Cette évolution suggère donc que les fluctuations de potentiel mesurées à bas redshifts sont induites par des objets plus petits qu'en des temps reculés, les objets légers ayant tendance à être plus denses que les objets massifs. Néanmoins, cette augmentation des ordres ℓ élevés peuvent être également expliquées par des effets de résolutions : si la contribution de particules isolées sur la sphère devient plus importante, le même effet est attendu. Cette possibilité sera à nouveau évoquée dans la section concernant la densité de flux de masse.

Evolution des grandes échelles

D'autre part, on est tenté d'associer la stationnarité quadrupolaire ($\ell = 2$) du potentiel à la distribution de matière à grande échelle. Par exemple, la distribution des halos voisins fait que tout halo baigne forcément dans un champ de marée qui ne soit pas lié à son proche environnement. Ce champ de marée "cosmique" induit par cette distribution doit être stationnaire en première approximation car les durées associées à son évolution sont supposément longues (en tous cas supérieurs à l'échantillonnage temporel employé ici, $\sim 5 \times 10^6$ ans). Dans le même temps, la distribution de matière en périphérie des halos n'est pas sphérique mais triaxiale. Par exemple, l'ellipsoïde des halos tend à être aligné avec l'ellipsoïde des distributions environnantes de satellites, suggérant d'une part que l'accrétion d'objet est anisotrope et d'autre part que la triaxialité est induite par cette configuration de l'accrétion (Tormen (1997)). Dans le contexte des mesures à R_{200} ,

l'intersection d'une telle distribution non-sphérique avec la sphère de mesure induirait naturellement le quadrupole mesuré.

La mesure du quadrupole est-elle une mesure de la distribution de matière à grande échelle ou de la conséquence de cette distribution? Dans une approche analytique de la dynamique du halo, seule la première proposition est satisfaisante. Si le quadrupole est une mesure de l'élongation du halo, le risque est de calculer la réponse du halo à sa propre distribution de matière et non au potentiel généré par l'environnement. La question n'a pas été abordée plus en avant durant la thèse, néanmoins elle pose d'emblée les difficultés liées à l'interprétation du point de vue développé dans ce manuscrit.

9.2.2 Corrélations angulo-temporelles

Les différences de comportement temporel entre les échelles peuvent également être abordées via la mesure des corrélations angulo-temporelles $\langle \psi^e(\mathbf{\Omega}_1, t) \psi^e(\mathbf{\Omega}_2, t + \Delta t) \rangle$. La mesure de la fonction de corrélation angulo-temporelle ainsi que des matrices $T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t)$ associées est donnée dans les figures 23 et 24 de l'article ci-joint. Une analyse rapide des fonctions de corrélations à deux points indique clairement que les grandes échelles angulaires dominent le potentiel mesuré sur la sphère. Ces grandes échelles, $\theta \sim \pi/2$, sont associées à des temps de cohérence longs, caractérisés par les isocontours qui ne se referment que marginalement dans les cartes de $w^e(\theta, t, t + \Delta t)$. A priori, cette longue cohérence n'était pas établie : un champ quadrupolaire de forte amplitude à tous les instants (comme mesuré via $C_\ell^{\psi^e}$) mais dont l'orientation changerait violemment avec le temps, i.e. sans cohérence, aurait également été possible.

Temps de cohérence échelle par échelle

L'examen des matrices de corrélations indiquent que l'existence d'un temps de cohérence long n'est plus vrai pour les échelles angulaires plus modestes. De ces matrices, deux effets peuvent être observés. Le premier indique que le temps de cohérence est d'autant plus long que l'échelle angulaire considérée est grande. Les petites échelles ont des temps de cohérence courts, ce qui est attendu puisque des objets plus compacts doivent traverser plus rapidement la sphère de Viriel que des objets étendus. D'autre part, le temps de cohérence caractéristique échelle ℓ par échelle ℓ indique qu'au premier ordre toutes les échelles (sauf $\ell = 4$) présentent un comportement stationnaire dans le temps, leurs temps de cohérence ne présentant pas d'évolution significative au vu des barres d'erreurs (voir la figure 25 de l'article ci-joint). Ceci constitue une information de premier ordre dans la perspective de régénération du potentiel extérieur puisque que cela implique qu'aucune évolution séculaire ne doit être prise en compte pour ces harmoniques. Seule l'échelle angulaire $\ell = 4$ présente une évolution temporelle significative à 3σ (ainsi que le mode $\ell = 5$ mais de façon plus marginale). On reviendra sur cette variation dans la section suivante.

Corrélation angulo-temporelle sans quadrupôle

Afin de se focaliser sur les temps de cohérence des petites échelles angulaire, la fonction de corrélation angulo-temporelle a été reconstruite en supprimant les composantes dipolaires $\ell = 1$ et quadrupolaires $\ell = 2$. Contrairement à la fonction de corrélation

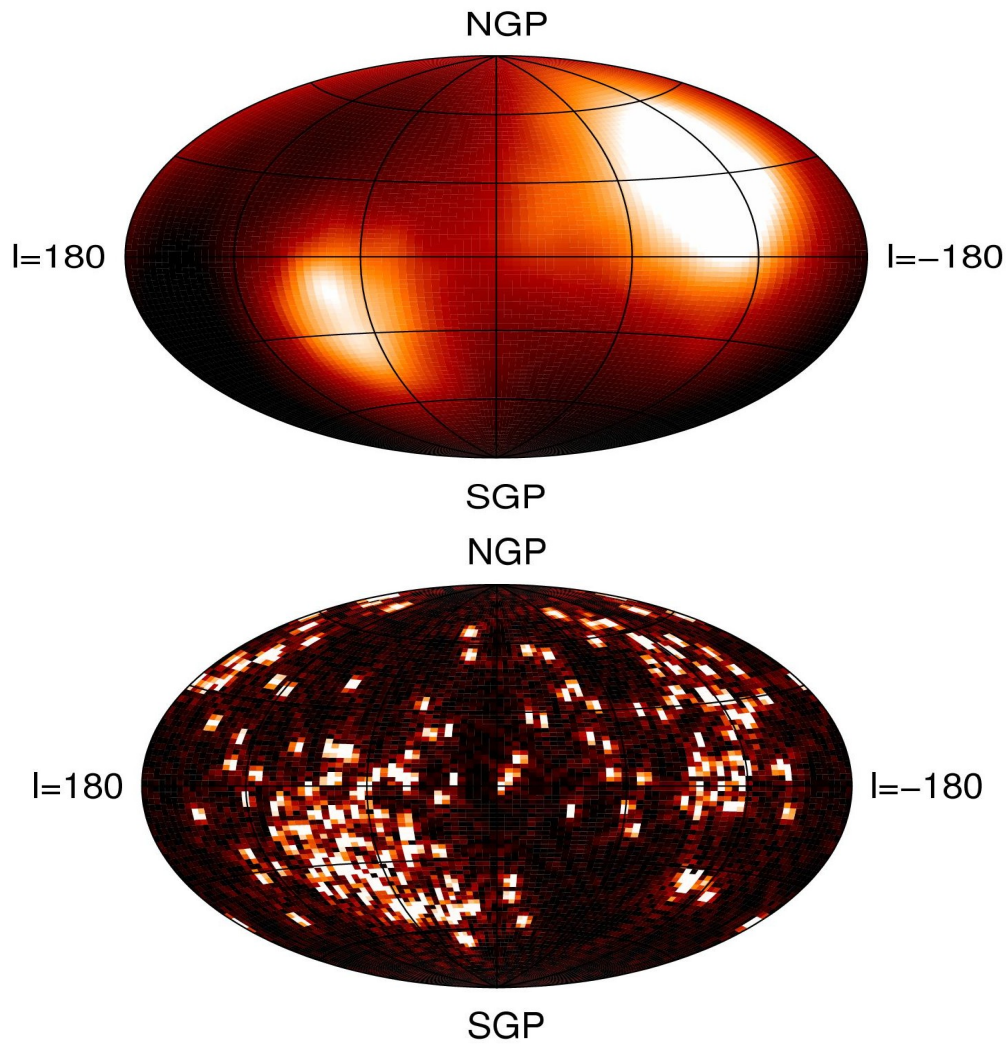


Figure 9.2: Comparatif entre le flux de masse (en bas) et le potentiel extérieur (en haut) mesuré à la sphère de Viriel du halo. Comme attendu, le potentiel est une fonction lisse comparée à la densité de flux. Le potentiel est dominé par les grandes échelles avec une forte composante quadrupolaire.

précédente, les isocontours de $w^e(\theta, t, t + \Delta t)$ se referment autour de $\Delta t = 0$. Cela confirme que les temps de cohérence sont finis, une fois les contributions des grandes échelles retirées.

A nouveau, l'on peut extraire de cet ajustement l'évolution du temps de cohérence des structures, donnée dans la figure 27 de l'article ci-joint pour différents ordres harmoniques ℓ minimaux avec lesquels $w^e(\theta, t, t + \Delta t)$ est construite. Ce temps de cohérence tend à diminuer avec le temps, quel que soit l'ordre minimal utilisé. L'évolution est la plus forte pour $\ell_{\min} = 4$ avec une baisse de 2.5 Gyr jusqu'à 1.3 Gyr. En revanche, les variations mesurées du temps de cohérence pour d'autres harmoniques minimales sont plus faibles que la résolution temporelle de la mesure (~ 0.5 Gyr) et doivent donc être attribuées aux fluctuations induites par la procédure d'ajustement.

L'évolution temporelle du temps de cohérence pour $\ell_{\min} = 4$ est difficile à interpréter. Ainsi, le fait qu'il y ait une évolution significative, de l'ordre de 1 Gyr, indique que les fluctuations correspondant à cette harmonique ne peuvent être induits uniquement par un effet d'élongation du halo. Ce dernier est supposé hautement stationnaire et l'on s'attendrait à une cohérence du même ordre de grandeur que celle du quadrupole $\ell = 2$, i.e. quasiment 8 milliards d'années. L'absence de stationnarité conduit à attribuer le temps de cohérence de ces échelles angulaires aux objets accrétés par le halo.

Une variation de la longueur de cohérence ?

Cette interprétation pose deux problèmes a priori. Le premier est le fait que l'échelle $\ell = 4$, correspond à une échelle considérable de 45 degrés sur la sphère. Il n'est pas clair que des objets soient en mesure de créer des fluctuations de potentiel de cette taille, même en considérant que le potentiel est une fonction plus lisse que la densité. Cette constatation va de pair avec la mesure du temps de cohérence associé de 2.3 Gyr à haut redshift ce qui est une "longue" durée pour un temps de traversée de la sphère.

Cette difficulté à interpréter ce résultat doit être ramenée à la constatation suivante : on s'attend à ce que chaque harmonique présente un temps de cohérence *donné* au cours du temps. Pour une vitesse d'accrétion constante, une échelle ℓ peut être ramenée à une taille caractéristique tridimensionnelle, ce qui implique un temps de cohérence fixé pour cette échelle. De fait cette baisse de 1 Gyr du temps de cohérence implique soit 1) que l'hypothèse de vitesse constante est fautive, soit 2) qu'il existait un recouvrement angulaire des fluctuations *successives* associées à $\ell = 4$ à plus haut redshift. Suivant la première hypothèse, la variation du temps caractéristique devrait se manifester à toutes les échelles. Or cette variation n'est pas détectée à la résolution de nos mesures. La seconde hypothèse est cohérente avec un flux d'objets provenant grossièrement de la même direction du ciel et dont la fréquence d'accrétion est suffisamment importante pour conduire à un recouvrement des fluctuations à cette échelle (voir aussi la figure 9.3). Cette hypothèse est séduisante du point de vue de l'anisotropie d'accrétion et du point de vue de l'évolution de l'accrétion. Il faut toutefois préciser que $\ell = 4$ correspond à une échelle angulaire conséquente (45 degrés sur la sphère) et si cette variation est imputable à l'existence de directions privilégiées, ces directions seraient définies de façon "large". De fait, un comparatif de cette mesure fluide avec une mesure basée sur l'identification des satellites est nécessaire, pour pouvoir trancher quant à la nature de ces fluctuations de potentiel et à l'évolution de leurs temps caractéristiques.

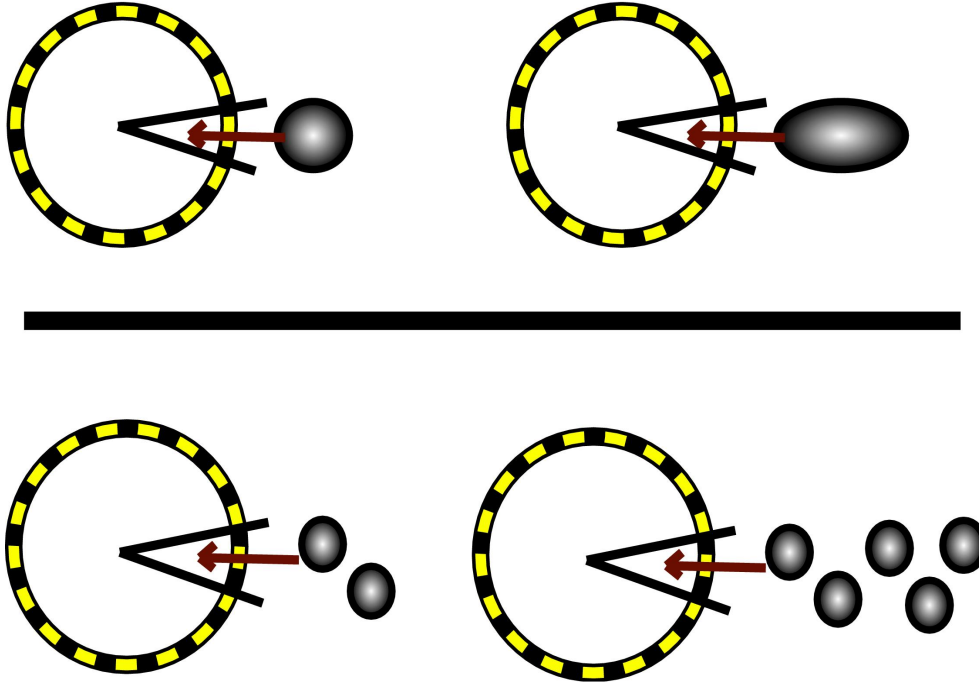


Figure 9.3: Comment faire varier le temps de cohérence des structures pour une échelle angulaire donnée ? Première possibilité, l’extension radiale des structures se modifie au cours du temps (*en haut*). Cette variation de l’extension radiale reste néanmoins difficilement explicable de façon statistique. Deuxième possibilité, l’échelle angulaire correspond à un train de structures, dont la “longueur” varie au cours du temps (*en bas*). Cette possibilité implique l’existence d’une direction d’incidence privilégiée.

En résumé, le potentiel extérieur ψ^e apparaît comme essentiellement stationnaire et dominé par un quadrupôle. Néanmoins, il semble que des échelles angulaires plus faibles possèdent leur propres temps de cohérence. En particulier le mode $\ell = 4$ voit son temps caractéristique décroître au cours du temps, suggérant que celui-ci est associé au champ de marée d’objets dont le recouvrement “temporel” varie au cours du temps.

9.3 Statistiques à 1 point de la source

La caractérisation complète de la fonction source est une tâche lourde et complexe. Les premiers résultats sont décrits dans cette section et concernent essentiellement les distributions moyennes qui peuvent être extraites de s^e , via ses moments d’ordre 1. On décrira dans un premier temps l’évolution du flux de masse accrété par les halos. Puis, dans un second temps, les propriétés cinématique de la matière accrétée sont explorées. Les premiers résultats sur les statistiques d’ordre deux de ϖ_ρ sont présentés dans la section suivante.

9.3.1 Flux de masse moyen

Le flux de masse accrété par un halo, $\Phi^M(t)$, est relié au terme source par :

$$\Phi^M(t) = \int d\mathbf{v} d\Omega s^e(\Omega, \mathbf{v}, t), \quad (9.9)$$

où $\Phi^M(t)$ est exprimé comme une masse par unité de surface et par unité de temps. Cette quantité est mesurée pour chacun des halo, via les coefficients harmoniques $a_{00}(t)$ de la densité de flux de masse ϖ_ρ , eux même reliés aux coefficients $c_{\alpha, \ell m}^{\ell' m'}(t)$ (voir dans l'article ci-joint le détail de la mesure). La pic de distribution de $\Phi^M(t)$ est bien décrite par une distribution gaussienne et la valeur la plus probable du flux de masse $\langle \Phi^M(t) \rangle$ est donnée par la moyenne de cette distribution.

Evolution temporelle du flux

L'évolution de $\langle \Phi^M(t) \rangle$ est donnée dans la figure 14 de l'article ci-joint. Globalement, le flux de masse diminue au cours du temps, partant d'une valeur moyenne de $\sim 130 M_\odot/\text{Myr}/\text{kpc}^2$ à $t=8$ Gyr pour finir à $\sim 10 M_\odot/\text{Myr}/\text{kpc}^2$ à $t=0.8$ Gyr. Au vu de la définition du terme source, ce flux est un flux net, où la matière éjectée à été retranchée à la matière accrétée. Clairement, les halos tendent à accrêter plus de matière qu'ils n'en rejettent, sur l'ensemble des redshifts étudiés ici. Compte tenu de ce flux, un halo de $10^{13} M_\odot$ accrète en moyenne $\sim 2 \cdot 10^{12} M_\odot$ sur les 8 derniers Gyrs, ce qui est cohérent avec le régime de faible accrétion dans lequel l'on se place. Deux effets peuvent être notés sur la courbe d'évolution de l'accrétion. A bas redshift, la courbe subit une inflexion. A ces instants, le rayon de mesure coïncide avec le vrai rayon de Viriel : à cette distance, la fraction de matériau "virielisée" appartenant au halo est plus importante qu'aux temps précédents. En particulier la fraction de matériau éjecté augmente au cours du temps, conduisant à une baisse du flux net.

Pour des redshifts proches de 1, l'évolution de l'accrétion semble subir une autre inflexion, tel un plateau de saturation. Plusieurs effets peuvent rendre compte de ce comportement. D'une part les halos sélectionnés ici répondent à certains critères (rappelés dans la section 9.1), exigeant en particulier une histoire d'accrétion "calme" au cours du temps. Par conséquent cela exclut d'emblée des halos subissant de fortes accrétions. Pour illustrer cet effet, la figure 9.4 montre l'évolution du taux d'accrétion pour trois classes de masses finales. L'effet de saturation est quasi inexistant pour les halos légers et important pour les halos massifs. Ces derniers étant plus susceptibles par définition de subir de fortes accrétions (en valeur *absolue*), cette population (et donc les taux d'accrétion mesurés) sont davantage affectés par les biais de sélections. D'autre part, l'évolution de $\Phi(t)$ donnée en figure 14 de l'article ci-joint est celle du mode de la distribution des taux d'accrétions. Si la distribution de ces taux est bien représentée par une loi gaussienne à bas redshifts, celle-ci développe une queue de distribution faible mais bien réelle pour des redshifts proches de 1 (voir la figure E4 de l'article ci-joint). En d'autres termes, la présence d'un mode "constant" à ces époques ne préjuge pas de l'existence d'événements exceptionnels, dont la fréquence n'a pas de raison, à priori, d'atteindre un plafond aussi franc. Ainsi, la figure 9.4 représente la "moyenne" du taux d'accrétion pour trois classes de masses finales. Cette quantité statistique est plus sensible aux événements rares que le mode de la distribution. L'effet de saturation aux

grandes masses est plus faible que celui observé précédemment, indiquant que le plafond atteint par le taux d'accrétion est imputable en partie à l'utilisation du mode comme grandeur caractéristique, en plus des biais associés aux critères de sélection.

Histoires d'accrétion de masse

Le flux de masse mesuré a été comparé aux *histoires d'accrétion de masse* ou MAH, $\Psi(t)$, telles que définies par van den Bosch (2002) :

$$\Psi(t) = \frac{M(z)}{M(z=0)}. \quad (9.10)$$

En utilisant un formalisme Press-Schechter étendu, van den Bosch trouve que les MAH peuvent être ajustée par la loi donnée par l'équation 56 dans l'article ci-joint. Cette loi ne dépend que de la classe de masse considérée. Ces même MAH peuvent être obtenues à partir des mesures précédentes en intégrant $\Phi(t)$ au cours du temps. La comparaison pour trois classes de masses différentes est donnée par la figure 29 de l'article ci-joint.

Les mesures faites à partir de $\Phi(t)$ sont qualitativement en accord avec les ajustement suggérés par van den Bosch (2002). La forme des courbes d'évolutions sont similaires aux modèles tandis que les positions relatives des trois mesures sont similaires aux positions relatives des trois modèles suggérés par l'auteur. Cependant les mesures sont en désaccord quantitatifs avec les modèles. En particulier, les mesures surestiment la masse des halos à chaque instant comparé au modèle. Plusieurs explications peuvent être avancées. Le halos qui ont servi à la mesure répondent à certains critères portant sur la quantité de masse qu'ils peuvent accréter, impliquant que les histoires de formation de la population retenue n'est pas forcément représentative de celles générées par le formalisme Press-Schechter. De plus, la méthode de reconstruction de la masse du halo retenue ici tend naturellement à surestimer la masse réelle du halo. Ainsi, la matière accrétée à R_{200} est instantanément ajoutée à la masse du halo, alors qu'il existe un délai entre l'instant d'accrétion au rayon de Viriel et l'assimilation à proprement dite de la matière par le halo. De plus, il est possible qu'une fraction de la matière accrétée au rayon de Viriel ne parvienne jamais au halo. Enfin, van den Bosch (2002) note un désaccord de même nature entre les simulations et son modèle, qu'il impute à l'utilisation d'un modèle d'effondrement sphérique. En plus des biais introduits par les critères de sélection et des approximations induites par la méthode de reconstruction des masses, il est probable qu'une part du désaccord constaté ne fait que refléter cette difficulté initiale du modèle à reproduire les mesures dans les simulations.

9.3.2 Distribution des vitesses

La distribution des vitesses, $\phi(v, t)$, de la matière accrétée est reliée à la fonction source par :

$$\varphi(v, t) = v^2 \int d\Gamma d\Omega s^e(v, \Omega, \Gamma, t). \quad (9.11)$$

Celle ci s'exprime aisément à partir des coefficients $c_{\alpha,0,0}^{0,0}(t)$ et le passage des coefficients à la distribution des vitesses est décrit en détail dans l'article ci-joint. Les vitesses sont exprimées en unités de la vitesse circulaire au rayon de Viriel. La distribution des coefficients $c_{\alpha,0,0}^{0,0}(t)$ est ajustée par une gaussienne, permettant de déduire l'évolution

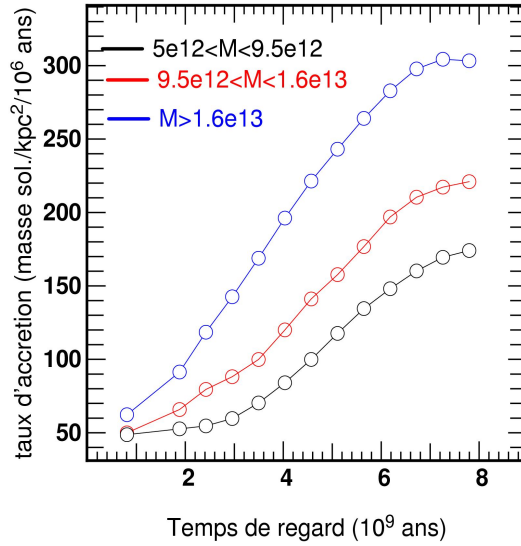
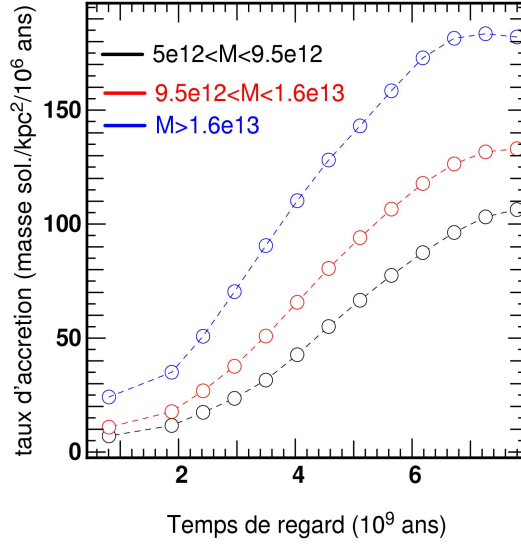


Figure 9.4: Taux d'accrétion au cours du temps pour trois classes de masses de halos. Les masses sont mesurées à $z = 0$. En haut, évolution du mode de la distribution des taux d'accrétion. Les grandes masses présentent un plafond d'accrétion à $t \sim 7$ milliards d'années plus important que les halos légers, suggérant un biais induit par les critères de sélection sur l'accrétion. En bas, l'évolution de la moyenne de la distribution des taux d'accrétion. La moyenne est plus sensible que le mode aux événements rares. La saturation à $z \sim 1$ est légèrement plus importante dans le cas du mode, indiquant que le plateau est en partie imputable au choix de cette grandeur statistique pour caractériser le taux moyen.

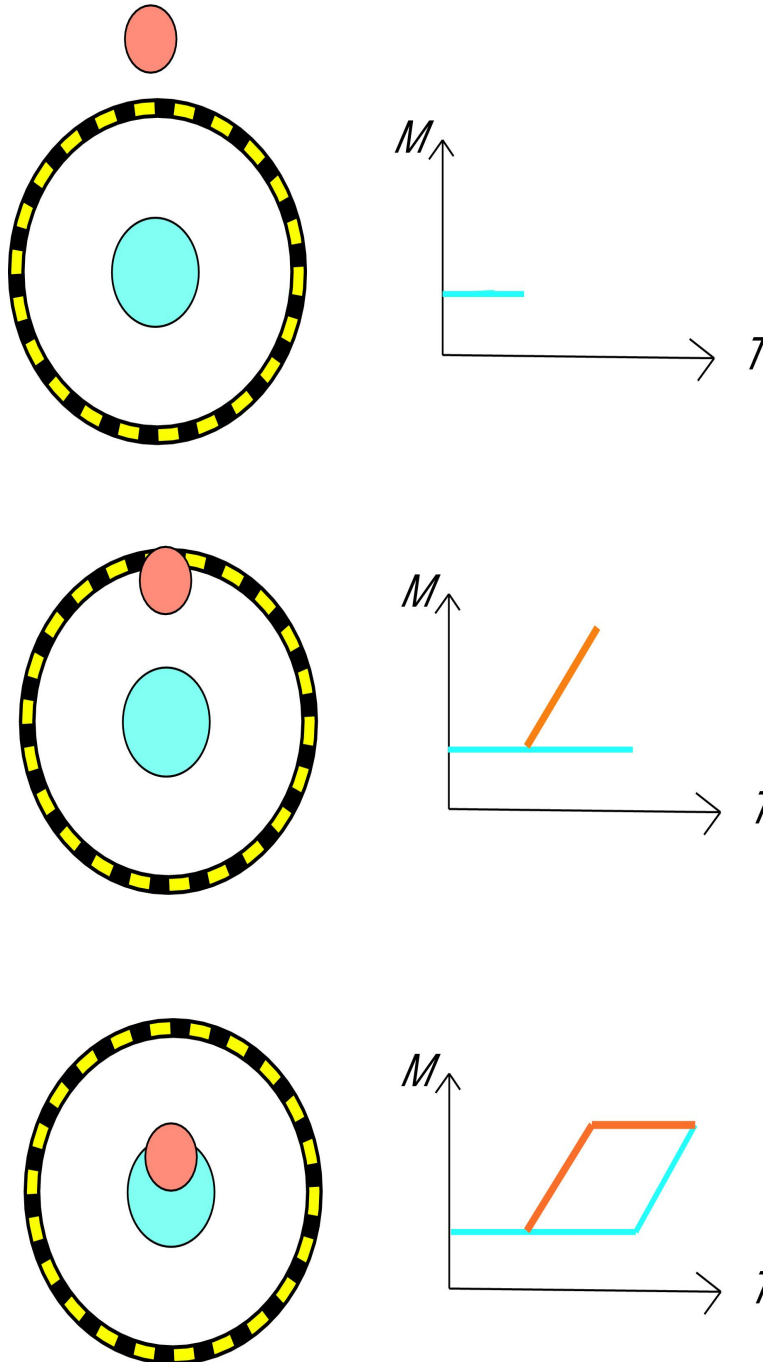


Figure 9.5: Illustration de l'effet de surestimation de masse. L'utilisation du flux de masse sur la sphère tend à surestimer la masse d'un halo à un instant donné. A gauche, schématisation de l'accrétion d'un objet (en rouge) par un halo (en bleu) au travers du rayon R_{200} (tireté). La masse reconstruite à partir du flux au cours du temps est représenté dans la colonne de droite par la courbe rouge. L'évolution de la masse réelle de l'objet central est en bleu.

temporelle de la distribution moyenne des vitesses. Cette évolution est donnée par [la figure 15](#) de l'article ci-joint.

Une distribution bi-modale des vitesses

Pour des temps de regard supérieurs à 5 milliards d'années, la distribution des vitesses est unimodale centrée sur $0.7V_{200}$. Pour des temps plus récents, la distribution $\langle\varphi(t)\rangle$ passe dans un régime bimodal avec deux composantes de signes opposés. La composante positive est toujours centrée sur $0.7V_{200}$ tandis que la composante négative est grossièrement centrée en $0.4V_{200}$. L'apparition d'une composante négative reflète l'importance que prend le matériau sortant du halo au cours du temps. Cette fraction est quasi nulle pour de "haut redshift" tandis qu'elle représente $\sim 40\%$ du matériau passant au travers de la sphère de Viriel pour $t \sim 0.8\text{Gyr}$. A nouveau, il est probable que cette évolution soit un relit de la mesure à rayon de viriel *fixé*. Pour des temps reculés, le rayon de mesure est plus éloigné que le rayon de Viriel actuel du halo : aucun signe de réorganisation interne n'est alors détecté à R_{200} . Au fur et à mesure que le halo grossit, le rayon de mesure tend vers le vrai rayon de Viriel et les éjecta, traceurs de la viriélisation interne, deviennent une fraction de plus en plus importante du flux de masse détecté.

On rappelle que cette distribution de vitesse est une quantité nette et qu'à ce titre la distribution $\varphi(v, t)$ est la différence entre la distribution de vitesse de la matière entrante $\varphi^+(v, t)$ et celle de la matière sortante $\varphi^-(v, t)$:

$$\varphi(v, t) = \varphi^+(v, t) - \varphi^-(v, t). \quad (9.12)$$

Sachant que les particules sont sélectionnées au vu de leur positions d'un instantané à l'autre, on ne peut discerner les particules traversant pour la première fois la sphère de Viriel et les particules ayant déjà séjourné à l'intérieur du halo. En particulier, toute une catégorie d'objets requièrent plusieurs orbites pour être totalement assimilés par le halo. Cette population est dite "virielisée". De fait les deux distributions $\varphi^\pm(v, t)$ peuvent être décomposé en une composante "accrétée" pour la première fois $\varphi_a^\pm(v, t)$ et une composante "virielisée" $\varphi_v^\pm(v, t)$ pour laquelle ce n'est pas le premier passage au travers de la sphère :

$$\varphi(v, t) = (\varphi_a^+(v, t) - \varphi_a^-(v, t)) + (\varphi_v^+(v, t) - \varphi_v^-(v, t)). \quad (9.13)$$

Une composante virielisée conduit présumément à une différence $(\varphi_v^+(v, t) - \varphi_v^-(v, t))$ nulle, la probabilité d'avoir un flux entrant à une certaine vitesse étant égale à celle du flux sortant à cette même vitesse : la prise en compte d'un flux net élimine cette composante de la mesure.

Ajustements gaussiens et populations virielisées

L'évolution de la fonction de distribution $\varphi(v, t)$ peut être modélisée par deux gaussiennes, l'une positive et l'autre négative. Cette modélisation est présentée dans [les figures 15 et 16](#) de l'article ci-joint. Les deux composantes dérivent au cours du temps vers des vitesses d'accrétion (ou d'éjection) plus élevées. Il est probable que cette augmentation reflète l'effet du halo, dont la masse augmente avec le temps, sur son environnement : un halo lourd aura tendance à accélérer davantage les objets lui tombant dessus qu'un

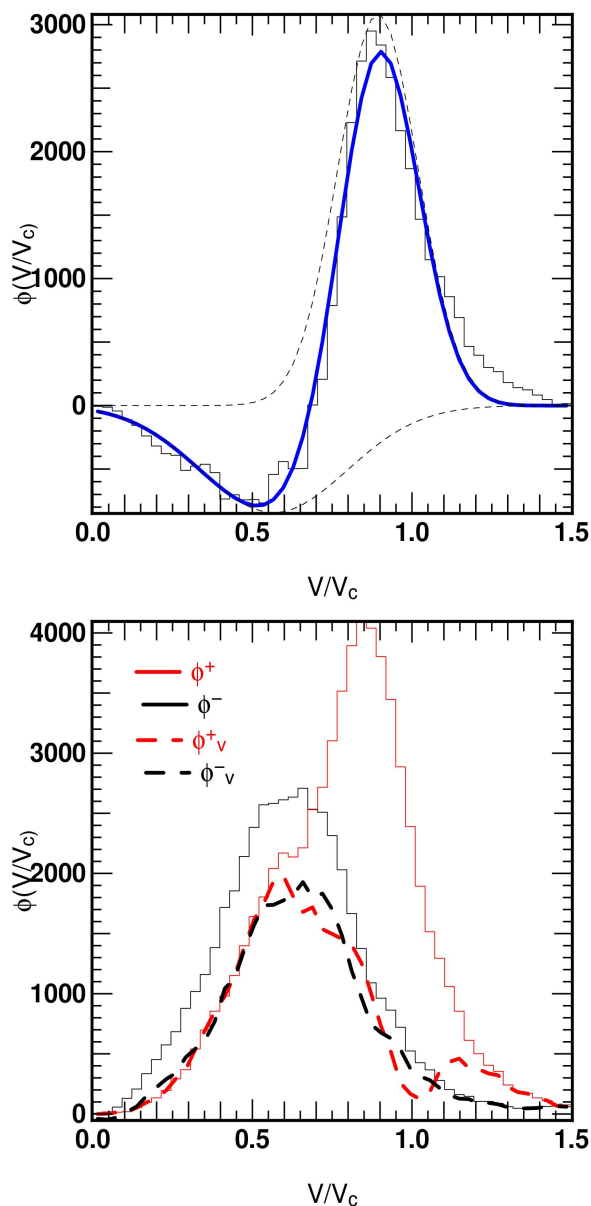


Figure 9.6: *En haut* : une exemple de décomposition de la fonction de distribution des vitesses $\Phi(v)$ en deux composantes entrantes et sortantes. La mesure a été faite à partir de 300 halos. L'ajustement (courbe bleue) est obtenue via deux gaussiennes inversées, de façon similaire aux mesures statistiques de $\Phi(v)$. Ces deux gaussiennes représentent les distributions de matière accrétée $\Phi_a^\pm(v)$. Les vitesses sont exprimées en unité de la vitesse circulaire V_c et l'ordonnée est donné en nombre de particules pondérées. La mesure est faite à $t=0.8$ Gyrs. On remarquera que l'ajustement est peu précis pour $v \sim 1.2V_c$ mais cet excès disparaît dans les mesures statistiques. *En bas* : Les distributions de vitesse des particules entrantes Φ^+ (trait plein rouge) et sortantes Φ^- (trait plein noir), ainsi que les différences $\Phi_v^\pm(v) = \Phi^\pm(v) - \Phi_a^\pm(v)$. Les deux courbes Φ^\pm se superposent, comme attendu pour une composante "virielisée".

halo plus léger (voir aussi Gill et al. (2004)). De façon générale, l'évolution du halo entre $z = 1$ et $z = 0$ est susceptible de modifier les trajectoires de la matière accrétée.

La population de rebond peut être retrouvée à partir de ces deux ajustements. La procédure est illustrée par la figure 9.6 construite à partir des particules sources d'un sous-ensemble de halos mais dont la distribution de vitesses est représentative de la distribution $\langle \Phi(t) \rangle$. Dans un premier temps, les distributions de vitesses de la matière accrétée et éjectée sont séparées. Dans un deuxième temps, les deux ajustements gaussiens sont retirés aux distributions de vitesses correspondantes et ne reste que les distributions virielisées Φ_v^\pm . Ces deux distributions sont quasi-identiques, centrée à des vitesses plus faibles que le flux accrété Φ_a^+ . Cette différence de vitesse trace l'impact de la dynamique interne du halo sur le matériau entrant au cours de son séjour à l'intérieur de la sphère de Viriel. Sur cet exemple précis, la matière de "rebond" tend à posséder une dispersion de vitesse plus large que la matière entrante pour $t < 5$ Gyr. A nouveau, les interactions avec le flux de matière et la distribution interne de matière doivent induire un tel "chauffage" de flux. L'énergie d'incidence est redistribuée en partie sous la forme de dispersion de vitesse.

Suivant un raisonnement similaire, le fait qu'il existe une composante négative à la distribution de vitesse qui ne soit pas annulée par une contrepartie accrétée implique que cette matière provient des régions internes du halo. Cette matière peut trouver son origine dans des objets qui n'auraient pas été complètement virielisés et dont une fraction substantielle ressort sans contrepartie accrétée. On peut également imaginer un reflux de matière virielisée, multidirectionnel, vers l'extérieur, sous l'effet d'une accretion antérieure ou d'une réorganisation de la matière interne.

Trajectoires et vitesses

Afin d'illustrer les mesures précédentes, la même étude cinématique a été faite sur un halo type de 800 kpc de rayon de Viriel, dont la distribution de vitesse est comparable à la distribution de vitesse statistique (voir la figure 9.7). Cette mini étude porte uniquement sur les particules passant au travers de la sphère entre les deux derniers instantanés de la simulation (i.e. durant les derniers 1.3 milliard d'années). La ligne du haut de la figure 9.8 représente les trajectoires des particules dont la vitesse est supérieure à $0.75V_c$, vitesses auxquelles dominent présumément les objets nouvellement accrétés. Cette supposition est confirmée par l'évolution de la distance de ces particules. Les trajectoires de ces particules sont directes, plutôt radiales et certaines d'entre elles se présentent sous formes de minces courants qui tracent les accrétions de petits objets. La région $0.5V_c < V < 0.75V_c$ est volontairement délaissée car peuplée à la fois de particules accrétées et éjectées. La ligne du milieu et du bas représentent les particules dont la vitesse est inférieure à $0.5V_c$ que l'on sait dominée par les particules sortantes. La ligne du milieu décrit la trajectoire des particules dont la distance initiale (i.e. à $z = 1$) est inférieure à 1 Mpc, donc proche du rayon de Viriel. Clairement, il s'y trouve deux composantes, entrantes et sortantes à $z=0$ et qui, au vu de leurs trajectoires, orbitent dans le halo : c'est la composante virielisée qui est l'équivalente de celle extraite par ajustement dans les mesures du paragraphe précédent. La ligne du bas représente les particules à faible vitesse mais dont la distance initiale est supérieure au Mpc. Clairement, seules des particules sortantes à $z = 0$ répondent à ce critère, expliquant la composante négative de la distribution de vitesses. De plus au vu des trajectoires qui se présentent sous forme

de larges courant, cette composante correspond à des objets relativement importants en masse.

Il faut noter que sur ce cas, ces trois composantes correspondent à des distances initiales différentes. Les particules rentrantes à $z=0$ et à haute vitesse, viennent de “loin” (~ 1.4 Mpc ici). Les particules virielisées ont des distances initiales proches du rayon de “Viriel” et orbitent à proprement parler dans le potentiel du halo. Enfin, es particules “purement” sortantes (ligne du bas dans la figure 9.8 viennent de distance intermédiaires (~ 1.2 Mpc) et ont eu le temps de rentrer et de sortir. L’excès de particules sortantes à basse vitesse doit donc être attribuée à cette population de “rebond”, déjà décrite par e.g. Gill et al. (2004) et Mamon et al. (2004).

9.3.3 Distribution des paramètres d’impacts

La distribution des paramètres d’impact des particules traversant la sphère de Viriel est liée à la distribution de leurs angles d’incidence Γ_1 (suivant les notations de l’article ci-joint). La distribution de ces angles d’incidence est reliée à la fonction source par :

$$\vartheta(\Gamma_1, t) = \int d\Gamma_2 dv d\Omega s^e(\mathbf{v}, \mathbf{\Omega}, t) v^2. \quad (9.14)$$

La mesure se faisant à rayon donné R_{200} , le paramètre d’impact b au rayon de Viriel est donné par

$$\frac{b}{R_{200}} = \sin \Gamma_1, \quad (9.15)$$

ce qui permet de déduire la distribution des paramètres d’impact $\vartheta(b, t)$ à partir de $\vartheta(\Gamma_1, t)$.

L’évolution temporelle de ces deux distributions est donnée par les figures 19 et 20 de l’article ci-joint. Définies ainsi, il faut noter que les distributions ϑ ne contiennent pas l’élément différentiel $\sin \Gamma_1$. Ainsi, la distribution $\vartheta(\Gamma_1, t)$ doit être vue comme la distribution des poids à associer à chaque configuration Γ_1 : une distribution isotrope des angles (i.e en $\sin \Gamma_1$) doit conduire à une distribution $\vartheta(\Gamma_1, t)$ uniforme. Dans les mesures présentées ici, cette distribution n’est clairement pas uniforme et présente au contraire une forte contribution de trajectoires radiales, ou de façon équivalente de trajectoires à faible paramètre d’impact b .

Comme précédemment, deux régimes existent : un correspondant à l’accrétion ($\Gamma_1 < \pi/2$ ou branche positive de $\vartheta(b, t)$) et un autre correspondant au matériel éjecté ($\Gamma_1 > \pi/2$ ou branche négative de $\vartheta(b, t)$). Clairement, l’accrétion domine aux temps les plus reculés tandis que la contribution du matériel sortant augmente progressivement avec le temps. L’accrétion est fortement radiale et ceci à tous les temps. Néanmoins, la branche associée de $\vartheta(b, t)$ tend légèrement à s’aplanir avec le temps. Les trajectoires des particules entrantes tendent à se *circulariser*. La composante sortante possède quant à elle une distribution des angles toujours dominée par des orbites radiales, mais dont la contribution d’orbites tangentielles est plus importante. Clairement, cette circularisation reflète l’influence du halo sur la dynamique du matériau accrété. La matière noire tombe dans le puit de potentiel du halo (trajectoire très radiales), interagit avec la matière interne qui circularise sa trajectoire et une fraction de ce matériel ressort avec un paramètre d’impact plus important. Une partie de ce matériel sortant est destiné à être accrété une seconde fois le long d’une trajectoire plus tangentielle, aplanissant la

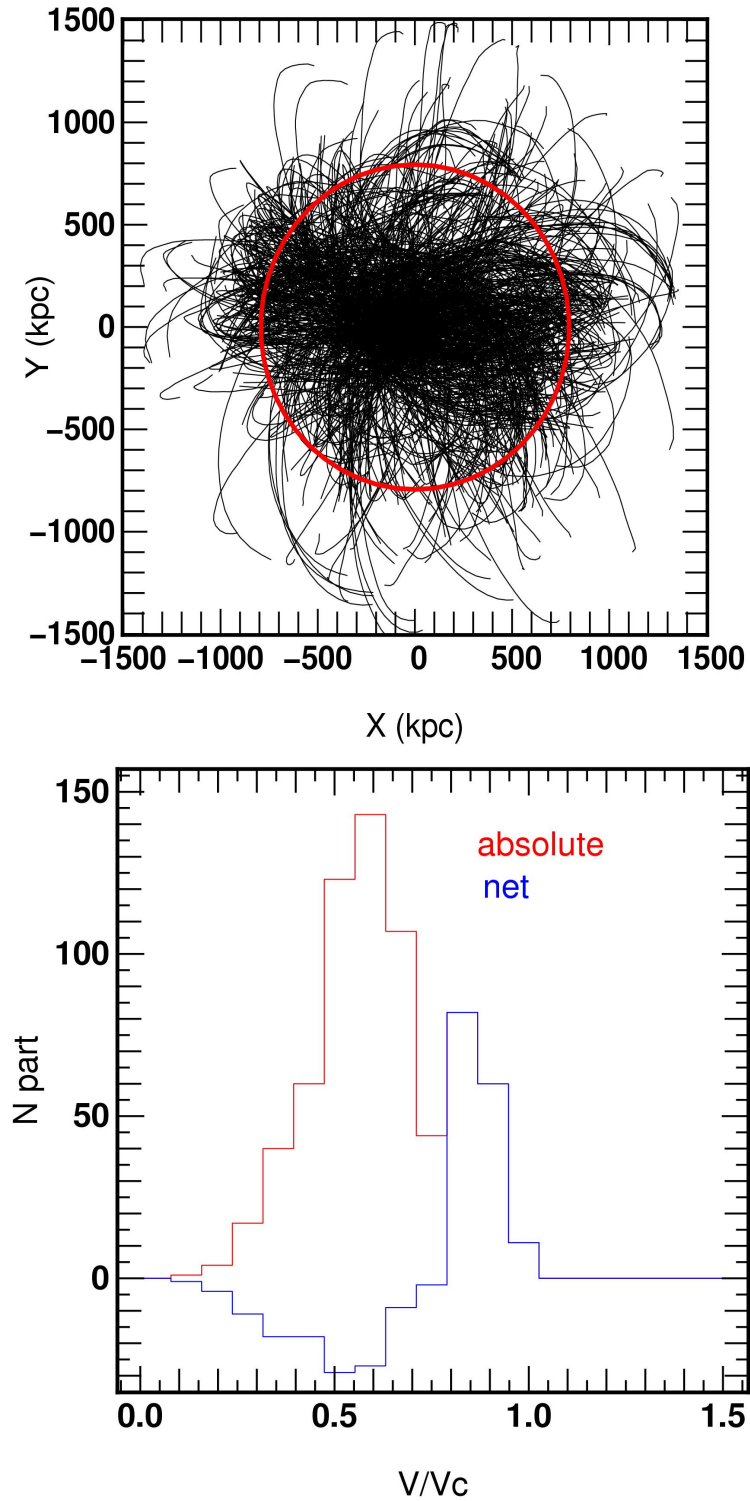


Figure 9.7: Mesures sur un halo typique. *En haut* : Trajectoires des particules passant au travers de la sphère entre les deux derniers instantanés de la simulation (entre $t = 1.3$ et $t = 0$ milliards d'années en temps de regard). Les trajectoires sont tracées sur les derniers 8 milliards d'années. *En bas* : Distribution des vitesses de ces particules. En bleu, la distribution nette (poids +1 pour les particules entrantes), en rouge, la distribution non pondérée.

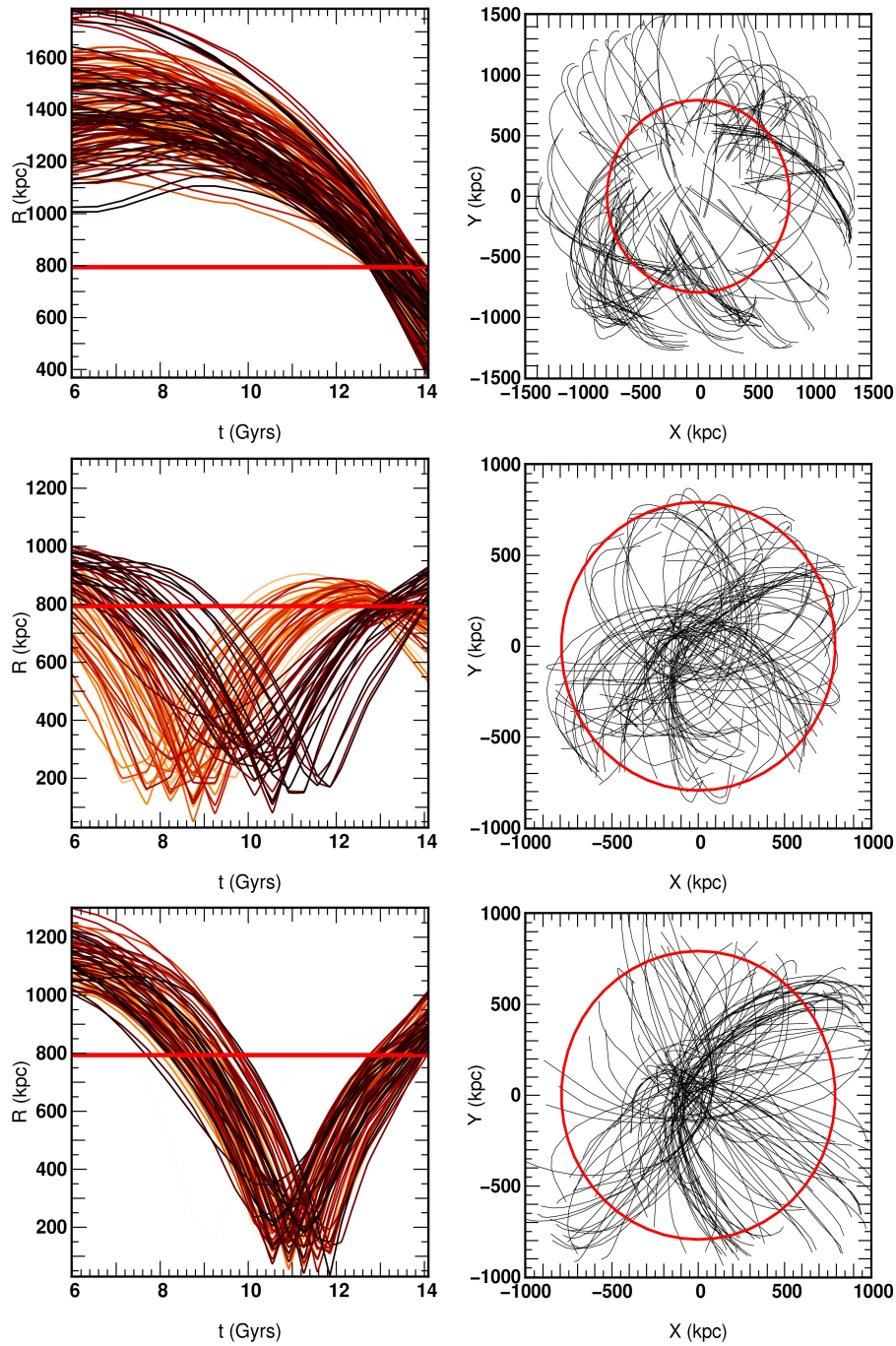


Figure 9.8: Mesures sur les particules passant au travers de la sphère de mesure (le temps est mesuré depuis le Big Bang) pour le même halo que celui décrit en figure 9.7. Colonne de gauche : évolution de la distance des particules au centre du PGP. Colonne de droite : trajectoires dans le plan X - Y . Les traits et cercle rouge représentent le rayon de Viriel. *En Haut* : particules ayant $V/V_c > 0.75$. *Au milieu* : particules ayant $V/V_c < 0.5$ et une distance au centre initiale inférieure à 1 Mpc. *En bas* : particules ayant $V/V_c < 0.5$ et une distance au centre initiale supérieure à 1 Mpc.

distribution des paramètres d'impact de l'ensemble de la matière rentrante. La friction dynamique ne peut être invoquée comme processus dominant : Colpi et al. (1999) et Hashimoto et al. (2003) par exemple ont montré que la friction dynamique circularise peu les orbites. Gill et al. (2004) mesurent un effet similaire dans quelques halos à haute résolution et en suivant la trajectoire des satellites : ils imputent cette circularisation à l'évolution séculaire du halo (gain de masse par exemple) au cours de la trajectoire des objets accrétés, modifiant de fait leur dynamique et leurs orbites. Si l'évolution temporelle de la vitesse d'accrétion des objets reflètent l'évolution temporelle de leur halo hôte (invoqué comme possibilité dans la section 9.3.2), ce raisonnement doit pouvoir être étendu plus généralement aux paramètres orbitaux des objets accrétés et donc au paramètre d'impact des orbites.

Cet effet est illustré par la figure 9.9 donnant l'évolution de la quantité $V_r/V = \cos \Gamma_1$ pour les particules du halo typique décrit dans la section précédente. Seules les particules ayant fait deux passages au travers de R_{200} durant les 8 derniers milliards d'années (correspondant à la ligne du bas de la figure 9.8) sont utilisées. Lors de leur "chute" dans le puit de potentiel l'ensemble de ces particules ont des vitesses hautement radiales $V_r/V \sim 1$. Après leur passage au péricentre et lors de leur passage en sortie du rayon de Viriel, la distribution de V_r/V s'est considérablement élargie avec des rapport de vitesse proche de zéro (i.e. une trajectoire plus tangentielle) pour certaines particules. Clairement, la traversée du halo circularise les orbites.

9.4 Statistiques à 2 points de la source

9.4.1 spectre de puissance angulaire de la densité de flux de masse

L'objectif de cette section est de présenter les premiers résultats sur la fonction de corrélation angulaire d'un des moments du terme source, la densité de flux de masse $\varpi_\rho(\mathbf{\Omega}, t)$ mesurée sur la sphère. Cette quantité est reliée au terme source par :

$$\varpi_\rho(\mathbf{\Omega}, t) = \int d\mathbf{v} s^e(\mathbf{v}, \mathbf{\Omega}, t). \quad (9.16)$$

Contraste d'accrétion

De façon générique, ce champ peut-être décomposé sur la base des harmoniques sphériques:

$$\varpi_\rho(\mathbf{\Omega}, t) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(t) Y_{\ell m}(\mathbf{\Omega}), \quad (9.17)$$

où la correspondance entre coefficients $a_{\ell m}(t)$ et coefficients $c_{\alpha \ell' m'}^{\ell m}(t)$ est donnée par l'équation 42 de l'article ci-joint. A nouveau, le spectre de puissance angulaire est relié aux coefficients harmoniques par :

$$C_\ell^{\varpi_\rho}(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m |a_{\ell m}|^2. \quad (9.18)$$

Comme pour le potentiel extérieur, les mesures de spectre de puissance ne sont pas faites directement sur ϖ_ρ mais sur le contraste d'accrétion défini par :

$$\delta_{[\varpi_\rho]} = \frac{\varpi_\rho(\mathbf{\Omega}, t) - \bar{\varpi}_\rho}{\langle \bar{\varpi}_\rho \rangle}. \quad (9.19)$$

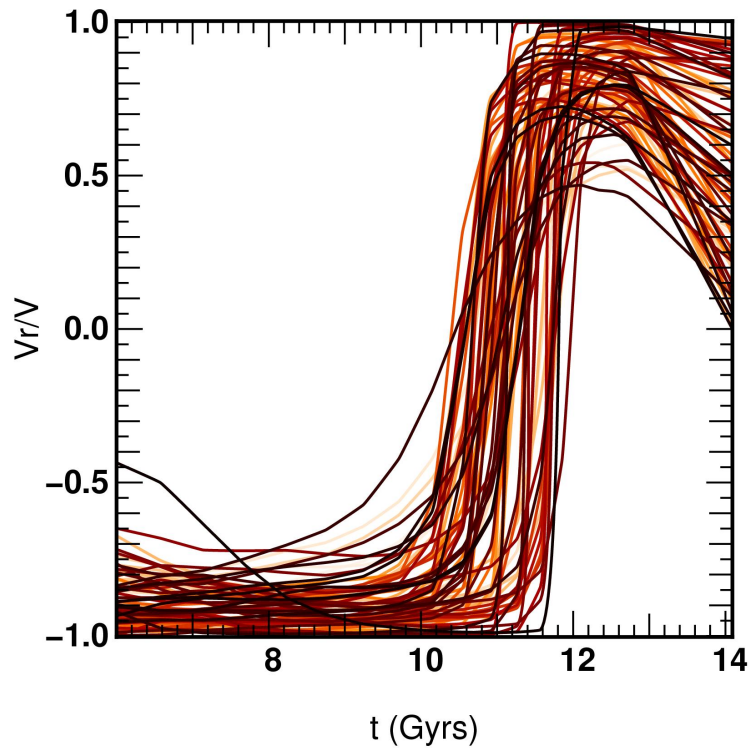


Figure 9.9: Illustration de l'évolution au cours du temps du rapport de la vitesse radiale à la vitesse pour un halo typique. Chaque courbe représente une particule détectée sortante entre les deux derniers instantanés de la simulation. Seules les particules n'ayant traversé qu'une fois la sphère sont représentées. Lors de leurs entrées, les trajectoires sont très radiales $V_r \sim V$ avec $V < 0$. En sortie la dispersion des valeurs de V_r indique clairement que le passage au travers du halo tend à circulariser les trajectoires.

Cette normalisation fait office de mise à l'échelle : l'évolution de la masse typique des halos au cours du temps s'accompagne d'une évolution de l'amplitude de leur accrétion et s'accompagne donc d'une évolution de l'amplitude des coefficients $a_{\ell m}(t)$. Pour éliminer cette évolution globale qui se fait hors de toute modification des échelles caractéristiques, la densité de flux de masse est normalisée par la moyenne d'ensemble du flux de masse $\langle \bar{\varpi}_\rho \rangle$. Comme pour le potentiel, le choix de la moyenne d'ensemble $\langle \bar{\varpi}_\rho \rangle$ au lieu du flux de masse de chaque réalisation $\bar{\varpi}_\rho$, s'explique par la volonté d'appliquer la même normalisation à chaque mesure de ϖ_ρ .

La décomposition harmonique normalisée correspondante est donnée par :

$$\tilde{a}_{\ell m}(t) \equiv \sqrt{4\pi} \left(\frac{a_{\ell m}(t) - \delta_{\ell 0} a_{00}(t)}{\langle a_{00}(t) \rangle} \right). \quad (9.20)$$

L'évolution temporelle de $\langle a_{00}(t) \rangle$ est la même que celle du flux de masse moyen, à une constante près, et est donc entièrement décrite dans la section 9.3.1. Le spectre de puissance associé au contraste s'obtient en remplaçant $a_{\ell m}(t)$ par $\tilde{a}_{\ell m}(t)$ dans l'équation (9.18).

Evolution du spectre de puissance

L'évolution temporelle du spectre de puissance angulaire $\langle C_\ell^{\bar{\varpi}_\rho}(t) \rangle$ est donnée dans la figure 28 de l'article ci-joint. Celle-ci est obtenue en ajustant la distribution de $C_\ell^{\bar{\varpi}_\rho}(t)$ (obtenue à partir de l'ensemble des halos à chaque instant) par une loi Log-Normale. La quantité $\langle C_\ell^{\bar{\varpi}_\rho}(t) \rangle$ désigne la valeur la plus probable (ou mode) de cette distribution.

De prime abord, l'on constate que la forme du spectre de puissance reste globalement inchangée et est ajustée par une loi en $\sim 1/(p + \ell)^2$ donnée par l'équation 76 de l'article ci-joint. Dans le même temps, le spectre de puissance voit son amplitude globalement augmenter au cours du temps, sur plusieurs ordres de grandeurs. Ceci implique que les structures accrétées à la surface du Viriel tendent à être globalement plus denses au cours du temps ou, plus exactement, que la variance de ϖ_ρ autour de $\langle \bar{\varpi}_\rho \rangle$ tend à augmenter et ceci pour toutes les échelles. Compte tenu de l'évolution du paramètre d'ajustement p au cours du temps, la courbe $\langle C_\ell^{\bar{\varpi}_\rho}(t) \rangle$ tend marginalement à s'aplanir au cours du temps pour les petites échelles, impliquant que l'importance des petites échelles tend à s'accroître comparativement aux plus grandes échelles. Il est à noter que cette évolution est qualitativement cohérente avec l'évolution du spectre de puissance du potentiel, ψ^e . Cette croissance de la densité des fluctuations suggère que la contribution d'objets petits et peu massifs (mais plus denses) augmente au cours du temps. Auquel cas, la contribution croissante des petites échelles de $C_\ell^{\psi^e}$ s'explique aussi par une plus forte proportion de potentiels confinés et piqués.

Néanmoins, il faut noter que cette évolution des petites échelles peut être le résultat d'un effet indésirable, lié à la résolution en masse des simulations. Ainsi, le spectre de puissance mesuré tend à être constant pour de grands ordres ℓ , tel que le ferait un *dirac* spatial, c'est-à-dire une particule isolée (cf. la section 8.4). Sous cette hypothèse, l'évolution constatée de $C_\ell^{\bar{\varpi}_\rho}$ implique que de telles particules contribueraient de façon plus importante au cours du temps. Afin d'aborder cet effet, le spectre de puissance a été mesuré à $t = 0.8$ Gyr pour trois classes de masse différentes (figure 30 de l'article ci-joint). Clairement, les halos les moins massifs présentent un spectre de puissance d'accrétion plus "plat" que les halos de masse plus importantes. On rappelle que tous les halos

sélectionnés ont connu des histoires d'accrétion “calme” relativement notamment à leur masse et il en résulte que les halos les moins massifs ont connu des histoires d'accrétion plus douce (ce qui est confirmé par la mesure de la MAH dans la section précédente). En d'autres termes, les petits halos sont davantage susceptibles de subir de faibles accrétion, donc moins bien résolues en terme de particules, ce qui se traduirait par un $C_\ell^{\varpi_\rho}$ plat aux petites échelles angulaires. A contrario, les halos massifs subissent une accrétion plus importante, donc mieux résolue spatialement, d'où une plus faible contribution des particules isolées.

Une normalisation alternative ?

Une normalisation alternative consiste définir le contraste de la densité de flux de masse par (voir aussi l'équation (9.22)) :

$$\delta'_{[\varpi_\rho]} = \frac{\varpi_\rho(\mathbf{\Omega}, t) - \bar{\varpi}_\rho}{\bar{\varpi}_\rho}, \quad (9.21)$$

auquel cas la moyenne d'ensemble $\langle \bar{\varpi}_\rho \rangle$ a été substituée par $\bar{\varpi}_\rho$ au dénominateur. Chaque réalisation du champ $\varpi_\rho(\mathbf{\Omega}, t)$ possède sa propre normalisation. Formellement, ces deux choix de définitions de $\delta_{[\varpi_\rho]}$ diffèrent comme :

$$\frac{\langle \varpi_\rho \rangle}{\langle \bar{\varpi}_\rho \rangle} \neq \langle \frac{\varpi_\rho}{\bar{\varpi}_\rho} \rangle \quad (9.22)$$

et dans cette étude alternative, la définition du membre de droite a été retenue.

La transposition de cette définition dans l'espace des coefficients harmoniques est alors :

$$\tilde{a}_{\ell m}(t) \equiv \sqrt{4\pi} \left(\frac{a_{\ell m}(t) - \delta_{\ell 0} a_{00}(t)}{a_{00}(t)} \right). \quad (9.23)$$

On notera que les deux types de normalisations donnent un contraste moyenné sur la sphère nul si l'on prend la moyenne d'ensemble et quelle que soit la définition adoptée. La définition $\delta'_{[\varpi_\rho]}$ est particulièrement adaptée au cas où l'amplitude typique du champ est corrélée avec la valeur du monopole associé : un contre-exemple consisterait en un champ dont les amplitudes caractéristiques seraient importantes mais dont le monopole serait statistiquement de valeur nulle ou proche de zéro, donc de flux net moyenné nul. Dans le cadre de cette étude, la définition $\delta_{[\varpi_\rho]}$ a été choisie à l'origine pour éviter ce type de désagréments susceptibles d'engendrer des “événements” rares pouvant modifier non seulement les distributions de C_ℓ mais surtout les nombres caractéristiques tels que la valeur moyenne de ces distributions. De plus, dans un contexte soit de génération synthétique de champ $\varpi_\rho(\mathbf{\Omega}, t)$ ou de calcul de réponse dynamique d'un halo soumis à ces flux, l'utilisation de la définition $\delta'_{[\varpi_\rho]}$ couple d'emblée les coefficients $a_{\ell m}$ et les coefficients a_{00} tandis que la définition $\delta_{[\varpi_\rho]}$ peut être simplement vue comme un système d'unité particulier.

L'utilisation de la définition $\delta'_{[\varpi_\rho]}$ pour la calcul de $C_\ell^{\varpi'_\rho}$ conduit aux spectres de puissance $\langle C_\ell^{\varpi'_\rho} \rangle$, présentés dans la figure D1 de l'article ci-joint. A nouveau, les distributions de $C_\ell^{\varpi'_\rho}$ ont été ajustées pour chaque pas de temps et chaque ℓ par une loi log-normale et la figure D1 présente la position du mode de chacun de ces ajustements. Clairement,

le comportement de $\langle\langle C_\ell^{\varpi'}(t) \rangle\rangle$ est beaucoup plus régulier qu'auparavant avec un spectre de puissance “le plus probable” pouvant être modélisé par une loi en :

$$\langle\langle C_\ell^{\varpi'}(t) \rangle\rangle = 0.75\ell^{-n} \quad (9.24)$$

avec $n \sim 1.15$ où aucune évolution temporelle significative n'est détectée. De plus, l'utilisation de cette normalisation ne conduit pas à un effet de plateau du spectre de puissance pour les petites échelles angulaires qui soit aussi fort que celui mesuré précédemment.

L'absence d'évolution temporelle de $C_\ell^{\varpi'}$ suggère que les coefficients $a_{\ell m}$ varient sur des temps caractéristiques plus long que le flux de masse moyen. En d'autres termes, la variation mesurée pour $C_\ell^{\varpi'}$ n'est pas le résultat de l'évolution de la répartition des structures à la surface de la sphère mais est due à la baisse du flux de masse moyen qui accentue le contraste d'accrétion. Par exemple, les distributions des $C_4^{\varpi'}$ et $C_{40}^{\varpi'}$ en fonction de a_{00}^2 (cf. figures 11 et D2 de l'article ci-joint) montrent qu'une large fraction des coefficients a_{4m} et a_{40m} ne dépendent pas du flux de masse monopolaire (proportionnel à a_{00}) en deçà d'un certain seuil d'accrétion et pour une large gamme de flux. D'autre part, la normalisation “halo par halo” étire la distribution des $C_\ell^{\varpi'}$ pour de faibles flux. En revanche, pour des flux plus importants, la distribution des $C_\ell^{\varpi'}$ reste compacte en passant d'une normalisation à l'autre. Il en résulte que la valeur la plus probable de cette normalisation est dominée par les halos à haute accrétion, tandis que la normalisation originale conduit à une valeur la plus probable de $C_\ell^{\varpi'}$ pour laquelle les faibles accrétions contribuent davantage. D'où une dépendance des $C_\ell^{\varpi'}$ en fonction du flux plus robuste et une sensibilité moindre aux inévitables particules isolées dans le régime de faible accrétion, responsable de l'effet de plateau pour les grands ℓ .

Cette définition alternative permet de calculer la fonction de corrélation angulo-temporelle $w^{\varpi'}(\theta, t, t + \Delta t)$ de la densité de flux de masse (cf. figure D3 de l'article ci-joint). Ce calcul n'aurait pas été possible avec la définition originale du contraste d'accrétion, au vu de l'évolution globale du spectre puissance qui aurait gommé toute fluctuation temporelle au profit de l'évolution séculaire. Clairement, la fonction de corrélation présente un temps de cohérence plus court que la fonction de corrélation du potentiel. De même, la taille angulaire caractéristique est plus petite. Ces deux effets sont cohérents avec l'image d'un champ de densité beaucoup plus piqué que le champ de potentiel. Enfin il faut noter que le fort quadrupôle détecté pour le potentiel ne trouve pas de contrepartie dans le champ ϖ_ρ . Ceci suggère que le quadrupôle du champ ψ^e serait induit par la distribution de matière à grande échelle et non par un effet d'intersection par la sphère de mesure.

9.5 Discussion

Plusieurs points importants n'auront pas fait l'objet d'études en elles-même mais ne pourront à l'avenir être sous-estimés :

Classes de masse et effet de résolution

Le premier d'entre eux est la dépendance en masse de l'accrétion. Clairement, un halo très massif n'aura pas la même histoire d'accrétion qu'un halo léger, ne serait-ce

que parce que ces deux halos auront émergé dans deux milieux différents. Dans l'étude présente, seule une classe de masse est étudiée ($\sim 5 \cdot 10^{12} M_{\odot} - 10^{14} M_{\odot}$) et déjà de premiers effets se font sentir, dans le spectre de puissance de la matière au rayon de Viriel ou dans le degré d'anisotropie (voir le chapitre 6). Cet effet de classes de masse invite à la mise en place de loi d'échelles (e.g. normalisation par la masse du halo, par le flux de masse moyen), permettant de considérer l'ensemble des halos pour les mesures statistiques. La normalisation alternative suggérée dans la section 9.4.1 montre que de telles loi d'échelles doivent exister. D'ailleurs l'expression des vitesses ou des distances en fonction de V_{200} ou R_{200} constitue une première tentative de telles mises à l'échelle mais ces lois restent à établir en toute généralité. Néanmoins, il n'est pas évident que la mise en commun d'un ensemble de halos améliore la détermination des paramètres de leur accréation. Par exemple, une propriété peut être bien définie au sein de trois de classes de masses différentes, là où le même signal sera plus bruité en mettant ces trois classes en commun. L'étude en classes de masses devra être menée, posant d'emblée la nécessité d'étudier un grand nombre de halos, via un grand volume simulé.

Les études en classes amènent naturellement à se poser la question de la résolution en masse des simulations. Celle-ci intervient notamment en fixant le nombre de particules dont un objet accréé va être formé et placer de fait le seuil en deçà duquel une accréation pourra être considérée comme diffuse. Ce nombre de particules par objet est directement lié aux effets de résolution sur la sphère où l'effet de "particule isolée" se fait particulièrement sentir dans les mesures de corrélations angulaires. De plus, cet effet est accentué par l'utilisation d'une description non lissée des particules, plus simple à manipuler mais qui n'est pas sans conséquences sur certaines mesures. Une description lissée des particules pourra réduire ces effets, mais seule l'utilisation de simulations à plus importantes pourra permettre d'étudier "proprement" la convergence des mesures en résolution.

Flux Net

Le choix a été fait de considérer des flux nets lors de cette étude. La probabilité d'avoir deux particules de poids opposé en un même point de l'espace des phases étant faible, cette option n'introduit pas de biais importants dans la mesure de la source $s^e(\Omega, \mathbf{v}, t)$. L'impact des flux nets se fait uniquement sentir sur les moments de la source intégrés sur toutes les orientations du vecteur vitesse et quand bien même, seule la distribution des vitesses $\Phi(v, t)$ nécessite un traitement particulier.

Toutefois, il paraît clair que dans le modèle de réponse du halo décrit au chapitre 2, seule la composante *entrante* doit être prise en compte. Dans l'absolu, les propriétés de la composante sortante doivent être prédites par la dynamique non-linéaire du halo et non apparaître comme une contrainte aux bords supplémentaire. De prime abord, la sélection sur le type de particules (entrantes/sortantes) consiste uniquement en la sélection d'un sous-espace particulier de l'espace des phases (Ω, \mathbf{v}) . Néanmoins cette simple sélection à posteriori peut ne pas s'avérer suffisante car elle ne permet pas de discriminer la matière accréée pour la première fois de la matière ayant déjà séjourné à l'intérieur de la sphère de Viriel. Cette sélection ne sera possible qu'en suivant les trajectoires des particules sur de longues périodes, augmentant significativement la complexité du traitement, mais dont la mise en place s'avèrera inévitable.

Mesures particulières

L’une des spécificités de l’approche développée dans ce chapitre tient en la nature halocentrique du point de vue adopté. De fait une fraction non négligeable des résultats qui y sont présentés sont interprétés de façon qualitative et l’on tente de relier l’évolution des différents champs mesuré aux propriétés déjà connues des processus de formations des halos. Par exemple, l’évolution aux petites échelles angulaires du potentiel peut être rapportée au fait que la densité typique des objets accrétés tend à augmenter au cours du temps. Autre exemple, l’évolution de la distribution des paramètres d’impacts refléterait une circularisation des orbites par le processus de friction dynamique. Cependant, bien qu’étant des interprétations raisonnables, le lien direct entre les objets accrétés et les flux qu’ils induisent n’a pas été totalement établi au cours de l’étude présente. De façon plus générale, les parts respectives des contributions du flux diffus et du flux “satellites” n’ont pas été séparées. Cette approche globale de l’accrétion est un atout lors de la mesure puisqu’elle n’introduit pas de biais lié à la définition d’un objet, mais elle entretient le flou lors de l’interprétation des propriétés des différentes densité de flux.

La façon de procéder consiste en menant en parallèle une étude de type “particulaire” où les propriétés du termes sources sont directement mises en regard des propriétés des satellites accrétés. Ceci nécessite l’utilisation d’un détecteur de sous-structures de type ADAPTAHOP (cf. le chapitre 6), et la procédure suggérée ici revient à appliquer de façon générale le type de comparaisons “approche fluide - approche particulaire” déjà réalisées pour l’étude de l’anisotropie. Par exemple, le suivi d’une accrétion d’objet doit être accompagnée d’une mesure de l’évolution du terme source qui est induit, afin de vérifier les interprétations qui ont été proposées précédemment. Enfin, une telle approche permettra à terme de discerner à posteriori les objets virielisés baignant dans le “fluide noir” lors des mesures du terme source. Tel qu’il a déjà été suggéré dans le chapitre 2, on peut imaginer qu’un objet accrété se traduit par une certaine signature dans le champ de vitesse mesuré sur la sphère de Viriel ou plus généralement comme des structures spécifiques de l’espace des phases advecté par la source. C’est ce type de marqueurs qui devront être établis avec certitude dans l’avenir, afin de faciliter la compréhension des propriétés des flux au rayon de Viriel.

9.6 Conclusion

Ce chapitre expose comment l’environnement d’un halo peut être caractérisé statistiquement par la mesure du *potentiel gravitationnel* dans lequel il baigne et par la mesure du terme *source* décrivant son accrétion. Le détail de la mesure dans les simulations y a été présenté ainsi que les premiers résultats sur les statistiques à 1 et 2 points du potentiel et du premier moment du terme source (la densité de flux de masse) ainsi que sur les propriétés cinématiques de l’accrétion. En particulier, les mesures sur la sphère de Viriel auront montré que :

- le champ de marée extérieur apparaît essentiellement comme un quadrupôle à long temps de cohérence. Cette polarisation pourrait traduire la distribution de matière non sphérique en périphérie du halo. Néanmoins, les contributions d’échelles plus petites sont détectées et leur temps de cohérence indique une confusion des structures plus importante dans le passé. Ces caractéristiques du champ de marée environnant peuvent déjà être utilisées pour le modèle de réponse du halo (décrit

dans le chapitre 2), dans un régime de pur forçage gravitationnel. Par exemple, la question de l'existence d'une polarisation typique des halos et de sa propagation jusqu'au disque dans un halo accréant pourra être abordée.

- la structure cinématique de la source est dominée par l'accrétion. Celle-ci est préférentiellement radiale et de vitesse $\sim 0.75V_c$. D'autre part, la contribution de la matière éjectée au travers de la sphère de Viriel augmente au cours du temps. Cette matière possède une vitesse plus faible et plus tangentielle, traduisant l'impact de la dynamique interne sur les flux matière. La transposition de cette différenciation cinématique aux satellites visibles peut être envisagée. Toutefois les effets de projection des vitesses, le passage à la matière visible ainsi que l'extension de ces résultats à d'autres rayons doivent être étudiés.
- la fonction de corrélation de la densité de flux de masse ϖ_ρ indique une forte contribution des petites échelles angulaires. L'utilisation d'un spectre de puissance normalisé halo par halo fait apparaître une forme "universelle" du spectre de puissance de ϖ_ρ , indépendant du temps. Les premières mesures de corrélation angulo-temporelle, fait apparaître des temps de cohérence plus courts pour le champ ϖ_ρ que pour le potentiel, ce qui est attendu. Toutefois, ces résultats présentent de premiers effets induits par la résolution finie des simulations et ces derniers devront être étudiés plus en détails à terme.

L'objectif à terme est d'étendre les mesures aux moments d'ordres supérieurs de la source (flux de moment $\varpi_{\rho\mathbf{v}}$ ou flux de dispersion de vitesse par exemple $\varpi_{\rho\sigma\sigma}$). Combinés à une hypothèse de forme pour cette dernière, la mesure de ces moments devra permettre d'étudier plus en détail les propriétés dans l'espace des phases de la matière accrétée. En particulier la question de traceurs d'objets virielisés dans le flux de matière à R_{200} pourra être abordée, en combinant éventuellement ces mesures avec des études en termes de satellites. D'autre part, la mise en place de la mesure d'un sous-ensemble des coefficients de projection $\mathbf{c}(\mathbf{t})$ de la source ouvre la porte à une caractérisation statistique complète de l'accrétion et laisse entrevoir la mise en place des applications liées à la description perturbative de la dynamique du halo (voir aussi le chapitre 2).

10

**Dynamical Flows Through Dark Matter
Haloes I : One and Two point statistics at
the Virial Radius**

Dynamical flows through Dark Matter Haloes

I. One- and two-points Statistic at the virial radius

Dominique Aubert^{1,2,3*}, and Christophe Pichon^{1,2,3}

¹ *Observatoire astronomique de Strasbourg, 11 rue de l'Université, 67000 Strasbourg, France*

² *Institut d'Astrophysique de Paris, 98 bis boulevard d'Arago, 75014 Paris, France*

³ *Numerical Investigations in Cosmology (N.I.C.), CNRS, France*

Typeset 1 April 2005; Received / Accepted

ABSTRACT

In a series of three papers, we investigate statistically the interplay between environments and dark matter haloes while focussing on the dynamical flows through the virial sphere. Our purpose is to study the properties of an “ensemble average” galaxy while accounting for both its cosmic history and its intrinsic characteristics. It relies on both cosmological simulations (to constrain the environments) and an extension to the classical matrix method commonly used in galactic dynamics (to derive the responses of halos). We concentrate in this paper on the statistical characterization of the cosmic environments surrounding haloes while relying on a large set of Λ CDM simulations. Paper III (Pichon & Aubert (2005)) shows how perturbation theory allows us to propagate the statistical properties of the environment down to an ensemble description of the dynamical response of the embedded halo.

This description relies on a “fluid” halocentric representation. The interactions between the halo and its environment are investigated in terms of a time-dependent external tidal field and source terms. The former accounts for fly-bys and interlopers. The latter stands for the distribution function of the matter accreted through the virial sphere. We decouple the temporal evolution of these two quantities from their angular and velocity dependence by means of projection on a 5D basis function for the source. We also show how the margins (flux densities of mass, momentum and energy) provide an alternative description to the 5D projection of the source. We discuss in details how to measure these quantities in simulations and apply the procedure to 15 000 haloes, with masses between $5 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ and $10^{14} M_{\odot}$ evolving between $z = 1$ and $z = 0$. The emphasis is put on a quantitative description of the one- and two-point statistics of the tidal field, and of the flux density of mass, while the full characterization of the other fields is described in paper II (Aubert & Pichon (2005)).

The net accretion decreases with time. This decline results from both an absolute decrease of infall and from a growing contribution of outflows at the virial radius. The kinematical properties of accretion are also investigated. Infall is mainly radial and occurring at velocities ~ 0.75 times the virial velocity. Outflows are also detected through the virial sphere and occur at lower velocities $\sim 0.6 V_c$ on more circular orbits. The external tidal field is strongly quadrupolar and mostly stationary, possibly reflecting the distribution of matter in the halo's near environment. The coherence time of the small scale fluctuations of the potential hints a possible anisotropic distribution of accreted satellites. The flux density of mass at the virial sphere is more clustered than the potential while the shape of its angular power spectrum seems stationary. The coherence time of the flux density of mass is measured and found to be much shorter than for the potential, as expected.

We also analyze the influence of resolution, class of mass, and selection biases. Most of these results are tabulated with simple fitting laws and are found to be consistent with other studies which rely on a description of accretion in terms of satellites. We explain how to generate synthetic flux density from one- and two-point statistics measured in our simulations.

Key words: Cosmology: simulations, Galaxies: formation, dynamics.

1 GALAXIES IN THEIR ENVIRONMENT

Examples of galaxies interacting with their environments are numerous. The antennae, the cartwheel galaxy, M51 are among the most famous ones. One of our closest neighbours, M31, exhibits a giant stellar stream which may be associated with its satellites (e.g. [McConnachie et al. \(2003\)](#)). Even the Milky Way shows relics of past interactions with material coming from the outskirts, such as the Sagittarius dwarf ([Ibata et al. \(1995\)](#)). It appears clearly that the evolution of galactic systems cannot be understood only by considering their internal properties but also by taking into account their environment. From a dynamical point of view for example it is still not clear if spirals in galaxies are induced by intrinsic unstable modes (e.g. [Lynden-Bell & Kalnajs \(1972\)](#), [Kalnajs \(1977\)](#)) or if they are due to gravitational interactions with satellites or other galaxies (e.g. [Toomre & Toomre \(1972\)](#)). Similarly, normal mode theories of warps have been proposed ([Sparke & Casertano \(1988\)](#), [Hunter & Toomre \(1969\)](#)) but failed to reproduce long-lived warps in a live halo for example (e.g. [Binney et al. \(1998\)](#)). Since warped galaxies are likely to have companions ([Reshetnikov & Combes \(1998\)](#)), it is natural to suggest satellite tidal forcing as a generating mechanism (e.g. [Weinberg \(1998\)](#), [Tsuchiya \(2002\)](#)). Another possibility is angular momentum misalignment of infalling material (e.g. [Ostriker & Binney \(1989\)](#), [Jiang & Binney \(1999\)](#)). The existence of the thick disk may also be explained by past small mergers (e.g. [Velazquez & White \(1999\)](#), [Quinn et al. \(1993\)](#), [Walker et al. \(1996\)](#)). Conversely, very thin disks put serious constraints on the amplitude of the interactions they may have experienced in the past.

On a larger scale, dark matter halos are built in a hierarchical fashion within the CDM model. Some of the most serious challenges that these models are now facing (the over production of dwarf galaxies in the local group (e.g. [Moore et al. \(1999\)](#), [Klypin et al. \(1999\)](#)), the cuspid crisis of NFW-like halos (e.g. [Flores & Primack \(1994\)](#), [Moore \(1994\)](#)), the over-cooling problem and the momentum crisis for galactic disks (e.g. [Navarro & Steinmetz \(1997\)](#)) occur at these scales; it is therefore important to study the effects of the cosmological paradigm on the evolution of galaxies in order to address these issues. In fact, their properties naturally present correlations with their environments. For example [Tormen \(1997\)](#) showed that the shape of halos tends to be aligned with the surrounding satellites' distribution. Also, the haloes spin is sensitive to recently accreted angular momentum (e.g. [van Haarlem & van de Weygaert \(1993\)](#), [Aubert et al. \(2004\)](#)). More generally, halos inherit the properties of their progenitors.

At this point, a question naturally arises, namely 'what is the dynamical response of a galactic system (halo+disk) to its environment?' One way to address this issue is to compute high resolution simulations of galaxies into a given environment (e.g. [Abadi et al. \(2003\)](#), [Knebe et al. \(2004\)](#), [Gill et al. \(2004\)](#)). However, if one is interested in reproducing the variety of dynamical responses of galaxies to various environments, the use of such simulations would be tedious. We suggest an alternative way to investigate this topic, which should complement both high resolution simulations and large cosmological simulations. In a series of three papers, we describe an hybrid approach in order to investigate the interplay between environments and haloes. It relies on both cosmological simulations (to constrain the environments) and on a straightforward extension of the classical tools of galactic dynamics (to derive the haloes' response). The purpose of the current paper (paper I) is

to set out a framework in which to describe statistically the environments of haloes and present the first results on the tidal field and the flux density of matter. Paper II ([Aubert & Pichon \(2005\)](#), in prep.) will provide a complete description of the environments relying on a large set of cosmological simulations. Paper III ([Pichon & Aubert \(2005\)](#), in prep.) will describe the analytic theory which allows to assess the dynamics of haloes in the open, secular and non-linear regimes.

1.1 Galactic infall as a cosmic boundary

Clearly a number of problems concerning galactic evolution can only be tackled properly via a detailed statistical investigation. Let us briefly make an analogy with the cosmological growth of density fluctuations. Under certain assumptions, one can solve the equations of evolution of those over-densities in an expanding universe (e.g. [Peebles \(1980\)](#), see [Bernardeau et al. \(2002\)](#) for an extensive review). Their statistical evolution due to gravitational clustering follows, given the statistical properties of the initial density field. For example, the power spectrum, $P(z, k)$, may be computed for various primordial power spectra, $P_{\text{prim}}(k)$, and for various cosmologies. In other words, the statistical properties of the initial conditions are *propagated* to a given redshift through an operator \aleph given by the non-linear dynamical equations of the clustering:

$$P(z, k) = \aleph(P_{\text{prim}}(k), z). \quad (1)$$

In a similar way, how would the statistical properties of environments be propagated to the dynamical properties of galactic systems? This is clearly a daunting task: the previous analogy with the cosmological growth of perturbation is restricted to its principle. For example the assumption of a uniform and cold initial state cannot be sustained for galaxies and haloes. While spatial isotropy is clearly not satisfied by disks, and hot, possibly triaxial haloes, the velocity tensor of galaxies may also be anisotropic. Environments share these inhomogeneous and anisotropic features since they are also the product of gravitational clustering and cannot be simply described as Gaussian fields. These boundary conditions are not pure 'initial conditions' since they evolve with time and in a non-stationary manner (e.g. the accretion rate decreases with time). A whole range of mass must be taken into account, each with different statistical properties. Finally, trajectories cannot be considered as ballistic (even in the linear regime) and must be integrated over long periods. Notwithstanding the above specificities of the galactic framework, two questions have to be answered:

- (i) What is the 'galactic' equivalent of $P_{\text{prim}}(k)$, *i.e.* how to describe statistically the boundary conditions?
- (ii) What is the 'galactic' equivalent of \aleph , *i.e.* how to describe the inner galactic dynamics?

The second point will be addressed extensively in paper III and is briefly introduced in section 2 in the linear regime. In that paper, we show how a perturbative theory can describe the dynamics of haloes which experience both accretion and tidal interactions (see also [Aubert et al. \(2004\)](#)). Within this formalism, the environment is described by the external gravitational potential and a *source function*. The former describes fly-bys and the tidal field of neighbouring large scale structures. The latter describes the flows of dark matter, *i.e.* the exchanges of material between the halo and the 'inter-halo' medium. The knowledge of these two quantities

fully characterizes the boundary condition. We concentrate here on well- formed haloes which do not undergo major merger between $z = 1$ and $z = 0$. This bias is consistent with a galactocentric description in which a perturbative description of the inner dynamics is appropriate and we explicitly ignore equal mass mergers. As briefly explained in section 2, this formalism provides a link between the statistical properties of environments to the statistical distributions of the responses of haloes: we shall refer to this link as *statistical propagation*. In this manner, the distribution of haloes dynamical state can be directly inferred from the statistical properties of environments, without relying on the follow-up of individual interacting haloes. The observed distributions of dynamical features provides information on the cosmic boundaries which influence haloes. This, together with the perturbative formalism described in paper III allows us to address statistically the recurrent ‘nurture or nature’ problem of structure formation within galactic systems. All processes which depend critically on the geometry of the interactions can be tackled in this framework. In contrast to what was stressed in Aubert et al. (2004) we will here ignore all departure from angular isotropy on the sphere, and postpone its implications to the discussions in section 7.

The statistical propagation relies on the knowledge of the properties of the environment. Characterizing the environment is the topic of this paper and paper II. This ‘condition’ is stated by the first point mentioned above. This question is investigated here using a large set of simulations, where each halo provides a realization of the environment. From this large ensemble of interacting haloes, we aim at extracting the global properties of their ‘cosmic neighbourhood’. Such a task requires an appropriate description of the source and the surrounding tidal field. It is the purpose of this work to implement such a description which should both provide insight on the generic properties of cosmic environments and be useful in a ‘dynamical’ context. Specifically, we present a new method to constrain the exchanges between the halo and its neighbourhood, via the properties of accretion and potential measured on *the virial sphere*. The advantages, specificities and caveats (and the tricks we implemented to overcome them) provided by this *halocentric* approach will be presented here.

As shown in the following sections, the source function is given by the phase space distribution function (DF hereafter) of the advected material. As a consequence, its full characterization is a complex task since it involves a 5-dimension space. The characterization of the source is based upon the projection of its DF on a suitable 5D basis. In particular, we show how such a description can be used to constrain the kinematic properties of accretion by dark matter haloes in cosmological simulations. The detailed statistical characterization of the source is postponed to paper II. We also present an alternative description of the source, which relies on *flux densities* through the virial sphere, i.e. the moments of the source DF. Even though it is less suited to the dynamical propagation, this alternative description is easier to achieve numerically and to interpret physically. In particular, it illustrates how the source term may be characterized statistically via its moments. We show how these flux densities can be related to the 5D projection of the source and we present the one- and two-point statistics of the flux densities of mass through haloes in simulations. We also describe how the effect of external potential can be reprojected inside the halo through Gauss’s theorem while knowing its properties on the

virial sphere. The potential’s one- and two- points statistics are also investigated around simulated haloes and interpreted.

We will finally provide in Section E means of regenerating such flows *ab initio* from its tabulated statistical properties.

The outline of the paper is the following: Section 2 presents briefly the dynamics of open collisionless systems and states the principle of statistical propagation. Section 3 presents the procedure we used to compute the source term, and illustrates its implementation on a given halo. The simulations and the corresponding selection biases of our sample are then described in section 4. Section 5 and 6 present the statistical measurements for one- and two-point statistics respectively. Discussion and conclusions follow in section 7.

2 DYNAMICS OF OPEN NON-COLLISIONAL SYSTEMS

The exchanges occurring between a halo and its environment can be characterized in several ways. One of the best methods involves building a merger tree where the whole history of formation of a halo is expressed in terms of its progenitors’ global properties (e.g. Lacey & Cole (1993), Kauffmann & White (1993), Somerville & Kolatt (1999)). While well suited to study the evolution of those characteristics, it cannot be directly applied to predict in details the haloes’ inner dynamic because of the lack of spatial information on these interactions. One could track the whole (six dimensional) phase-space history of all the progenitors, but not only would it be difficult to store in practice, it would also not give information on the influence of large scale structures through their gravitational potential. In the present paper, we propose to measure the relevant quantities on a surface at *the interface* between the halo and the intergalactic medium. Accretion is described as a flux of particles through the haloes’ external boundaries.

This section presents an extension of the formalism developed by e.g. Tremaine & Weinberg (1984) and Murali (1999) to open spherical collisionless systems. The dynamics of a dark matter spherical halo is obtained by solving the collisionless Boltzmann equation coupled with the Poisson equation:

$$\partial_t F + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{r}} F - \nabla \Psi \cdot \partial_{\mathbf{v}} F = 0 \quad (2)$$

$$\Delta \Psi = 4\pi G \int d^3 v F(\mathbf{v}). \quad (3)$$

where $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ is the system’s distribution function coupled to $\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \psi + \psi_e$, the total gravitational potential (self-gravitating + external perturbation). Note that, in a somewhat unconventional manner, ψ_e refers here to the external potential, i.e. the tidal potential created by the perturbations *outside* the boundary. The gravitational field of incoming particles is accounted for by the source term. Equation (2) coupled with Hamilton’s equations is a conservation equation:

$$\partial_t F + \tilde{\nabla}(\mathbf{u}F) = 0, \quad (4)$$

where $\mathbf{u} \equiv (\mathbf{v}, -\nabla \Psi)$ and $\tilde{\nabla} \equiv (\partial_{\mathbf{r}}, \partial_{\mathbf{v}})$. As a consequence, considering a ‘source of material’ described by $f_e(\mathbf{w})$ located on a surface $S(\mathbf{w})$ implies:

$$\partial_t F + \tilde{\nabla}(\mathbf{u}F) = -\delta_D(S(\mathbf{w}) - a)\mathbf{u} \cdot \frac{\nabla S}{|\nabla S|} f_e(\mathbf{w}), \quad (5)$$

where $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ describes the phase space and a defines the surface boundary of the studied system (here δ_D stands for the Dirac

delta function). If we define this boundary as a spherical surface with radius R , then equation (5) becomes (e.g. Appel (2002)):

$$\partial_t F + \tilde{\nabla}(\mathbf{u}F) = -\delta_D(r-R)v_r f_e(\mathbf{w}) \quad (6)$$

$$= -\delta_D(r-R)s^e(\mathbf{w}). \quad (7)$$

The function s^e will be hereafter referred to as the ‘source’ function. Formally the r.h.s. of equation (7) can be seen as an additional local rate of change of the system’s distribution function. Note that equation (7) involves the external potential, ψ^e , via \mathbf{u} .

2.1 Moments of the source term

Integrating equation (7) over velocities leads to the mass conservation relation:

$$\partial_t \rho + \nabla(\mathbf{v}\rho) = -\delta_D(r-R)(\rho v_r)_e \equiv -\delta_D(r-R)\omega_\rho, \quad (8)$$

where the source appears as an external flux density of matter $(\rho v_r)_e$ or ω_ρ . Taking the next moment of equation (7) leads to the Euler-Jeans Equation:

$$\partial_t \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \rho \nabla \Psi = -\delta_D(r-R)(\rho v_r \mathbf{v})_e, \quad (9)$$

where the source adds a flux density of momentum, $\omega_{\rho \mathbf{v}}$, to the conventional Jeans equation. Taking the successive moments of equation (7) will generically include a new term in the resulting equations.

2.2 Propagating the dynamics

Following Tremaine & Weinberg (1984), equation (7) can be solved along with Poisson’s equation in the regime of small perturbations. We define the system’s environment by the external perturbative potential $\psi^e(\mathbf{r}, t)$, and the source $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Given this environment, the system’s linear potential response $\psi(\mathbf{r}, t)$ can be computed. Writing the following expansions:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\psi^e(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(t) \phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (12)$$

where $\phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ and $\psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r})$ are suitable basis functions, and solving the Boltzmann and Poisson’s equation for $a_{\mathbf{n}}$, one finds (Aubert et al. (2004)):

$$\mathbf{a}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathbf{K}(\tau - t) \cdot [\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)] + \mathbf{H}(\tau - t) \cdot \mathbf{c}(\tau). \quad (13)$$

The kernels \mathbf{K} and \mathbf{H} are functions given in the appendix (equations (G2)-(G4)) of the equilibrium state distribution function, F_0 , and of the two basis, $\phi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, and $\psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r})$ only. As a consequence, they may be computed once and for all for a given equilibrium model. Since the basis function, $\psi^{[\mathbf{n}]}$, can be customized to the NFW-like profile of dark matter haloes, it solves consistently and efficiently the coupled dynamical and field equations so long as the entering fluxes of dark matter amount to a small perturbation in mass compared to the underlying equilibrium.

Assuming linearity and knowing \mathbf{K} and \mathbf{H} , one can see that the properties of the environments (through \mathbf{b} and \mathbf{c}) are propagated exactly to the inner dynamical properties of collisionless systems.

Note in particular that the whole phase space response of the halo follow from the knowledge of \mathbf{a} . For example, taking the temporal Fourier transform of equation (13), the cross correlation matrix is easily deduced:

$$\langle \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}^{*\top} \rangle = \langle (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}})^{-1} \cdot [\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{c}}] \cdot [\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{c}}]^{*\top} \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{K}})^{-1*} \rangle, \quad (14)$$

where $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\omega)$ is the Fourier Transform of $\mathbf{x}(t)$. The environment’s two-point statistic, via $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^{*\top} \rangle$, $\langle \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$ and $\langle \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{c}}^{*\top} \rangle$, modifies the correlation of the response of the inner halo.

Linear dynamics do not take into account the effects of the perturbation induced by dynamical friction. More generally the damping of incoming fluxes will ultimately require non-linear dynamics (since the relative temporal phases of the infall do matter in that context). It is also assumed in equation (13) that the incoming material does not modify the equilibrium state of the system. The secular evolution of the system should also be ultimately taken into account, through a quasi-linear theory for example. These issues are addressed in paper II.

Let us emphasize that, since the addressed problem is linear, the expression, equation (13), can be recast into a formulation which only involve an ‘external potential’, namely the sum of ψ^e and the potential created by the entering particles described by s^e . While formally simpler at the linear deterministic level, this alternative formulation does not translate well non-linearly or statistically (since it would require the full knowledge of the perturbation everywhere in space in a manner which is dependent upon the inner structure of the halo).

In the following sections, our aim is to describe how the two fields $\psi^e(\mathbf{r}, t)$ and $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ can be obtained from haloes in cosmological simulations. Then we will show how to characterize their statistical properties as a function of time via their expansion coefficients, $b_{\mathbf{n}}(t)$ and $c_{\mathbf{n}}(t)$.

2.3 Convention and notations

In what follows, we will characterize the properties of 2 fields, either angularly, kinematically, statistically or temporally, or any combination (for various classes of masses). The underlying probability distributions are sometimes very skewed (when, e.g. corresponding to strong or weak accretion event around massive or smaller haloes), which requires special care when attempting to define statistical trends. For a given field, X , we will introduce the following notations for clarity:

$$\overline{X} \equiv \frac{1}{4\pi} \int X(\theta, \phi) d\sin(\theta) d\phi, \quad (15)$$

which represents the angular average of X over the sphere. Alternatively, we define the temporal average over Δt as:

$$\underline{X} \equiv \frac{1}{\Delta T} \int_0^T X(t) dt. \quad (16)$$

Finally we define the ensemble average as

$$\langle X \rangle \equiv \int \mathcal{F}(X) dX = E\{X\}, \quad (17)$$

where \mathcal{F} is the probability distribution of X . Here $E\{X\}$ stands for the expectation of X . In practice, in section 4, an estimator for ensemble average of X measured for N haloes is given:¹

$$\langle X \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_i^N X_i. \quad (18)$$

We also define $\langle\langle X \rangle\rangle$ as the *mode* (or most probable value) of the fitting distribution of F .

All external quantities, (flux densities, potential, etc) will be labelled as X^e . We will introduce moments of the source over velocities, which correspond to flux densities, noted ω_X and their corresponding fluxes, noted Φ_X . Table (3.3) gives a list of such flux densities, flux pairs. Finally the harmonic transform of the field, X , will be written as $a_{\ell,m}^X$ and its corresponding power spectrum C_ℓ^X , while the parameters relative to fitting the statistics of the field will be written as q_X . Note that we also introduce the contrast of the field, X as

$$\delta_X \equiv \frac{X - \bar{X}}{\langle \bar{X} \rangle}, \quad (19)$$

and its corresponding harmonic transform, $\tilde{a}_{\ell m}^X$.

3 THE SOURCE OF INFALL

Let us first describe our strategy to fully characterize the source of cosmic infall at the virial radius via collisionless dark matter simulations, and enumerate the corresponding biases. We will in particular illustrate our procedure on a template halo.

3.1 Describing the source

As argued in section 2, computing the response of an open system to infalling material requires the knowledge of the source function, $s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Given the particles accreted by a halo, one possibility involves storing those phase-space properties for all particles. While feasible for a limited number of haloes, this task would become rapidly intractable for our large number of simulations. In order to compress the information, the accreted distribution function is projected here on a basis of function, following equation (12).

Since the measurement is carried at a fixed radius, the phase space is reduced from six to five degrees of freedom: two for the angular position on the sphere, described by two angles, $(\theta, \phi) \equiv \boldsymbol{\Omega}$, and three for the velocity space described in spherical coordinates by $(v, \Gamma_1, \Gamma_2) = (v, \boldsymbol{\Gamma})$, where v is the velocity modulus and $\boldsymbol{\Gamma}$ are the two angles describing its orientation (see figure 1). The angle Γ_1 indicates how radial is the velocity, with $\Gamma_1 > \pi/2$ for infalling dark matter and $\Gamma_1 < \pi/2$ for outflows. Γ_2 indicates the orientation of the infall's tangential motion.

Recall that the two fields, $c_{\mathbf{n}}$ (hence $s^e(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Gamma}, v, t)$) and $b_{\mathbf{n}}$ (hence $\psi^e(\boldsymbol{\Omega}, t)$) are respectively five-dimensional and two-dimensional (as a function of mass and time). Note also that both s^e and ψ^e are statistically stationary with respect to $\boldsymbol{\Omega}$, while s^e is partially isotropic and not stationary with respect to $\boldsymbol{\Gamma}$; neither ψ^e and s^e are stationary with respect to cosmic time.

¹ An alternative would be to weight the sum by the relative number of objects in each halo, hereby downweighting light haloes. We found that this alternative estimator did not significantly affect our measurements

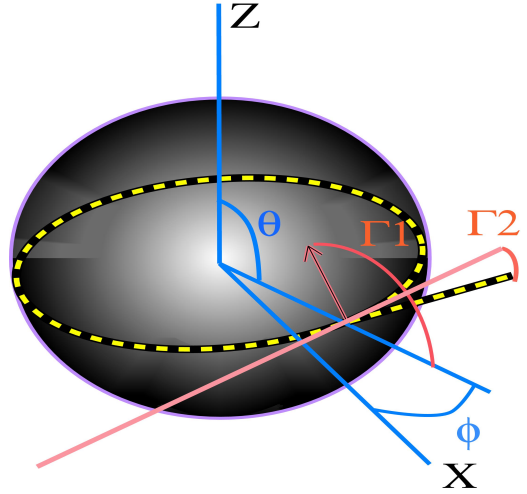


Figure 1. The angles $\boldsymbol{\Omega}$ and $\boldsymbol{\Gamma}$. The dot indicates the position of the particle on the sphere. The dashed ellipse represents the plane which contains both the particle and the sphere center. X and Z are arbitrary directions defined by the simulation box. $(\theta, \phi) = \boldsymbol{\Omega}$ are the particle's angular coordinates on the sphere. $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ define the orientation of the particle's velocity vector (shown as an arrow).

3.1.1 Harmonic expansion of the incoming fluxes

The $\boldsymbol{\Omega}$ and $\boldsymbol{\Gamma}$ dependence are naturally projected on a basis of spherical harmonics, $Y_{\ell,m}(\boldsymbol{\Omega})$ and $Y_{\ell',m'}(\boldsymbol{\Gamma})$. The velocity amplitude dependence is projected on a basis of Gaussian functions, $g_\alpha(v)$ with means μ_α and a given r.m.s. σ . One can write:

$$\phi^{[n]}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = Y_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\Omega}) Y_{\mathbf{m}'}(\boldsymbol{\Gamma}) g_\alpha(v), \quad (20)$$

where $\mathbf{n} \equiv (\ell, m, \alpha, \ell', m') = (\mathbf{m}, \alpha, \mathbf{m}')$. The expansion coefficients, $c_{\mathbf{m}\alpha}^{\mathbf{m}'}(t)$ are given by:

$$c_{\mathbf{m}\alpha}^{\mathbf{m}'}(t) = (\mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}})_\alpha. \quad (21)$$

where:

$$(\mathbf{s}_{\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}})_\beta = \int d\boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\Gamma} dv v^2 g_\beta(v) Y_{\mathbf{m}}^*(\boldsymbol{\Omega}) Y_{\mathbf{m}'}(\boldsymbol{\Gamma}) s^e(v, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Gamma}, t), \quad (22)$$

given

$$\mathbf{G}_{\alpha,\beta} = \int dv v^2 g_\alpha(v) g_\beta(v). \quad (23)$$

Note that the expansion in equation (12) involves 5 indices spanning the 5-dimensional phase space, while the expansion in equation (10) only involves 3 indices. This description of the source term is reduced to a set of coefficients which depends on time only. Furthermore this procedure requires to parse the particles only once, and all the momenta (e.g. mass flux density, PDF of impact parameter ...) of the source terms can be computed directly from these coefficients. As a consequence, the statistics of momenta follow linearly from the *statistics* of coefficients only, as shown in section 4.

3.1.2 Harmonic expansion of the external potential

Let us call $b_{\ell m}^e(t)$ the harmonic coefficients of the expansion of the external potential on the virial sphere. Following Murali (1999), we expand the potential over the biorthogonal basis, $(u_n^{\ell m}, d_n^{\ell m})$,

so that

$$\begin{aligned}\psi^e(r, \Omega, t) &= \sum_{n, \ell, m} b'_{\ell m}(t) Y_{\ell}^m(\Omega) \left(\frac{r}{R_{200}}\right)^{\ell}, \\ &= \sum_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}}(t) \psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (24)$$

where $\psi^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{r}) \equiv Y_{\ell}^m(\Omega) u_j^{\ell m}(r)$. The first equality in equation (24) corresponds to the inner solution of the three-dimensional potential whose boundary condition is given by $Y_{\ell}^m(\Omega) b'_{\ell m}$ on the sphere of radius R_{200} (defined below). Since the basis is biorthogonal, it follows that

$$b_{\mathbf{n}}(t) = \left(\int d_{\mathbf{n}}^{\ell m}(r) \left(\frac{r}{R_{200}}\right)^{\ell} dr \right) b'_{\ell m}(t). \quad (25)$$

It is therefore straightforward to recover the coefficient of the 3D external potential from that of the potential on the sphere.

3.2 From simulations to expansion coefficients

Once a halo is detected, its outer ‘boundary’ is defined as a sphere centred on its centre of mass with a radius, R_{200} (or *Virial radius*), defined implicitly by $3M/(4\pi R_{200}^3) = 200\rho_0$. This choice of radius is the result of a compromise between being a large distance to the halo centre, to limit the contribution of halo’s inner material to fluxes, and being still close enough to the halo’s border, to limit the simulation’s fraction to be processed and avoid contributions of fly by objects.

The time evolution of accretion is measured backwards in time by following the biggest progenitor of each halo detected at redshift $z = 0$. We then store the positions and velocities of particles passing through the virial sphere between snapshots. All positions are measured relative to the biggest progenitor centre of mass while velocities are measured relative to its average velocity, for each redshift z . In one of the simulation described below, we compared the total comoving drift distance of the centre of mass to the distance between the halo’s position between $z=1$ and $z=0$. The haloes were chosen to satisfy the criteria described in Section 4.2. We found that the scattering of the motion of the centre of mass represents less than 10 % of the distance covered in 8 Gyrs. The biggest progenitor centre of mass appear stable enough to be a reference.

Sticking to the previous definition of R_{200} would imply a changing outer boundary and an ‘inertial’ flux through a moving surface would have to be taken into account. To overcome this effect, we choose to keep the sphere constant in time at a radius equals to $R_{200}(z = 0)$. This choice corresponds to a reasonable approximation since the actual virial radius does not change significantly with time for a reasonably smooth accretion history. As shown in figure 2 the virial radius at $z = 1$ is only 20% smaller than R_{200} , measured at $z = 0$. Larger haloes have larger variations but the median value of the difference between the two radii remains smaller than 30% for final masses smaller than $10^{14} M_{\odot}$. Finally, measurements were done using physical coordinates (and not comoving coordinates). These choices were partly guided by the fact that they simplify future applications of these results to the inner dynamic of the haloes (see paper III).

3.2.1 Sampling on the sphere

As shown in section 2, we have

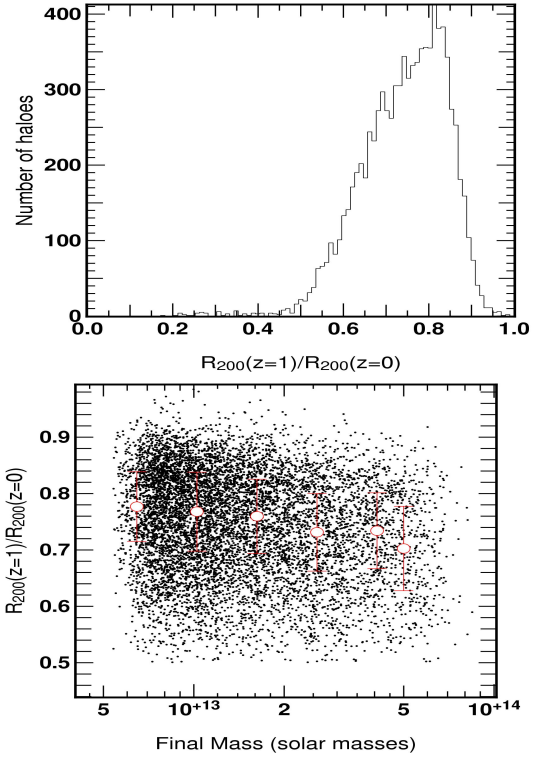


Figure 2. *Top:* the distribution of the ratio between the virial radius measured at $z = 1$ and at $z = 0$. *Bottom:* the distribution of $R_{200}(z = 1)/R_{200}(z = 0)$ as a function of the halo’s final mass. Each point represent one halo. Symbols stand for the median value of $R_{200}(z = 1)/R_{200}(z = 0)$ in 6 different classes of masses. Bars stand for the interquartile. The two measurements were performed on 9023 haloes which satisfy the selection criteria defined in section 4.2.

$$s^e \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) v_r = \sum_i \delta_D^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta_D^3(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)) v_{r,i}. \quad (26)$$

Switching to spherical coordinates leads to:

$$s^e = \sum_i \frac{\delta_D(R_{200} - r_i(t))}{R_{200}^2} \frac{\delta_D(v - v_i(t))}{v^2} \times \quad (27)$$

$$\frac{\delta_D(\Omega - \Omega_i(t))}{\sin \Omega_1} \frac{\delta_D(\Gamma - \Gamma_i(t))}{\sin(\Gamma_1)} v_{r,i}(t), \quad (28)$$

where i is the particle index. Now:

$$\begin{aligned}v_{r,i} \delta_D(R_{200} - r_i(t)) &= \sum_k v_{r,k,i} \left| \frac{dt}{dr} \right| \delta_D(t - t_{200,k,i}), \\ &= \sum_k w_{k,i} \delta_D(t - t_{200,k,i}),\end{aligned}\quad (29)$$

where $t_{200,k,i}$ corresponds to the k -th passage of the i -th particle through the virtual boundary R_{200} (and $v_{r,k,i}$ the corresponding radial velocity). In our conventions, the weight function $w_{k,i}$ takes the value 1 if the particle is entering and -1 if it is exiting the virial sphere. Given that our time resolution is finite, let us consider a time interval ΔT around t and define the average phase space flux density over ΔT :

$$\bar{s}^e(t) \equiv \frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta T} d\tau s^e(\tau). \quad (30)$$

Equation (28) becomes:

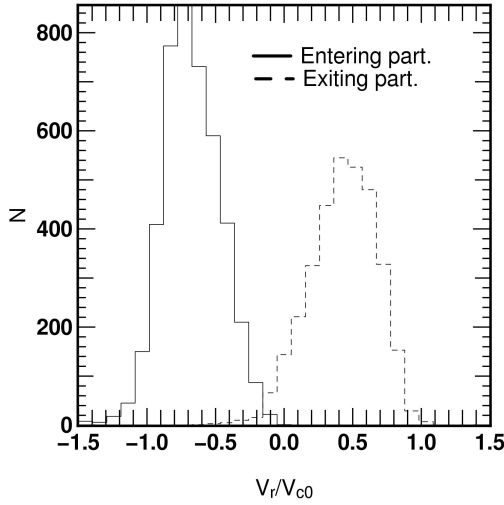


Figure 3. The distribution of interpolated radial velocities v_r of particles passing through the virial radius. Those particles were taken from the whole history of accretion of a typical halo ($R_{200} = 860$ kpc, $M(z=0) = 3 \cdot 10^{13} M_\odot$). Entering particles (solid line) $v_r < 0$ while exiting particles (dashed line) have $v_r > 0$, as it should be.

$$\underline{s}^e(t) = \sum_{i,k} \frac{\delta(v - v_{i,k})}{v^2 \Delta T \cdot R_{200}^2} \frac{\delta(\Omega - \Omega_{i,k})}{\sin \Omega_1} \frac{\delta(\Gamma - \Gamma_{i,k})}{\sin(\Gamma_1)} w_{i,k}. \quad (31)$$

The simulations were sampled in time regularly in $\ln(z)$ (i.e. $\Delta \ln(z) = \text{constant}$). From $z = 2$ to $z = 0.1$, 23 snapshots were taken (and a $z = 0$ snapshot was added to the sample). If Δt is small, the sum over k should mostly involve one passage, i.e. :

$$\underline{s}^e(t) \sim \frac{1}{\Delta T \cdot R_{200}^2} \sum_i \frac{\delta(v - v_i)}{v^2} \frac{\delta(\Omega - \Omega_i)}{\sin \Omega_1} \frac{\delta(\Gamma - \Gamma_i)}{\sin(\Gamma_1)} w_i. \quad (32)$$

Now these measurements only give access to (v, Ω, Γ) at fixed redshift, z , every varying Δz . Consequently, we need to interpolate these values at the sought $t_{200,i}$ approximated by:

$$t_{200,i} = t_i(z_n) + \frac{t(z_{n+1}) - t(z_n)}{r_i(z_{n+1}) - r_i(z_n)} (R_{200} - r_i(z_n)). \quad (33)$$

Given these ‘crossing’ times, the positions, \mathbf{r} , and velocities, \mathbf{v} , are also linearly interpolated. For instance, one gets for the x component of the velocity:

$$v_{x,i}(t_{200}) = v_{x,i}(z_n) + \frac{v_{x,i}(z_{n+1}) - v_{x,i}(z_n)}{t(z_{n+1}) - t(z_n)} (t_{200} - t(z_n)). \quad (34)$$

Such an interpolation is not strictly self-consistent since a ballistic motion requires a constant velocity along the trajectory. The worst-case scenario would correspond to particles which have entered the virial sphere with an outflowing velocity vector and vice-versa. As a simple but important check, we plotted the distribution of interpolated radial velocities (see Fig. (3)). Those were computed from the whole history of accretion of a typical halo ($R_{200} = 860$ kpc, $M_{z=0} = 3 \cdot 10^{13} M_\odot$). The two types of particles (entering/exiting) are confined in their radial velocity plane: entering (resp. exiting) particles have negative (resp. positive) radial velocities. Velocities are correctly interpolated. It also means that our time steps are small enough to ensure a small variation of positions/velocities of particles, validating *a posteriori* our assumptions. A fraction of exiting particles do have a negative radial velocity but represent less

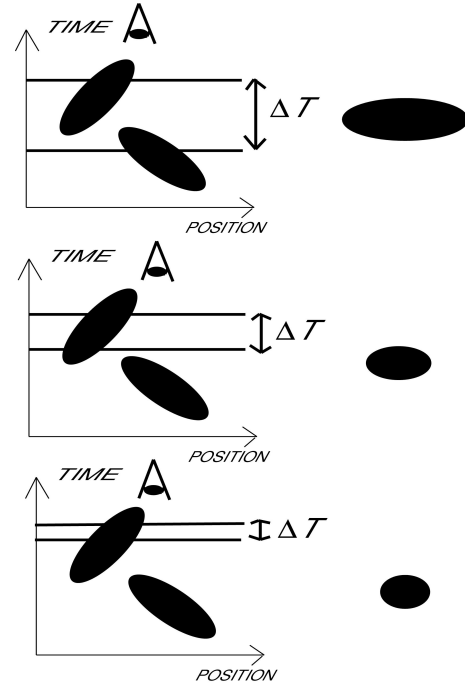


Figure 4. The impact of time averaging on the measured scales of dark matter passing through the sphere. On the left, time-position diagram of dark matter (black ellipses) as it passes through the sphere. Time integration is performed during ΔT (the two horizontal lines). On the right the accreted dark matter as seen on the sphere. A longer integration time increases the length scale of the incoming blob. If ΔT gets very large, different blobs may be seen as one (upper diagram).

than a few percent of the total population. For safety, those particles are rejected from the following analysis.

One should note that the measured angular scales are sensitive to the time sampling (see Fig. (4)). Increasing the sampling time tends to increase the apparent size of objects as measured on the sphere. Since this increase depends on the shape or the orientation of the objects, this effect *cannot* be simply time-averaged. As a consequence, a varying time step would induce a variation of typical spatial scale. The interpolation given by equation (33) allows also for a constant time step resampling of the source term \underline{s}^e . We shall now drop the reference to the time average from now on.

Given equation (31), computing the expansion coefficients of s_e is straightforward:

$$c_{\alpha, \mathbf{m}'}^{\mathbf{m}} = \left(\mathbf{G}^{-1} \sum_i w_i \frac{\mathbf{g}(v_i) Y_{\mathbf{m}'}^*(\Omega_i) Y_{\mathbf{m}'}^*(\Gamma_i)}{\Delta T \cdot R_{200}^2} \right)_{\alpha}. \quad (35)$$

We expect the above procedure to be more accurate than the strategy presented in Aubert et al. (2004), where the flux densities were smoothed over a shell of finite thickness ($R_{200}/10$).

The harmonic expansion $b'_{\mathbf{m}}$ of the external potential $\psi^e(R_{200}, \Omega)$ is computed directly from the positions of external particles (e.g. Murali & Tremaine (1998)):

$$b'_{\ell, m}(t) = -\frac{4\pi G}{2\ell + 1} \sum_j Y_{\ell m}^*(\Omega_j(t)) \frac{R_{200}^\ell}{r_j^{\ell+1}(t)}, \quad (36)$$

where r_j and Ω_j are the distance and the two angles defining the position of the j -th external particles. The quantities $r_j(t)$ and $\Omega_j(t)$ at time t are obtained by linear interpolation between two snapshots.

Using equation (24), $\psi^e(r < R_{200}, \Omega)$ can be reconstructed from b_m^e coefficients.

3.3 From flux densities to the 5D source

The description of the source term s^e involves time-dependent coefficients $c_{\alpha\ell'm'}^{\ell m}(t)$. Their computation from the particle coordinates is quite straightforward and as shown in the previous sections, the different margins can be recovered through the manipulation of these coefficients. Still, a projection of the source on an *a priori* basis is a complex operation. Here this projection aims at describing a 5D space for which little is known. As shown in the following sections, the distribution of incidence angles is quite smooth, while the distribution of velocities appears to be easily parametrized by Gaussians. The 5D basis presented in the current paper induces little bias, but it is very likely that a more compact basis exists and that the size of the expansions we chose can be reduced in the future.

Because of this large amount of information contained in the source, it is not always convenient to relate coefficients or their correlations to physical quantities, like the mass flux or the flux density of energy. An alternate description of the source term was presented in Aubert et al. (2004) with the following ansatz:

$$s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{m}} Y_{\mathbf{m}}(\Omega) \frac{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}} (2\pi)^{-3/2}}{\det|\hat{\omega}_{\rho\sigma\sigma, \mathbf{m}} / \hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}|} \times \quad (37)$$

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\mathbf{v} - \frac{\hat{\omega}_{\rho\mathbf{v}, \mathbf{m}}}{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}} \right)^{\top} \left(\frac{\hat{\omega}_{\rho\sigma\sigma, \mathbf{m}}}{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}} \right)^{-1} \left(\mathbf{v} - \frac{\hat{\omega}_{\rho\mathbf{v}, \mathbf{m}}}{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}} \right) \right].$$

This representation of the source is by construction consistent with the first two velocity moments:

$$\int d^3\mathbf{v} s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \omega_{\rho}(\mathbf{r}), \quad \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \omega_{\rho\mathbf{v}}(\mathbf{r}), \quad (38)$$

while

$$\int d^3\mathbf{v} \left(v_i - \frac{\omega_{\rho\mathbf{v}, i}}{\omega_{\rho}} \right) \left(v_j - \frac{\omega_{\rho\mathbf{v}, j}}{\omega_{\rho}} \right) s^e(\mathbf{r}, \mathbf{v}) =$$

$$\omega_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\mathbf{r}) - \frac{\omega_{\rho\mathbf{v}}(\mathbf{r})^2}{\omega_{\rho}(\mathbf{r})} + \sum_{\mathbf{m}} Y_{\mathbf{m}}(\Omega) \delta(r - R_{200}) \frac{\hat{\omega}_{\rho\mathbf{v}, \mathbf{m}}(t)^2}{\hat{\omega}_{\rho, \mathbf{m}}(t)},$$

$$\approx \omega_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\mathbf{r}). \quad (39)$$

Obviously, the third moment is not fully recovered from the Ansatz given by equation (38). This example should be taken as an illustration and highlights the possibility of building a source term from its moments. It is not unique and more realistic expressions which satisfies higher moments of the source could be found. Still, the successive measurements on the sphere of the flux density of mass ω_{ρ} , momentum $\omega_{\rho\mathbf{v}}$ and velocity dispersion $\omega_{\rho\sigma\sigma}$ allow a coherent description of the infall of matter. Unlike the coefficients, these flux densities are easier to interpret since they describe physical quantities and are directly involved in specific dynamical processes (see table 3.3). Furthermore, these three flux densities are easily expressed in terms of coefficients $c_{\alpha\ell'm'}^{\ell m}(t)$, or more precisely in terms of a *subset* of the source's coefficients, implying a smaller number of computations relative to a complete calculation of $c_{\alpha\ell'm'}^{\ell m}(t)$. Finally these flux densities are particularly suited to the regeneration of synthetic environments. As shown in appendix E, synthetic spherical maps can be generated from the two-point correlations and cross-correlations of these fields. Such environments would be

consistent with the measurements in simulations and will allow us to easily embed simulated galaxies or haloes in realistic environments as a function of time.

The expression given in equation (38) has one important drawback: it is not of the form of equation (12), i.e. it would require a reprojection over a linear expansion for a dynamical propagation. Nevertheless, its compactness makes it easier to compute than the full set of coefficients and the associated strategy would be 1) to measure the flux densities from the simulation, 2) build a source term from e.g. the Equation (38) and 3) project over an appropriate 5D basis when needed, i.e. when the source is used as an input to the analytic description of the haloes dynamics.

The following sections will make intensive use of the coefficients described by the equation (35) and equation (36). In particular, we will show how the manipulation of these coefficients allow to recover relevant physical quantities. In the current paper, only the first moment of the source, the flux density of mass ω_{ρ} together with the external potential, will be fully assessed. We will in particular investigate the kinematical properties of the accreted material. The complete characterization of the $\mathbf{c}(t)$ coefficients is beyond the scope of the current paper and will be addressed in paper II. The full measurements of these 11 fields required by Eq. 38 and the comparisons between the two expressions of the source will also be assessed in paper II. We describe in appendix F1 and F2 how the other moments, the flux density of momentum $\omega_{\rho\mathbf{v}}$ or the flux density of energy $\omega_{\rho\sigma^2}$ may be recovered from the source expansion.

3.4 A template halo

Let us first apply the whole machinery to one typical halo as an illustration. At $z=0$, this 'template' halo has a mass M of $3.4 \cdot 10^{13} M_{\odot}$, with a virial radius R_{200} of $800 h^{-1}$ kpc. The corresponding circular velocity is $V_{c0} = 600$ km/s.

Its accretion history is shown in figure 5 for $z < 1$. Each point on the azimuth-time diagram represents one particle of the simulation passing through the virial sphere at a given azimuth and at a given time. Temporal space has been sampled using 15 equally spaced bins between $z=1$ and $z=0$ (see bottom panel in figure 5). For each time step, the expansion coefficients $c_{\alpha\ell'm'}^{\ell m}(t)$ are computed from equation (35). The Gaussian basis $g_{\alpha}(v)$ involved 25 functions with means μ_{α} equally distributed from $v=0$ to $v=1.5$ in V_{c0} units and with an r.m.s $\sigma = 0.03$. The harmonic expansions were carried up to $\ell = 50$ in position space and up to $\ell' = 25$ in velocity space.

3.4.1 Advected mass: angular space (ω_{ρ})

Our template halo accretes an object at $t_s=11$ Gyr (where $t=14$ Gyr stands for $z=0$) adding $7.5 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ to the system during a ~ 1 Gyr interval. The corresponding spherical flux density field, $\omega_{\rho}(\Omega, t_s)$ is shown in Fig. (6). It represents the distribution of accreted particles as seen from a halo-centric point of view. The field $\omega_{\rho}(\Omega, t_s)$ has been reconstructed from the coefficients (see equation (35)). We have:

$$\omega_{\rho}(\Omega, t) = \int d\Gamma dv^2 s^e(v, \Omega, \Gamma, t) = \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}(t) Y_{\mathbf{m}}(\Omega). \quad (40)$$

Since

	flux density , ω	Flux, Φ	Motivation
Mass	ρv_r	dm/dt	heating & cooling,
Angular momentum	$\rho v_r \mathbf{r} \times \mathbf{v}$	dL/dt	warp, shape of haloes,
Kinetic energy	$\rho v_r \sigma_i \sigma_j$	dE/dt	virialized objects,
Shear	$\rho v_r \partial v_i / \partial x_i \, dc/dt$	tidal field,	
Vorticity	$\rho v_r \nabla \times \mathbf{v}$	$d\omega/dt$	anisotropic accretion.

Table 1. Description of the various flux densities. The first 10, together with the external potential are sufficient to characterize fully the environment as shown in Section 3.3.

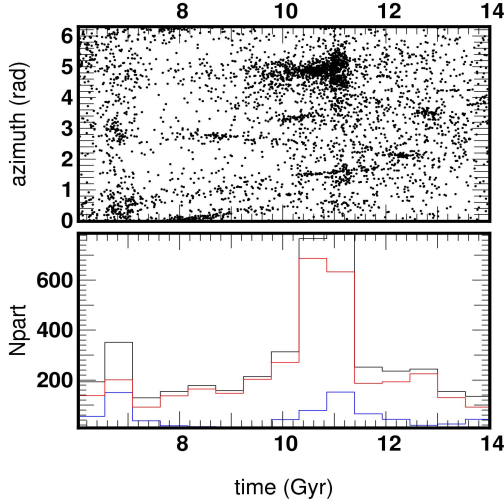


Figure 5. An example of accretion history. *Top* : Azimuth-time diagram. Each point in the diagram represents one particle passing through the virial sphere at a given azimuth (y-axis) at a given time measured from the Big-Bang (x-axis). *Bottom*: the distribution of particles' crossing instants (in black). Time increases from left to right. The infalling (resp. outflowing) particles distribution is shown in red (resp. blue).

$$\int d\Gamma Y_{\ell',m'} = \sqrt{4\pi} \delta_{\ell'0} \delta_{m'0}, \quad \text{and} \quad \int dv v^2 g_\alpha(v) = \mu_\alpha^2 + \sigma^2, \quad (41)$$

It follows that

$$a_{\mathbf{m}}(t) = \sqrt{4\pi} \sum_{\alpha} (\mu_\alpha^2 + \sigma^2) c_{\alpha,0}^{\mathbf{m}}(t), \quad (42)$$

allowing us to recover $\omega_\rho(\Omega, t_s)$. Also shown, the same field but computed this time using directly the angular distribution of particles as described in [Aubert et al. \(2004\)](#) (see below). All the major features are well reproduced by the expansion coefficients, equations (35)-(42). Clearly, an object is ‘falling’ through the virial sphere. It is straightforward to obtain the angular power spectrum $C_\ell^{\omega_\rho}$ from the $c_{\alpha,\mathbf{m}}^{\mathbf{m}}$ coefficients via the definition of $a_{\ell m}$ in equation (42):

$$C_\ell^{\omega_\rho} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2. \quad (43)$$

The angular power spectrum of $\omega_\rho(\Omega, t_s)$, derived from the expansion, equation (35), is shown in Fig. (7). From the positions and velocities of particles it is also possible to evaluate $\omega_\rho(\Omega, t_s)$ on an angular grid and recover the angular power spectrum ‘directly’. The agreement between the two $C_\ell^{\omega_\rho}$ is good, though for the smallest scales ($\ell \geq 30$), the power spectrum computed from the coefficients is slightly larger than the one derived directly from the particles. This may be explained by the fact that a grid sampling

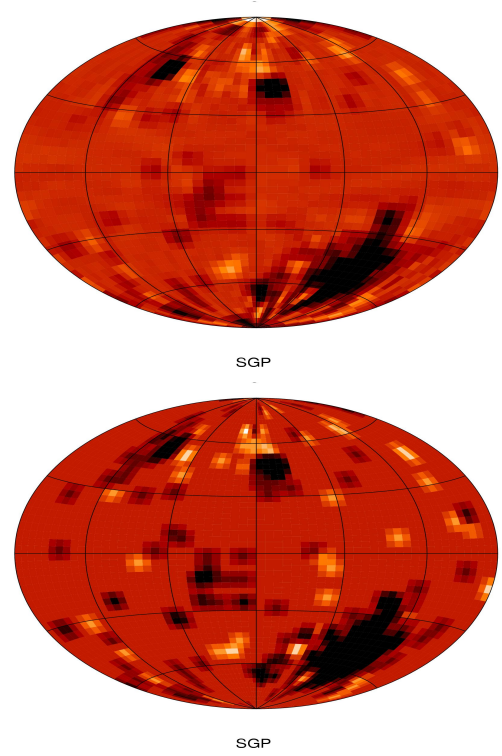


Figure 6. An example of a flux density reconstructed from the coefficients $c_{\alpha,\mathbf{m}}^{\mathbf{m}}$: the mass flux density, $\rho v_r(\Omega)$. It represents the angular distribution of incoming mass as seen from a halo-centric point of view. Here $t_s \sim 11$ Gyr. Light regions correspond to strong infall while darker regions stand for low accretion and outflows. *Top*: the spherical field obtained directly from the spatial distribution of particles. *Bottom*: the reconstructed spherical field from the coefficients, equation (35).

tends to smooth the actual ω_ρ field. As a consequence the amplitude of small scales fluctuations is decreased, leading to a smaller $C_\ell^{\omega_\rho}$. A more complete discussion on harmonic convergence can be found in appendix A. For a given ℓ , the corresponding angular scale is π/ℓ in radians.

Note that the coefficients a_{00} are closely related to the accretion field averaged over all directions, $\Phi^M(t)$, defined by:

$$\Phi^M(t) \equiv \overline{\omega_\rho} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \rho v_r(\Omega, t) = \frac{a_{00}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (44)$$

Measuring $a_{00}(t)$ amounts to measuring the accretion flux density, *i.e.* the quantity of dark matter accreted per unit surface and per unit time.

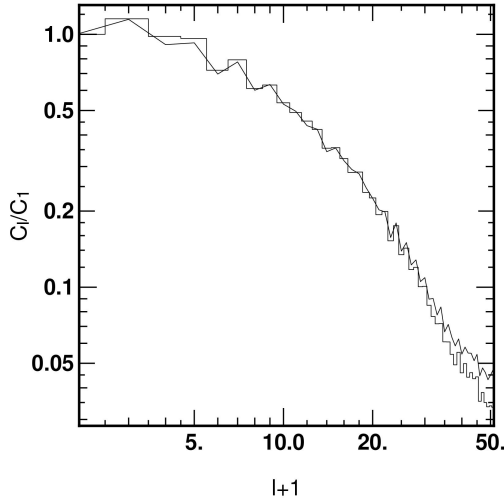


Figure 7. The angular power spectrum, C_ℓ , (equation (43)) of the distribution of incoming matter, $\omega_\rho(\mathbf{\Omega})$ (shown in figure 6) at $t \sim 11$ Gyr, for our template halo. For a given ℓ , the corresponding angular scale is π/ℓ . The histogram corresponds to the power spectrum derived directly from the particles' angular distribution. The solid line is the power spectrum reconstructed from the coefficients.

3.4.2 Advected mass: velocity space

Integration over the sphere leads to the distribution of accreted matter in velocity space:

$$\rho v_r(\mathbf{\Gamma}, v, t) = \int d\mathbf{\Omega} s^e(v, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Gamma}, t), \quad (45)$$

$$= \sqrt{4\pi} \sum_{\alpha, \mathbf{m}'} c_{\alpha, \mathbf{m}'}^0 g_\alpha(v) Y_{\mathbf{m}'}(\mathbf{\Gamma}). \quad (46)$$

Projections over Γ_2 and v gives the probability distribution of the incidence angle Γ_1 , $\vartheta(\Gamma_1, t)$, defined as:

$$\begin{aligned} \vartheta(\Gamma_1, t) &= \int d\Gamma_2 dv v^2 \rho v_r(\mathbf{\Gamma}, v, t), \\ &= 2\pi \sqrt{4\pi} \sum_{\alpha, \ell'} c_{\alpha, \{\ell', 0\}}^0 (\mu_\alpha^2 + \sigma^2) Y_{\ell', 0}(\mathbf{\Gamma}). \end{aligned} \quad (47)$$

The impact parameter b of an incoming particle (measured in units of the virial radius) is related to Γ_1 by

$$\frac{b}{R_{200}} = \sin(\Gamma_1) \quad (48)$$

therefore the probability distribution of impact parameters, $\vartheta(b)$, is easily deduced from equation (47). At $t \sim 11$ Gyrs, the $\vartheta(b)$ computed from the source coefficients is compared to that derived directly from the velocities of particles in Fig. (8). Note that for pure geometrical reasons small impact parameter b are less likely since there is only one trajectory passing through the centre while there is a whole cone of trajectories with $b \neq 0$. As a consequence errors are intrinsically larger for small values of b . The reconstruction from the source coefficients is clearly adequate. In this example, the high probability for infalling particles to have a small impact parameter ($b < 0.5$) imply that velocities are strongly radial. The object ‘dives’ into the halo’s potential well.

Projection over Γ_1 leads to the probability distribution of particles velocities, $\varphi(v, t_s)$, as they pass through the virial sphere. The PDF $\varphi(v, t)$ is defined as:

$$\varphi(v, t) \equiv v^2 \int d\mathbf{\Omega} d\mathbf{\Gamma} s^e(v, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Gamma}, t). \quad (49)$$

Here the v^2 weighting accounts for the fact that we are interested in the probability distribution of measuring a velocity, v within dv . Using equation (??), it follows that:

$$\varphi(v, t) = 4\pi \sum_{\alpha} v^2 g_\alpha(v) c_{\alpha, 0}^0. \quad (50)$$

The reconstructed velocity distribution is also shown in figure 8. It reproduces well the actual velocity distribution. For this specific halo, the satellite is being accreted with a velocity of $0.75 V_{c0}$.

The correlation between the incidence angle Γ_1 and the velocity’s amplitude v may be studied by integrating $\rho v_r(\mathbf{\Gamma}, v, t)$ over Γ_2 only. The distribution function, $\varphi(\Gamma_1, v)$, of particles in the (Γ_1, v) subspace is defined by:

$$\begin{aligned} \varphi(\Gamma_1, v) &\equiv \int d\Gamma_2 dv v^2 \rho v_r(\mathbf{\Gamma}, v, t), \\ &= 2\pi \sqrt{4\pi} \sum_{\alpha, \ell'} c_{\alpha, \{\ell', 0\}}^0 g_\alpha(v) Y_{\ell', 0}(\Gamma_1, 0). \end{aligned} \quad (51)$$

Knowing the relation equation (48), the correlation $\varphi(b, v)$ between the impact parameter and the velocity’s amplitude is easily obtained. The $\varphi(b, v)$ distribution is shown in figure 8. Again, note that $\varphi(b, v)$ represents an excess probability of finding an impact parameter b (with a velocity v) compared to isotropy. In this specific example, no real correlation may be found between the two quantities. Finally, the integration of $\varphi(b, v)$, $\varphi(v, t)$ and $\vartheta(\Gamma_1)$ over their respective space leads to the same quantity, namely the integrated flux $\Phi^M(t)$.

3.4.3 External potential

The final field we need to quantify on the virial sphere is the external tidal field created by the dark matter distribution around the halo.

Using equation (36), the external potential $\psi^e(\mathbf{\Omega}, t)$ is easily computed from the positions of external particles. We restricted ourselves to particles within a 4 Mpc (physical) sphere centred on the halo. The position of external particles are linearly interpolated at a given measurement time. We computed the b_m coefficients for our template halo at $t_s \sim 7$ Gyrs (measured from the Big Bang). The reconstructed $\psi^e(\mathbf{\Omega}, t)$ field is shown in Fig. (9) along with the modulus of the advected mass $|\rho v_r(\mathbf{\Omega})|$. The two reconstructions were restricted to harmonics $\ell \leq 20$.

The two spherical fields show the same main features. However, almost no small scale features are seen in the map of the external potential even though they have the same resolution. Since the gravitational potential is known to be smoother than the associated density and is dominated by the global tidal field, it is not surprising that $\psi^e(\mathbf{\Omega}, t)$ appears smoother than the advected mass field $|\omega_\rho(\mathbf{\Omega})|$.

The potential’s angular power spectrum may also be computed by replacing $a_{\ell m}$ by $b_{\ell m}$ in equation (43) (see Fig. (10)). The power spectrum of the potential, C_ℓ^{ψ} , sharply decreases with ℓ , while $C_\ell^{\omega_\rho}$ has a gentler slope. Large scales are clearly more important for the potential than for the advected mass. Furthermore, C_ℓ^{ψ} systematically peaks for even ℓ values, reflecting the ‘even’ symmetry of the potential measured on the sphere.

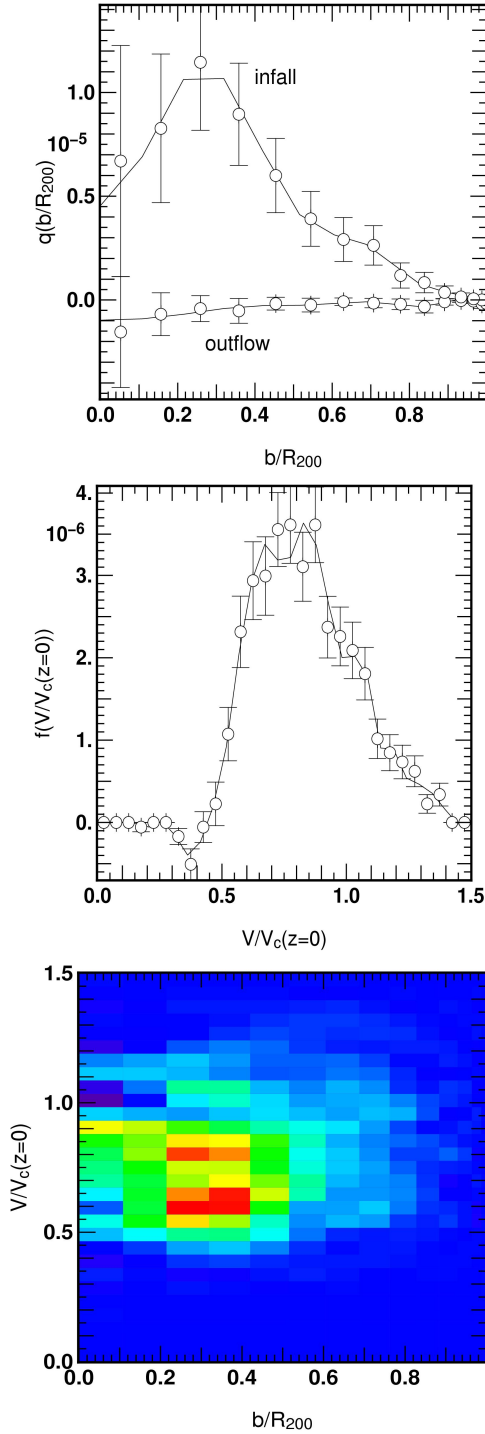


Figure 8. *Top:* Excess probability distribution of impact parameter b , $\theta(b)$, derived from the $c_{\alpha,m}^m(t)$ source coefficients (equation (35)) of our template halo at $t_s \sim 11$ Gyr (line). The histogram corresponds to the same distribution derived directly from the particles' positions and velocities. Error bars stand for 3σ errors. The impact parameters are given in units of R_{200} . The Y-axis unit is $5 \cdot 10^9 M_\odot/\text{kpc}^2/\text{Myr}$. Infall is mainly radial. *Middle:* The velocity distribution of particles, $\varphi(v)$, accreted at $t_s \sim 11$ Gyr, for our template halo. Velocities are expressed in terms of the circular velocity at $z=0$. The Y-axis unit is $5 \cdot 10^9 M_\odot/\text{kpc}^2/\text{Myr}$. The histogram corresponds to the velocity distribution obtained directly from the particles velocities. The solid line is the reconstructed distribution from the source coefficients. *Bottom:* the probability distribution, $\phi(b,v)$, of particles in the $b-v$ subspace. Units are the same as above. Red/blue stand for high/low densities. No correlation is found between b and v for this specific example.

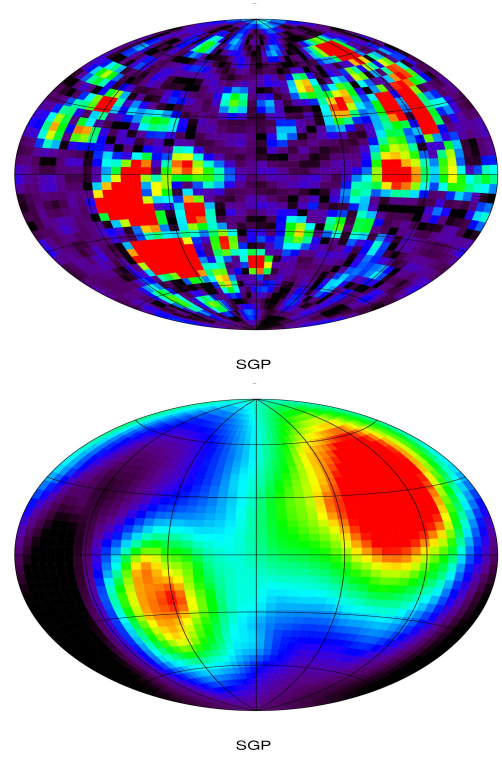


Figure 9. A comparison between the external potential, $\psi^e(\Omega)$, and the modulus of the flux density of matter, $|\rho v_r(\Omega)|$. The measurement is made at $t \sim 7$ Gyr (measured from the Big Bang) on our template halo. The two fields were respectively reconstructed from $c_{\alpha,m}^m$ and b_m coefficients with $\ell_{\max} \leq 20$. Even though the two fields are similar and exhibits a strong quadrupolar component, $\psi^e(\Omega)$ is smoother than $\rho v_r(\Omega)$. We expect the corresponding expansion coefficients to be statistically correlated.

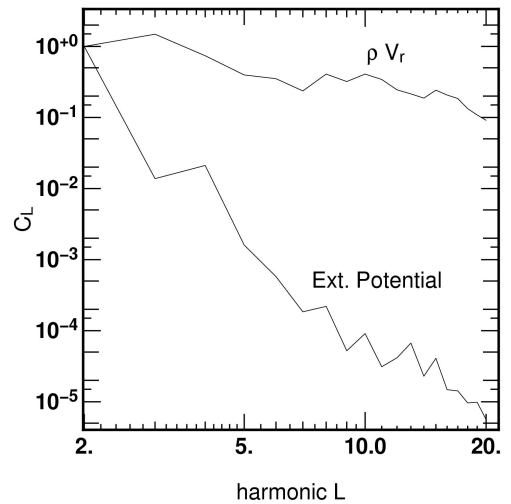


Figure 10. A comparison between the angular power spectrum of $\rho v_r(\Omega)$ and $\psi^e(\Omega)$ for our template halo (the two fields are shown in figure 9). The two power spectra C_ℓ are normalized by C_2 , i.e the quadrupole contribution. The slope of the potential's power spectrum is clearly stronger. Large scales (i.e. small ℓ values) dominate the angular distribution of $\psi^e(\Omega)$, as expected.

4 SIMULATION SAMPLE & STATISTICAL BIASES

In Section 3.4, we detailed our measurement strategy for a given typical halo. We are now in a position to reproduce the above measurements for all the haloes of our simulation sample. Let us first describe in turn the construction of our sample, and the corresponding biases, which constrain our ability to convert a large set of simulations into the statistics of the source.

4.1 Simulations

In order to achieve a sufficient sample and ensure a convergence of the measurements, we produced a set of ~ 500 simulations which were discussed in Aubert et al. (2004). Each of them consists of a $50 h^{-1} \text{ Mpc}^3$ box containing 128^3 particles. The mass resolution is $5 \cdot 10^9 M_\odot$. A ΛCDM cosmogony ($\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $h = 0.7$ and $\sigma_8 = 0.928$) is implemented with different initial conditions. These initial conditions were produced with GRAFIC (Bertschinger (2001)) where we chose a BBKS (Bardeen et al. (1986)) transfer function to compute the initial power spectrum. The initial conditions were used as inputs to the parallel version of the tree code GADGET (Springel et al. (2001)). We set the softening length to $19 h^{-1} \text{ kpc}$. The halo detection was performed using the halo finder HOP (Eisenstein & Hut (1998)). We employed the density thresholds suggested by the authors ($\delta_{\text{outer}} = 80$, $\delta_{\text{saddle}} = 2.5\delta_{\text{outer}}$, $\delta_{\text{peak}} = 3\delta_{\text{outer}}$).

4.2 Selection criteria

As shown in Aubert et al. (2004) the completion range in mass of our simulations spans from $3 \cdot 10^{12} M_\odot$ to $3 \cdot 10^{14} M_\odot$. Since our emphasis is on L_* galaxies, we focused mainly on galactic haloes and light clusters, and considered only haloes with a mass smaller than $10^{14} M_\odot$ at $z=0$. Our interest is for haloes already ‘formed’, i.e. which will not experience major fusions anymore. To satisfy this requirements we focused on the last 8 Gyrs (redshifts $z < 1$ in a ΛCDM cosmogony). Since we follow the history of a given halo by finding its most massive progenitor, it is required not to accrete more than half its mass in a two-body fusion. As a final safeguard a halo is rejected if it accretes more than $5 \cdot 10^{12} M_\odot$ between two timesteps (i.e. per 500 Gyrs, see next subsection). This mass corresponds approximatively to the smallest haloes considered at $z = 0$. The final range of mass of haloes which satisfy these criteria is $\sim 5 \cdot 10^{12} M_\odot - 10^{14} M_\odot$, the fraction of rejected haloes being $\sim 20\%$. Clearly, such *a priori* selection criteria will modify the distributions of measured values and the related biases may be difficult to predict. For instance, the figure 11 shows the scatter plot of the contribution of $\pi/(\ell = 4) = 45$ degrees fluctuations to ω_ρ field vs a_{00} , i.e. the accretion rate. It appears from this plot that modifying the threshold for the accretion will modify the average angular scale of ω_ρ in a non-trivial way. Since only a small fraction of haloes is being rejected, we expect the biases to be moderate, but for the moment we cannot estimate accurately their impact on the average source or its moments.

Let us emphasize that the above selection criteria should be added to those corresponding to our simulations. Aside from the fact that a $50 \text{ Mpc}^3 h^{-1}$ box size implies a limited range of mass, the universe described in these simulations is more homogeneous than it should be, since each box must satisfy a given mean density.

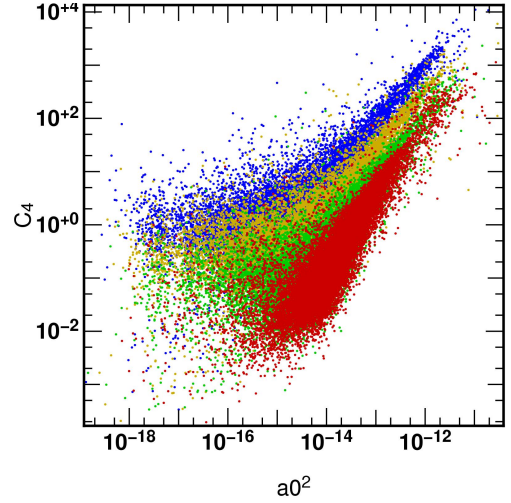


Figure 11. Scatter plot of $C_4^{\omega_\rho}$ versus a_{00}^2 measured at lookback times $t = 7.8$ (red), 5.6 (green), 4 (yellow) and 2.9 (blue) Gyrs. The quantity a_{00} scales as the average accretion rate of the haloes while $C_4^{\omega_\rho}$ scales as the contribution of $\ell = 4$ structures in the flux density of mass measured on the sphere. This plot illustrates how a threshold on the accretion rate affects in a non trivial way the typical clustering measured for ω_ρ . In particular, one should note how $C_4^{\omega_\rho}$ remains constant at recent times for low accretion rates.

In other words, the probability of rare events is reduced. This effect should not influence the number of haloes with high accretion rate, since strong accretions are a priori rejected. On the other hand, this effect should influence the number of objects which experience low accretion history, which are probably less numerous in our simulations than in larger simulated volumes since voids are less likely. Furthermore, the intrinsic mass resolution sets a minimum accretion rate equals to one particle mass ($5 \cdot 10^9 M_\odot$) per time interval. One could imagine an object with a mass smaller than the particle’s mass and such an object would not be included in the simulation at the current resolution. Furthermore, an object with a mass equal to a few times the minimum mass would be considered as diffuse accretion. Finally this mass resolution is related to the spatial resolution, which limits intrinsically the angular description of fluxes on the virial sphere. For a given type of simulation, all these effects cannot be avoided and reduce the representability of the following measurements.

In short, our strategy involves a bias in mass, in redshift, in resolution and in strength of merging event. However these biases should only influence extreme realizations (related to e.g. very low accretion or equal mass mergers) of the source or the external potential and since we focus on the typical scales, presumably related to moderate interactions, they should hopefully not significantly affect the measurements.

4.3 Reduction procedure

In the following discussion most of the distances (resp. velocities) will be expressed as functions of the virial radius R_{200} (resp. the circular velocity V_c) measured at $z = 0$. These quantities are related to the halo’s final mass by

$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{R_{200}}} \quad (52)$$

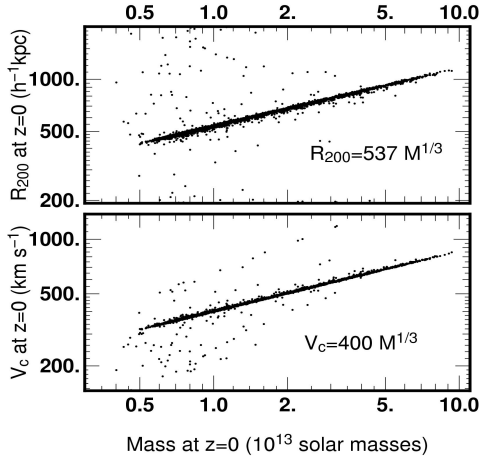


Figure 12. Virial radii (R_{200}) and circular velocities (V_c) as functions of haloes final masses. The quantities have been measured at redshift $z = 0$. Scaling relations between R_{200} or V_c and the final mass are also given.

The mass-dependence of R_{200} and V_c are given in Fig. (12) and may be fitted by:

$$R_{200} = 537 M^{\frac{1}{3}}, \quad V_c = 400 M^{\frac{1}{3}}, \quad (53)$$

where R_{200} is expressed in (h^{-1} kpc), V_c in km/s and M in units of $10^{13} M_{\odot}$. R_{200} and V_c appear to be strongly correlated to the final masses of haloes. Since the selection criteria are quite restrictive, all the haloes experience the same relatively quiet history of accretion and result in almost no scatter.

The simulations in that redshift interval involved 15 snapshots sampled with $\Delta(\log z) = \text{cst}$ for $z \leq 1$ down to $z = 0.1$ plus a snapshot at $z = 0$. The gap between the last snapshot and the last but one is nearly 1.4 Gyr. As a consequence, the assumption of ballistic trajectories is not valid anymore (see appendix). Simulations were re-sampled in 15 bins distributed regularly in time (i.e not in redshift) using the procedure described in Section 3.2: the corresponding time step is ~ 500 Gyrs. To take into account the last gap, results obtained from the last three ‘new’ bins (which cover the last 1.4 Gyr) were averaged into a single bin centred on 0.8 Gyr.

The source coefficients, $c_{\alpha, \mathbf{m}}^{\mathbf{m}}(t)$, were computed following the procedure described in section 3.4. Maximum harmonic orders were set to $\ell_{\max} = 50$ for the position-angular description. For a typical halo with $R_{200} = 500$ kpc, $\ell_{\max} = 50$ corresponds to a spatial scale of $30 kpc$, i.e. equals to 1.5 times the spatial resolution of the simulation. The harmonic description of the velocities angular dependence is restricted to $\ell'_{\max} = 15$. The velocity amplitude is projected on a gaussian basis which involves 25 functions regularly spaced from $v/v_c = 0$ to $v/v_c = 1.5$ with an r.m.s of 0.03. These parameters allow a satisfying reproduction of distributions computed from particles.

The external potential coefficients, $b_{\mathbf{m}}(t)$, were computed following the procedure described in section 3.4. Only particles within a 4 Mpc physical sphere centred on the halo are taken into account. Maximum harmonic orders were set to $\ell_{\max} = 20$.

100 simulations have been fully reduced allowing to compute $c_{\alpha, \mathbf{m}}^{\mathbf{m}}(t)$ and $b_{\mathbf{m}}(t)$ for 15000 haloes. Since we have constructed a

well-defined, (if only biased) sample of histories of haloes in our simulations, we may project it on our basis, and compute the external potential and the flux density of mass, following Section 3.4. We will characterize the corresponding coefficients, via one-point (Section 5) and two-point (Section 6) statistics.

5 ONE-POINT STATISTICS

In this section, we describe the evolution and the statistical distributions of the global properties (i.e. integrated over the sphere) of the source and the potential. We discuss the evolution of the mean potential, of the mass flux $\Phi^M(t)$ and the kinematical properties of s^e via the velocity distribution $\phi(v)$ and the impact parameter distribution $\vartheta(b)$.

5.1 Mean External potential

The mean external potential on the sphere is actually quite meaningless but is being used as a normalization value for potential fluctuations (see section 6.1). Because of isotropy, the mean potential is seen as a monopole and only the $b_{00}(t)$ coefficient is statistically different from zero. Furthermore, one can see from equation (24) that the three-dimensional potential component induced by the monopole is a constant potential throughout the sphere volume. As a consequence, it has no impact on the halo dynamics.

Still, the time evolution of the $\langle b_{00} \rangle$ coefficient is given in Fig. (13). The $b_{00}(t)$ distribution exhibits a tail due to large $-b_{00}$ values and is better fitted with a Log-Normal distribution than with a Normal distribution (see Fig. C1). Hence $\langle b_{00} \rangle$ stands for the most probable value of the fitting distribution. Since the measured distribution is quite peaked, fits made with a Normal distribution (not shown here) return a very similar time evolution of the mode position.

The time evolution shown in Fig. (13) reflects the measurement procedure. Since, the potential is computed from all the particles contained within a fixed physical volume, the overall expansion implies that particles tend to exit the measurement volume with time. In other words, the average density in the measurement volume decreases with time. This effect leads naturally to the decline of the average potential within the virial sphere due to external material.

5.2 Mass flux: $\Phi^M(t)$

At each time-step, the $a_{0,0}$ distribution is fitted by a Gaussian function with mean $\langle a_{0,0} \rangle$ (see also Fig. (C3)). This Gaussian hypothesis is clearly verified for low redshifts while strong accretions events give rise to a tail in the $a_{0,0}$ distribution at high z . At these epochs (lookback time $t > 7$ Gyr) the Gaussian fit tend to slightly overestimate the mode position. Still, the Gaussian hypothesis remains a good approximation of the distribution while the time evolution of the Gaussian mean value $\langle a_{0,0} \rangle(t)$ represents well the evolution of the mode of $a_{0,0}$.

The time evolution of the average flux of matter through the sphere, $\Phi^M(t) = \overline{\omega_{\rho}}$ is directly obtained from the evolution of the monopole (see equation (44)) and is shown in Fig. (14). It can be fitted by:

$$\Phi^M(t) \equiv \langle \overline{\omega_{\rho}} \rangle(t) = -0.81t^3 + 10.7t^2 - 19.3t + 17.57, \quad (54)$$

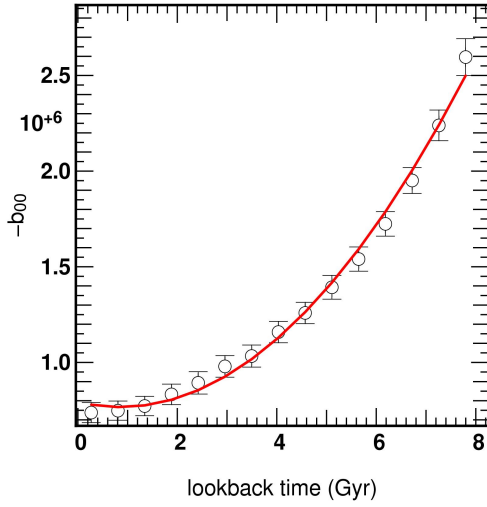


Figure 13. The time evolution of the monopole component of the external potential, $b_{00}(t)$. The time evolution is fitted by a second order polynomial $-b_{00}(t) = 35948 * t^2 - 61480.7 * t + 793067$. Look back time t is expressed in Gyr while b_{00} coefficients are expressed in units of GM/R . M is expressed in $10^{10} M_{\odot}$, R in kpc h^{-1} and $G=43007$ in internal units.

where $\Phi^M(t)$ is in units of $M_{\odot}/\text{Myr}/\text{kpc}^2$ and look-back time t is expressed in Gyr. As expected, the average quantity of material accreted by haloes decreases with time. For $z < 1$, a large fraction of the objects we are interested in are already ‘formed’ and only gain matter through the accretion of small objects or diffuse material. In a hierarchical scenario, such source of matter become scarcer, resulting in a decreasing accretion rate. Furthermore, recall that $\Phi^M(t)$ is measured as a net flux, i.e. the outflowing material may cancel a fraction of the infalling flux. Therefore, the decrease with time may also be the consequence of an increasing contribution of outflows: the measurement radius $R_{200}(z=0)$ becomes the actual virial radius of the halo as time goes by, i.e. the radius where the inner material is re-processed and where outflows are susceptible to be detected.

As a check we computed the average mass accretion history (MAH hereafter) of our haloes. The MAH $\Psi(t)$ is defined as:

$$\Psi(t) \equiv \frac{M(t)}{M(z=0)}, \quad (55)$$

where $M(z)$ is the halo’s mass at a given instant. Using the extended Press-Schechter formalism, [van den Bosch \(2002a\)](#) showed that haloes have an universal MAH, fitted by the following formula:

$$\log(\Psi(M(z=0), t)) = -0.301 \left[\frac{\log(1+z)}{\log(1+z_f)} \right]^{\nu}, \quad (56)$$

where z_f and ν are two parameters which depend on the considered class of mass only. For each halo, we computed its mass evolution $M(t)$ from its final mass $M(z=0)$ and its integrated flux of matter $\Phi^M(t)$:

$$M(t) = M(t=0) - 4\pi R_{200}^2 \int_{t=0}^t dt \Phi^M(t). \quad (57)$$

From equation (55) we computed $\Psi(t)$ for each halo. We compared the *median* value of $\Psi(t)$ for three classes of mass to the fit suggested by [van den Bosch \(2002a\)](#) (see Fig. (14)). For the three classes the agreement with the fitting formula is qualitatively satis-

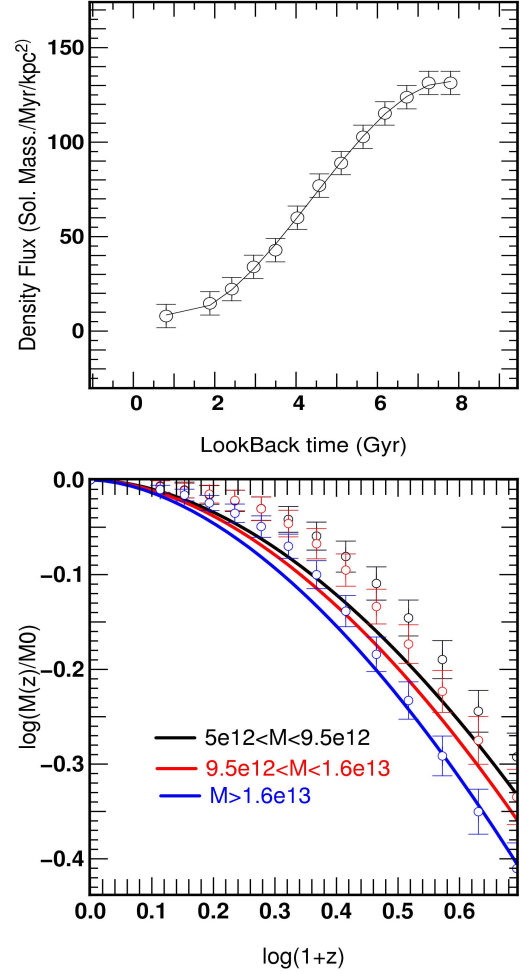


Figure 14. *Top:* Time evolution of the average flux density of matter through the virial sphere, $\langle \Phi^M(t) \rangle = \langle \bar{\omega}_p \rangle(t)$ (symbols). Bars stand for 3σ errors. Here $\Phi^M(t)$ is computed directly from a_{00} coefficients following equation (57). Its time evolution is fitted by a 3rd order polynomial (solid line). *Bottom:* the mass accretion history $\log M(z)/M(z=0)$ for three different class of masses. Masses are expressed in solar masses. Symbols represent the median value of $\log M(z)/M(z=0)$ within each class. Lines represent the fitting function suggested by [van den Bosch \(2002a\)](#). Even though the global behaviour is reproduced by the fitting functions, the measured accretion rate is systematically smaller. This discrepancy has already been noted by [van den Bosch \(2002a\)](#).

fying: the three measurements evolve in the expected manner while their relative positions are the same as the relative positions of the three fits. However our measurements are quantitatively inconsistent with the three curves. At low redshift, $\Psi(t)$ is systematically larger than the expected value (i.e. the accretion rate is *smaller*) at these times. The median mass at $z=1$ is well recovered even though the two methods disagree slightly quantitatively. In other words, our measurements overestimate the accretion at high redshift and underestimates accretion at low redshift and from the measurement procedure through the sphere. At higher redshift, accreted material is considered to be added to the biggest progenitor, even though it has not yet reached the central object: its mass is overestimated. Still, this material ends up in the most massive progenitor and the final mass is recovered. Note that since we ap-

ply specific selection criteria, our haloes may not be completely representative of the whole population of haloes. Finally we represent here the *median* value of $\Psi(t)$ because of strong outliers while the fitting formula is given for the *average* MAH (extracted from merger trees). A similar discrepancy had already been noticed by van den Bosch (2002a) between the Press-Schechter prediction and the results obtained from numerical simulations. In particular, van den Bosch (2002a) found that the Press-Schechter models tend to underestimate the formation time haloes compared to simulations. Clearly, our measurements seem to confirm this discrepancy. Since the global behavior of MAHs is recovered and since the median mass at $z = 1$ is recovered, we consider that the measure of $\Phi^M(t)$ through the virial sphere reproduces the accretion history of haloes.

5.3 Mean kinematics

Let us now turn to the kinematical properties of the flow, while averaging the source over the virial sphere.

5.3.1 probability distribution of the modulus of velocities

Given the source coefficients $c_{\alpha,m}^m$, the average velocity distribution $\langle \varphi(v, t) \rangle$ (defined by equation (49)) is easily computed since it only involves $\langle c_{\alpha,0}^0(t) \rangle$. The ensemble average of $\langle c_{\alpha,0}^0 \rangle$ and the related ensemble dispersion $\sigma(c_{\alpha,0}^0(t)) \equiv \langle (c_{\alpha,0}^0 - \langle c_{\alpha,0}^0 \rangle)^2 \rangle$ are obtained by fitting the $c_{\alpha,0}^0(t)$ distribution by a Gaussian function. From these two quantities, we get:

$$\langle \varphi(v, t) \rangle = 4\pi v^2 \sum_{\alpha} g_{\alpha}(v) \langle c_{\alpha,0}^0 \rangle, \quad (58)$$

and

$$\sigma[\varphi(v, t)] = 4\pi v^2 \sqrt{\sum_{\alpha} g_{\alpha}(v)^2 \sigma(c_{\alpha,0}^0)^2}, \quad (59)$$

which are respectively the ensemble average and r.m.s. of the velocity distribution. The time evolution of $\langle \varphi(v, t) \rangle$ is given in Fig. (15) and (16). Errors on $\langle \varphi(v, t) \rangle$ are computed as

$$\Delta[\langle \varphi(v, t) \rangle] = 3 \frac{\sigma[\varphi(v, t)]}{\sqrt{N_{\text{haloes}}}}. \quad (60)$$

At ‘early times’ ($t > 5$ Gyr), the distribution is unimodal with a maximum around $0.7V_c(z=0)$. No outflows is detected while the infalling dark matter dominates. At later times, $\langle \varphi(v, t) \rangle$ drops below zero for velocities around $0.4V_c(z=0)$. Outflows dominate at ‘low’ velocities. Meanwhile the amplitude of the previous peak decreases and shift to higher velocities. The fraction of infall relative to the total amount of material passing through the sphere drops from 1. to 0.6 between $t = 8$ Gyr and $t = 0.8$ Gyr.

This behavior is likely to be due to our measurement at a *fixed* radius, $R_{200}(z=0)$. At ‘early times’, this measurement radius is bigger than the actual virial radius of haloes. Thus no sign of ‘virialization’ (outflows consecutive to accretion) is detected. Later, the actual R_{200} gets closer to the measurement radius. Outflows pass through the measurement radius as a sign of internal dynamical reorganization. The fact that accretion intrinsically decreases with time would provide another explanation for this trend. This decrease can actually be traced in Fig. (15), (16) and (17).

The global behavior of $\langle \varphi(v, t) \rangle$ can be modelled by summing two Gaussians representing the infalling and outflowing compo-

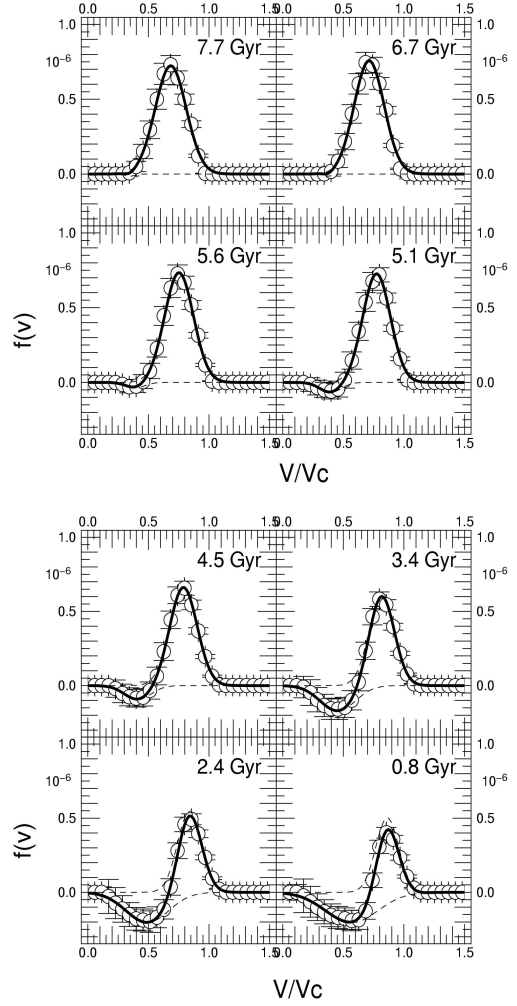


Figure 15. The time evolution of the average velocity distribution, $\langle \varphi(v, t) \rangle$, defined by equation (49), for $z < 1$ (symbols). Ages are expressed as look-back times (i.e. $t = 0$ for $z = 0$). Velocities are given relative to the halo’s circular velocity at $z = 0$. Y-axis unit is $5 \cdot 10^9 M_{\odot}/\text{kpc}^2/\text{Myr}/V_c$. Error bars stand for $3 - \sigma$ errors. Here $\varphi(v)$ is fitted by the sum of two Gaussians with opposite signs (solid line). Each Gaussian’s contribution is also shown (dashed lines).

nents:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(v, t) \rangle = & \frac{q_{i,3}(t)}{q_{i,2}(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-q_{i,1}(t))^2}{2q_{i,2}(t)^2}} \\ & + \frac{q_{o,3}(t)}{q_{o,2}(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-q_{o,1}(t))^2}{2q_{o,2}(t)^2}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Subscripts i and o stand for infall and outflow. Note that $q_{i,3}(t) \geq 0$ and $q_{o,3}(t) \leq 0$. The time evolution of coefficients is given in Fig. (17), where t should be expressed in Gyr and $\varphi(v, t)$ unit is $5 \cdot 10^9 M_{\odot}/\text{kpc}^2/\text{Myr}/V_c$. Examples of fits are shown as solid lines in Fig. (15). Note that all six coefficients evolve roughly linearly with time (see Fig. (17)). Their linear fitting parameters are given in table 2. Using equation (61) and the linear parameterization of the Gaussians coefficients, $\langle \varphi(v, t) \rangle$ is reproduced accurately. The only restriction concerns the negative Gaussian’s amplitude ($q_{o,3}$) which

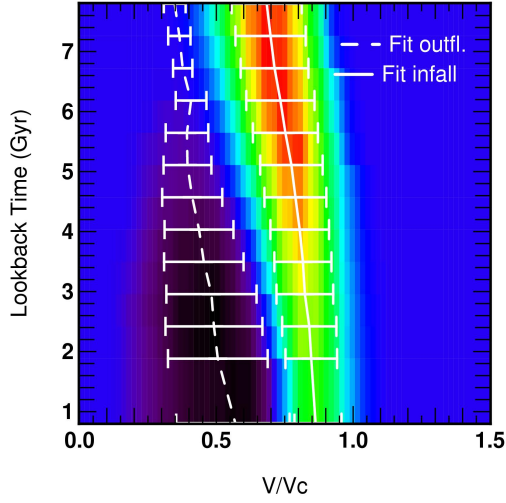


Figure 16. The time evolution of the average velocity distribution in the t - V/V_c plane. Red symbols stand for positive values of the distribution (i.e. infall) while blue symbols stand for negative ones (i.e. outflows). Each of these components is fitted by a Gaussian function in the V/V_c space. The time evolutions of the mean of the Gaussians are given by the two lines (solid for infall, dashed for outflows). The Gaussians r.m.s. are also shown as bars.

should not be greater than 0. Since this condition is not naturally satisfied by a linear fit, it should be set by hand.

The evolution of the relative positions of two Gaussians is given in Fig. (16). For $t > 5$ Gyr, it is consistent with the ‘no outflow’ hypothesis, the amplitude of the negative Gaussian being close to zero at this epoch. Both Gaussians mean values seem to drift to higher velocities as a function of time. Even though the relative velocity of accreted material is determined by the initial conditions (namely large scale clustering), the velocity of an infalling satellite should partly reflect the properties of the accreting body. A dense massive halo will not accrete like a fluffy light one. In other words, the velocity of infalling material should reflect the actual circular velocity of the accreting body. As a consequence it is expected that accretion velocity drifts with time towards $V_c(z=0)$.

Furthermore, the mean values of both Gaussians evolves roughly linearly over the whole time range with comparable rate of change (see figure 17 and the following discussion). As a consequence, their relative positions remains roughly constant (see figure 16). This indicates that these two components may be physically related, outflows being the consequence of a past accretion. Mamon et al. (2004) mention the existence of a *backsplash* population, rebounding through the virial radius and this population is known to have a different velocity (e.g. Gill et al. (2004)). The outflows detected via our description of the source are consistent with this backsplash component. The difference in velocity may be explained if outflows are representative of an earlier accretion with a velocity typical of earlier times. Also, past accreted material is influenced by the halo’s internal dynamics. Its velocity distribution would be ‘reprocessed’ (e.g. via dynamical friction, tidal stripping or phase mixing) to lower velocities as the material exits through the measurement radius.

However, it should be recalled that the distribution shown here is a ‘net’ distribution. In other words, it is quite plausible that an outflowing component may be completely cancelled by an in-

	m	n
$q_{i,1}$	-0.028	0.912
$q_{i,2}$	0.0059	0.084
$q_{i,3}$	2.1e-8	9.03e-8
$q_{o,1}$	-0.026	0.54
$q_{o,2}$	-0.028	0.23
$q_{o,3}^{(*)}$	1.79e-8	-1.22e-7

Table 2. Fitting parameters for the time evolution of Gaussian coefficients, $q(t) = m \times t(\text{Gyr}) + n$. These coefficients, together with equation (61) allow us to compute the time evolution of $\langle \varphi(v, t) \rangle$. (*) By definition, $q_{o,3} \leq 0$.

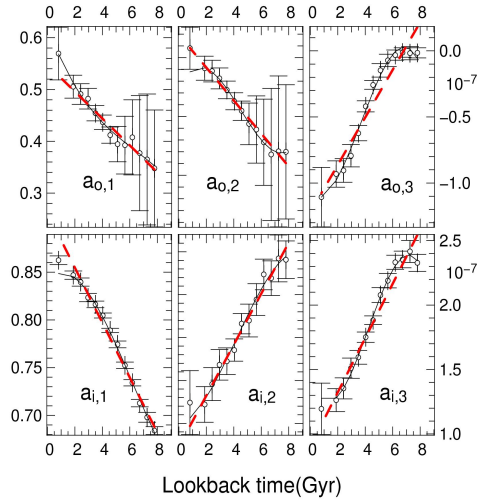


Figure 17. time evolution of the fitted coefficients (given in table 2) of the PDF $\langle \varphi(v, t) \rangle$ for the parameterization suggested in equation (61) (symbols). Bars stand for the 3σ errors on the coefficients determination. $q_{i,k}$, $k = 1, 2, 3$ are respectively the mean, the r.m.s and the amplitude of the positive Gaussian (i.e. infalling component). $q_{o,k}$, $k = 1, 2, 3$ are the corresponding values for the negative Gaussian (i.e. outflowing component). The trend is accurately fitted by a linear relation (red dashed line).

falling component which has an exact opposite distribution. This effect is illustrated by Fig. (18) where the velocity distribution of infall and outflows are being shown separately. This distribution has been computed from 300 haloes at $t=2.3$ Gyr. This distribution is quite representative of the average ones, except a few high velocities events which skew the distribution of the infalling component and which are induced by outliers. If the Gaussians fits are removed from these two separate distributions, two almost identical distributions appear for the two components, centred on $V/V_c \sim 0.6$. These two identical distributions are related to the virialised component of infall, which already interacted with the inner region of the halo. The overall shape of these two distributions may provide insight on the typical dynamical state in the haloes’ inner regions.

5.3.2 Impact parameters and incidence angles

The average distribution of incidence angle, $\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle$ has been computed following the same procedure described above for $\langle \varphi(v, t) \rangle$. Defining $\tilde{c}_{\ell'}(t)$ as:

$$\tilde{c}_{\ell'}(t) = 2\pi\sqrt{4\pi} \sum_{\alpha} c_{\alpha,0,\{\ell',0\}} (\mu_{\alpha}^2 + \sigma^2), \quad (62)$$

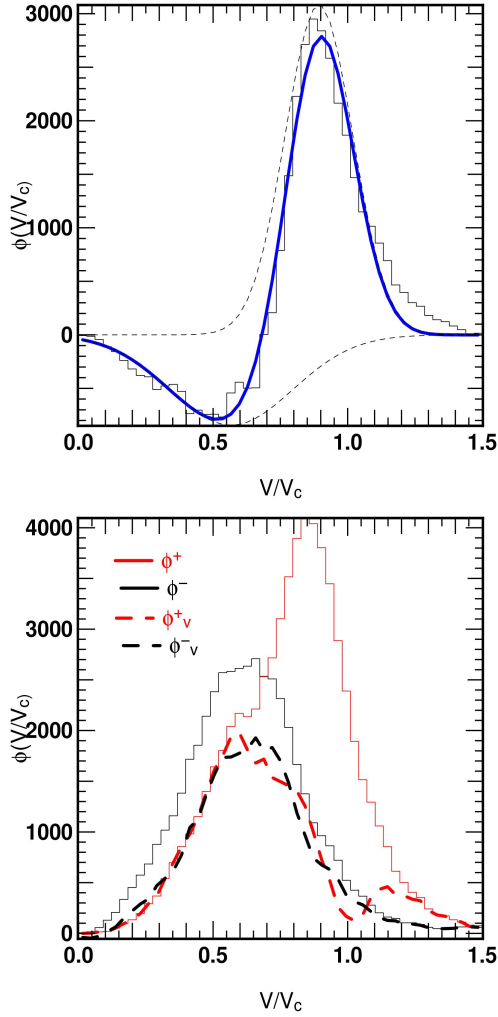


Figure 18. *Top:* the net velocities distribution (histogram) measured from 300 haloes at $t=3.4$ Gyr. This distribution is representative of the distribution computed from coefficients and averaged over 15 000 haloes. Velocities are given in circular velocity unit while y-axis units are arbitrary. The two components are fitted by two Gaussians (dashed lines). *Bottom:* the separate velocities distribution of accretion (red histogram) and outflows (black histogram). The dashed curves represent the difference between these two distributions and their respective fits shown above. It results in two residual distribution, centred on the same velocity and displaying nearly the same shape. This two residual distributions describes the material which already experienced one passage through the virial sphere.

we get

$$\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle = \sum_{\ell'} Y_{\ell',0}(\Gamma) \langle \tilde{c}_{\ell'}(t) \rangle, \quad (63)$$

and

$$\sigma(\vartheta(\Gamma_1, t)) = \sqrt{\sum_{\ell'} Y_{\ell',0}(\Gamma)^2 \sigma(\tilde{c}_{\ell'}(t))^2}, \quad (64)$$

where $\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle$ and $\sigma(\vartheta(\Gamma_1, t))$ are obtained by fitting the $\tilde{c}_{\ell'}(t)$ distribution by a Gaussian function. Errors on $\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle$ are computed similarly to errors on $\langle \varphi(v, t) \rangle$ (see equation (60)). The time evolution of $\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle$ is shown in Fig. (19). Since the impact parameter and the incidence angle are simply related by $b/R_{200} = \sin(\Gamma_1)$, $\langle \vartheta(b, t) \rangle$ is also easily computed.

The infall ($\Gamma_1 > \pi/2$ or the upper branch in $\langle \vartheta(b, t) \rangle$ diagrams) is clearly mostly radial. The infalling part of the distribution peaks for $\Gamma_1 \sim \pi$ instead of having a uniform behavior and this trend can be observed for all redshifts below 1. The distribution slightly widens with but remains skewed toward large values of Γ_1 . In the $\langle \vartheta(b, t) \rangle$ representation, the higher branch becomes flatter with time. The outflows ($\Gamma_1 < \pi/2$ or lower branch in $\langle \vartheta(b, t) \rangle$ diagrams) are mainly undetectable during early times, as seen already earlier. As time increases, the outflow contribution becomes stronger and radial orbits ($\Gamma_1 \sim 0$) also appear to be dominant. However the behavior of the ‘outflowing’ part of the $\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle$ distribution is almost linear and does not peak. Tangential orbits cannot be neglected for this component.

The evolution of $\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle$ can be fitted by the following parametrisation:

$$\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}p_1(t)} e^{-\frac{(\Gamma_1 - \pi)^2}{2p_1(t)^2}} + p_2(t)\Gamma_1 + p_3(t), \quad (65)$$

where $p_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ in our units. The ‘infalling’ part is modelled as a Gaussian while the ‘outflowing’ part is fitted linearly. The time evolution of the three parameters $p_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ can be fitted by a linear evolution and the related linear parameters are given in table 3. The evolution of $p_1(t)$ confirms that the ‘infalling’ part of the distribution, $\langle \vartheta(\Gamma_1, t) \rangle$ widens with time.

This result implies that material experiences a circularization as it interacts with the halo. Consequently, orbits are more tangential as particles *exits* and *re-enter* the halo’s sphere. Such an effect has already been measured by e.g. Gill et al. (2004). Dynamical friction would provide a natural explanation for this evolution of the orbits, but this argument is refuted by e.g. Colpi et al. (1999) or Hashimoto et al. (2003). Gill et al. (2004) mention the secular evolution of the potential well induced by the halo would affect the orbits of infalling material and satellites. Other processes such as tidal stripping or satellite-satellite interactions may also modify the orbital parameters of dark matter fluxes. Clearly, the interactions between the infall and the halo drive this circularization but the detailed process still has to be understood.

This dynamical circularization would also explain why the ‘outflowing’ part of the $\langle \vartheta(\Gamma_1) \rangle$ (or $\langle \vartheta(b) \rangle$) is flatter than the infalling one: by definition this component interacted with the halo in the past, unlike most of the infall. Finally, the Γ_1 or b representation explicitly separates infall and outflows. It implies that *virialized* particles which pass through the sphere do not ‘cancel’ each other and do contribute to the distributions. Such a ‘relaxed’ material is likely to have a non-zero tangential motion, flattening the distributions as its contribution becomes important. Since the actual size of the halo gets closer to the measurement radius as time advances, this component contributes more with time and its flattening effect on the incidence angle (or impact parameter) distributions should increase as well.

The Fig. (21) presents the correlation between the velocity amplitude v and the impact parameter b , at four different instants and for both the infall and the outflow component. Considering these two components separately, no correlation can be found: the incidence does not depend on the amplitude on first approximation. The only noticeable result comes from the fact that accreted material has systematically a higher velocity than outflows, which confirms the results obtained from the distribution of velocities only. Again,

	m	n
p_1	-0.038	0.83
p_2	-3.12e-8	2.29e-7
p_3	8.59e-8	-6.64e-7

Table 3. Fitting parameters for the time evolution $p_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ parameters. $p(t) = m \times t(\text{Gyr}) + n$. Together with equation (65), these coefficients allow to predict the time evolution of $\langle \theta(\Gamma_1, t) \rangle$.

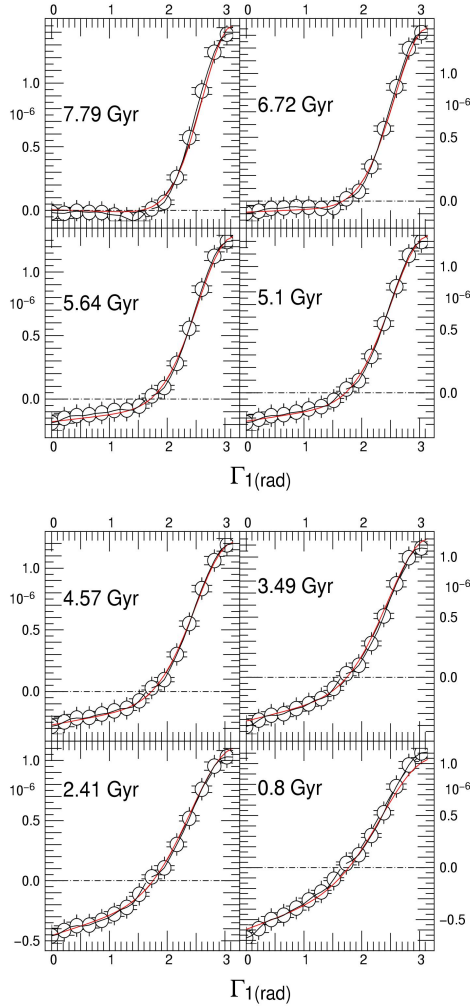


Figure 19. The time evolution (symbols) of the distribution of the average incidence angle Γ_1 $\langle \theta(\Gamma_1) \rangle$, defined by equation (47). Ages are expressed as look-back time. Bars stand for 3σ errors. Y-axis unit is $5 \cdot 10^9 \text{M}_\odot/\text{kpc}^2/\text{Myr}$. Outflows are counted negatively, leading to negative values of $\langle \theta(\Gamma_1) \rangle$ for $\Gamma_1 < \pi/2$. The result of the model described in equation (65) is also shown (red line).

we relate this effect to the separate origin of these two fluxes, accretion being dominated by newly accreted material and outflows which were processed by the inner dynamics of haloes.

6 TWO-POINT STATISTICS

In this section, we consider second-order statistics, focusing on the correlation on the virial sphere. The two-point correlations

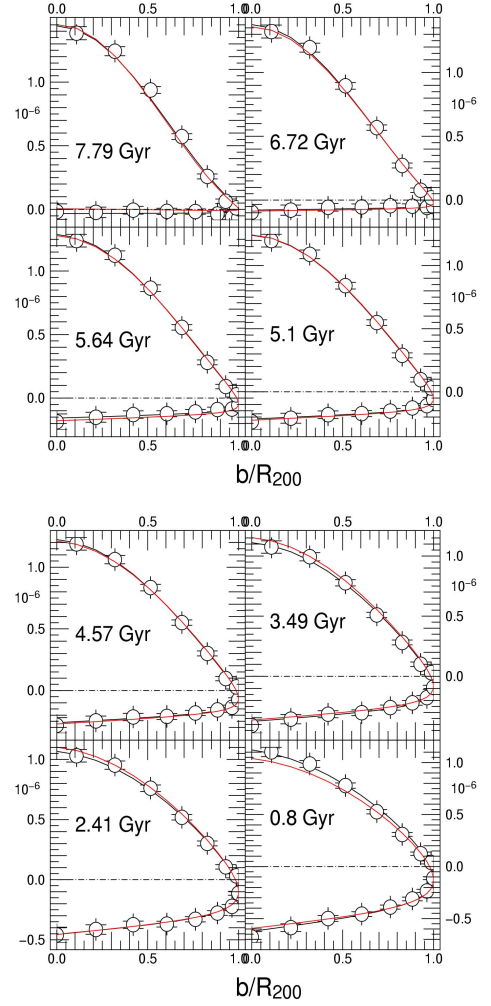


Figure 20. The time evolution (symbols) of the impact parameter b distribution $\langle \theta(b, t) \rangle$, defined by equation (47). Ages are expressed as look-back time. Bars stand for 3σ errors. Y-axis unit is $5 \cdot 10^9 \text{M}_\odot/\text{kpc}^2/\text{Myr}$. The lower (resp. higher) branch is the $\langle \theta(b, t) \rangle$ distribution for outflows (resp. infall). The result of the model described in equation (65) is also shown (red line).

are assessed through the angular power spectrum and the angular-temporal correlation function for both the external potential, ψ^e and the first moment of the source term, i.e. the flux density of mass ω_ρ .

6.1 External potential

6.1.1 Angular power spectrum

The potential's angular power spectrum $C_\ell^{\psi^e}$ is computed for each halo from the $\tilde{b}_{\ell,m}$ coefficients (Aubert et al. (2004)):

$$\tilde{b}_{\ell,m} \equiv \sqrt{4\pi} \left(\frac{b_{\ell,m}}{\langle b_{00} \rangle} - \delta_{\ell 0} \frac{b_{0,0}}{\langle b_{00} \rangle} \right), \quad (66)$$

related to the potential contrast:

$$\delta_{[\psi^e]}(\mathbf{\Omega}) \equiv \frac{\psi^e(\mathbf{\Omega}) - \overline{\psi^e}}{\langle \psi^e \rangle} = \sum_{\ell,m} \tilde{b}_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\mathbf{\Omega}). \quad (67)$$

The probability distribution of $C_\ell^{\psi^e}(t)$ was weighted as described in appendix A. For each time step and for each harmonic ℓ , we fit

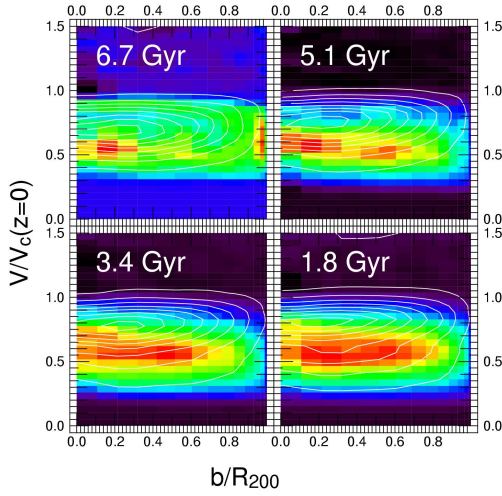


Figure 21. *Top:* The distribution, $\langle \rho(b, v) \rangle$, of particles in the (b, v) subspace at lookback time $t = 1.8, 3.4, 5.1$ and 6.7 Gyr; the infall (contour plot) and outflow (density plot) are represented separately. Beyond the bimodal feature, no residual correlation appears.

ted the $C_\ell^{\psi^e}$ by a log-normal distribution (see Fig. C2). We define $\langle C_\ell^{\psi^e} \rangle(t)$ as the mode of the fitting distribution. The time evolution of the external potential's power spectrum is shown in figure 22. Globally the power spectrum is dominated by large scales and is quite insensitive to time evolution. However, two regimes may be distinguished. For low order harmonics, $\langle C_\ell^{\psi^e} \rangle(t)$ remains mostly constant. For smaller scales ($\ell > 5$), $\langle C_\ell^{\psi^e} \rangle(t)$ increases along time. As a consequence the power spectrum's amplitude does not change but its shape evolves while smaller scales become more important relative to larger scales.

These two regimes reflect the twofold nature of tidal interactions of a halo with its environment. Small angular variations of the potential relate to small spatial scales and presumably track the presence of objects which are getting closer or going through the virial sphere. Since small scale contribution increases, it suggests that these objects tend to get smaller with time. It would be consistent with the global decrease of the accretion rate, as long as the merger rate does not increase strongly during this epoch. However, the rise of small scales may also be related to an increasing contribution of weak and poorly resolved accretion events. In such a case, we would be measuring the isolated particles contribution to the potential. This possibility is investigated in section 6.2.

Meanwhile, large scale fluctuations of the potential ($\ell \leq 4$) may reflect the 'cosmic tidal field' resulting from the distribution of matter around the halo on scales larger than the halo's radius. The amplitude of such a tidal field should remain fairly constant, as indeed measured. Furthermore, the peripheral distribution of matter is not spherically distributed but is rather elongated along some direction: haloes tend to be triaxial with their ellipsoid aligned with the surrounding distribution of satellites. The intersect of an elongated distribution of matter with the virial sphere would induce a quadrupolar component, as detected in our measurements. These two effects cannot be easily disentangled, since they actually are two sides of the same effect. The large scale distribution of matter is responsible of both the 'cosmic tidal field' and the halo triaxiality (via the distribution of satellites). In other words, it is not

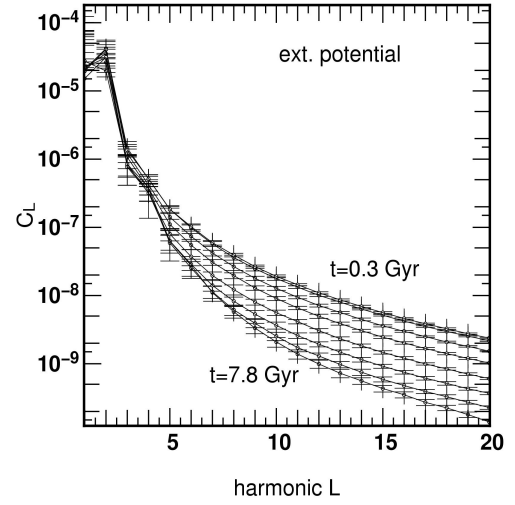


Figure 22. The angular power spectrum of the external gravitational potential $\psi^e(\Omega, t)$. Symbols represent the *mode* of the $C_\ell^{\psi^e}$ distribution for each harmonic ℓ and each time step. Times are lookback times. Bars stand for $3 - \sigma$ errors on the mode value. The large scales contribution remains constant with time while the small scales contribution smoothly increases with time. The bump for the $\langle C_2 \rangle$ component indicates a strong quadrupolar configuration for $\psi^e(\Omega, t)$.

clear whether the large-scale behaviour of $\langle C_\ell^{\psi^e} \rangle(t)$ reflects the tidal field or the halo's reaction to this tidal field.

6.1.2 Angulo-temporal correlation

6.1.2.1 Correlations and coherence time To investigate further these two regime of tidal interactions, we computed the angulo-temporal correlation function of the external potential contrast, defined as

$$\langle w^e(\theta, t, t + \Delta t) \rangle = \langle \delta_{[\psi^e]}(\Omega, t) \delta_{[\psi^e]}(\Omega + \Delta\Omega, t + \Delta t) \rangle, \quad (68)$$

which is related to $T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t)$ coefficients by:

$$w^e(\theta, t, t + \Delta t) = \sum_\ell T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t) (2\ell + 1) P_\ell(\cos(\theta)), \quad (69)$$

where

$$T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t) \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \tilde{b}_{\ell m}(t) \tilde{b}_{\ell m}^*(t + \Delta t). \quad (70)$$

Here, θ stand for the angular distance between two points on the sphere located at Ω and $\Omega + \Delta\Omega$. The $T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t)$ coefficients were computed for each halo for each pair of time steps and for each harmonic. The $T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t)$ distributions were fitted by a log normal distribution and deduced $\langle T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t) \rangle$ from it. The corresponding $\langle w^e(\theta, t, t + \Delta t) \rangle$ are shown in figure Fig. (23).

For large angular scales (> 45 degrees), isocontours remain open on the whole time range. Large scales have a long coherence time (~ 5 Gyrs) and are consistent with a 'cosmic tidal field' resulting from the large scale distribution of matter. The latter is not expected to evolve significantly with time at our redshifts and the halo's triaxiality is also a fairly constant feature. The innermost isocontours are closed around the measurement time t_1 . Small angular scales (< 45 degrees) have shorter coherence time (~ 1.5 Gyr). It is

consistent with a contribution to the potential due to objects where satellites pass by or dive into the halo and apply a tidal field only for a short period.

This difference between large and small scales can also be investigated through the time matrices of the $T_\ell^{\psi^e}(t, t + \Delta t)$ coefficients (see Fig. (24)). The diagonal terms describe the time evolution of the angular power spectrum, $T_\ell^{\psi^e}(t, t) = C_\ell^{\psi^e}(t)$. A smooth (resp. peaked) distribution of values around the diagonal indicates a long (resp. short) coherence time. Clearly different scales have different characteristic time scales. The non-diagonal elements of the quadrupole matrix ($\ell = 2$) decrease slowly with the distance to the diagonal while the T_{20} matrix is almost diagonal. Not surprisingly, the smaller the angular scale, the smaller the coherence time: a small 3D object passing through the sphere is likely to have a small angular size on the sphere.

For a given ℓ and a given t , the correlation coefficients $T_\ell^{\psi^e}$ can be fitted by a Lorentzian function defined by

$$T_\ell(t, t + \Delta t) = \frac{q_3^{\text{Te}}(t)}{2/\pi} \frac{q_2^{\text{Te}}(t)}{(\Delta t - q_1^{\text{Te}}(t))^2 + (q_2^{\text{Te}}(t)/2)^2} + q_4^{\text{Te}}(t). \quad (71)$$

where the characteristic time scale, $\Delta T_{T_\ell^e}$, is given by $q_2^{\text{Te}}(t)$ and the reference time t is equal to $q_1^{\text{Te}}(t)$. Examples of fits are shown in Fig. (25).

For example, the time evolution of $\Delta T_{T_\ell^e} = q_2^{\text{Te}}(t)$ is given in Fig. (25) for different ℓ values. Given the error bars, the characteristic time scales are constant over time (except for the $\ell = 4$ mode). In the prospect of the regeneration of the potential, the stationarity hypothesis can then be considered as valid for most of the angular scales. Meanwhile, the $\ell = 4$ potential fluctuations display a decreasing $\Delta T_{T_\ell^e}$ with time. The same effect exists at a 1σ level for $\ell = 5$. One interpretation would be that satellites achieve higher velocities along time: for a given typical size a faster satellite would spend less time to be accreted and the associated potential would be detected on a smaller time scale. This picture is supported by the results obtained in 5.3.1, where the mean velocity of infalling material increases along time. Another possibility would be that $\ell = 4$ fluctuations had a longer radial extent in the past. Since there is no reason for potential fluctuations to have such a property, one could imagine successive potential fluctuations which overlapped, leading to an apparent longer radial extent. This possibility is further investigated in the following paragraphs, by comparing the coherence time variation of the potential fluctuations to the evolution of the infall's typical velocity.

6.1.2.2 Correlations without the dipole and the quadrupole

In order to focus on the coherence time of small angular scales, we also computed the correlation function $\langle w^e(\theta, t, \Delta t) \rangle$ without the dipole ($\ell = 1$) and the quadrupole ($\ell = 2$) component of the potential (see also equation (69)). The angulo-temporal correlation function is shown in Fig. (26). Again, the isocontours of the correlation function are closed around $\Delta t = 0$. It shows that the potential on the sphere have a finite coherence time. Unlike coherence times measured on the $T_\ell^{\psi^e}$ coefficients, all the angular scales are mixed and the typical time scales are the one of structures as they are 'really' seen from a halocentric point-of view where 'potential blobs' appear and disappear on the sphere. To evaluate the related typical time scale ΔT_{w^e} , we fitted $\langle w^e(\Delta\Omega, t, \Delta t) \rangle$ with a 2D function for

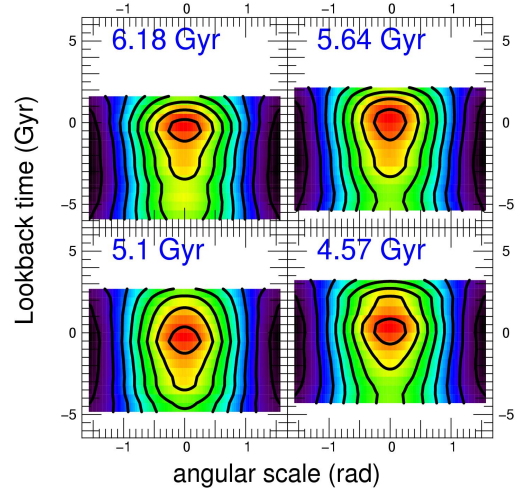


Figure 23. The angulo-temporal correlation function, $w^e(\theta, \Delta t) = \langle \delta_{[\psi^e]}(\Omega, t) \delta_{[\psi^e]}(\Omega + \Delta\Omega, t + \Delta t) \rangle$. Blue (resp. red) colors stand for low (resp. high) values of the correlation. Isocontours are also shown. Large angular scale isocontours ($\theta \sim \pi/2$) have large temporal extent, due to the quadrupole dominance over the potential seen on the virial sphere.

different values of t . The model we used is given by:

$$\begin{aligned} \langle w^e(\theta, t, \Delta t) \rangle &= q_6^{\text{we}}(t) + \frac{q_5^{\text{we}}(t)}{2\pi} \frac{q_4^{\text{we}}(t)}{(\Delta t - q_3^{\text{we}}(t))^2 + (q_4^{\text{we}}(t)/2)^2} \\ &\times \frac{\sin(2\pi(\Delta\Omega - q_1^{\text{we}}(t))/q_2^{\text{we}}(t))}{\Delta\Omega}, \quad (72) \end{aligned}$$

where the angular dependence is fitted by a cardinal sine function while the time dependence is fitted by a Lorentzian function. Examples of 2D fits are shown in Fig. (26). We also computed the correlation function using only harmonics with $\ell \geq 4, 5, 6, 7$ and applied the same fitting procedure. The evolution of the resulting characteristic time scales $\Delta T_{w^e} = q_4^{\text{we}}(t)$ is shown in Fig. (27). Bars stand for 3σ fitting errors.

We find that ΔT_{w^e} tends to decrease with time for every truncation order. The $\ell \geq 3$ and $\ell \geq 4$ correlation function displays a rise of ΔT_{w^e} before it drops to lower values. Furthermore ΔT_{w^e} tend to decrease with ℓ_{min} , suggesting that the ℓ_{min} contribution dominates each w^e reconstruction. Correlation functions with $\ell_{\text{min}} \geq 5$ show marginal ΔT_{w^e} variation but we recall that our time resolution is 0.53 Gyr, then any fluctuations on smaller scales should be taken in caution. Still, the 0.81 Gyr variation observed for $\ell \geq 3$ between $t = 5.1$ Gyrs and $t = 0.8$ Gyr is significant and so is the variation observed for $\ell \geq 4$ (1.3 Gyr).

6.1.2.3 A longer coherence length As mentioned above, the variation of the characteristic time scale can be explained by the measured increase in mean velocity. Conversely, the decrease of coherence time may be the consequence of smaller potential blobs with time: a 'large' (three-dimensional) potential takes longer to disappear than a smaller one. One crude approximation could be:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{V_1 \Delta T_1}{V_2 \Delta T_2}. \quad (73)$$

where L is the radial size of the potential blob, V its radial velocity and ΔT its coherence time. We may assume that the $\ell \geq 4$ truncation is representative of the potential due to infalling ob-

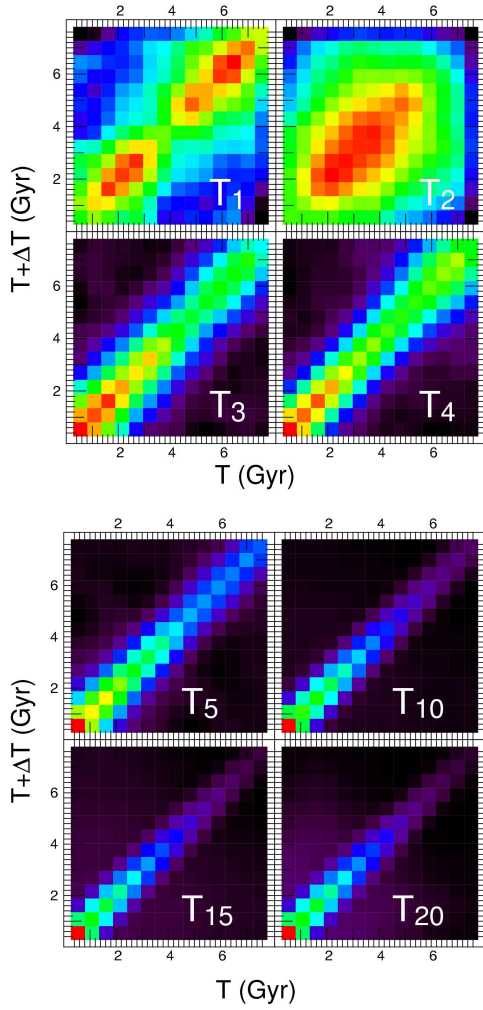


Figure 24. The time matrices of the $T_\ell^{\psi_e}(t, t + \Delta t)$ coefficients. Blue (resp. red) colors stand for low (resp. high) values of the coefficients. The diagonal terms are equal to the angular power spectrum, i.e. $T_\ell^{\psi_e}(t, t) = C_\ell^{\psi_e}(t)$. As can be seen from Fig. (22) fluctuations observed for T_1 are within the error bars. A smooth (resp. sharp) decrease of $T_\ell^{\psi_e}(t, t + \Delta t)$ with the distance to the diagonal imply a long (resp. short) coherence time. Here, coherence time decreases with angular scale.

jects, i.e. $\Delta T_1 / \Delta T_2 \sim 1.95$. We may also consider that the radial velocity variation is equal to the one measured for the mean velocity of infall (see section 5.3.1): $V_1 / V_2 = 0.77$. We find that $L_1 \sim 1.5L_2$, i.e. the radial size decreases with time. The same calculation with $\ell \geq 3$ leads to $L_1 \sim 1.1L_2$ and the results remain qualitatively the same. In other words, the coherence length was longer in the past and the velocity variation cannot explain the coherence time variation. The only other way to explain a longer coherence length would invoke potential blobs falling successively through the sphere, coming from roughly the same direction. To induce a decreasing coherence time, these blobs would have to be either bigger before or either more numerous. Such a crude picture would be coherent with the measured decrease of accretion with time and the anisotropic nature of accretion by haloes (see e.g. Knebe et al. (2004), Aubert et al. (2004)).

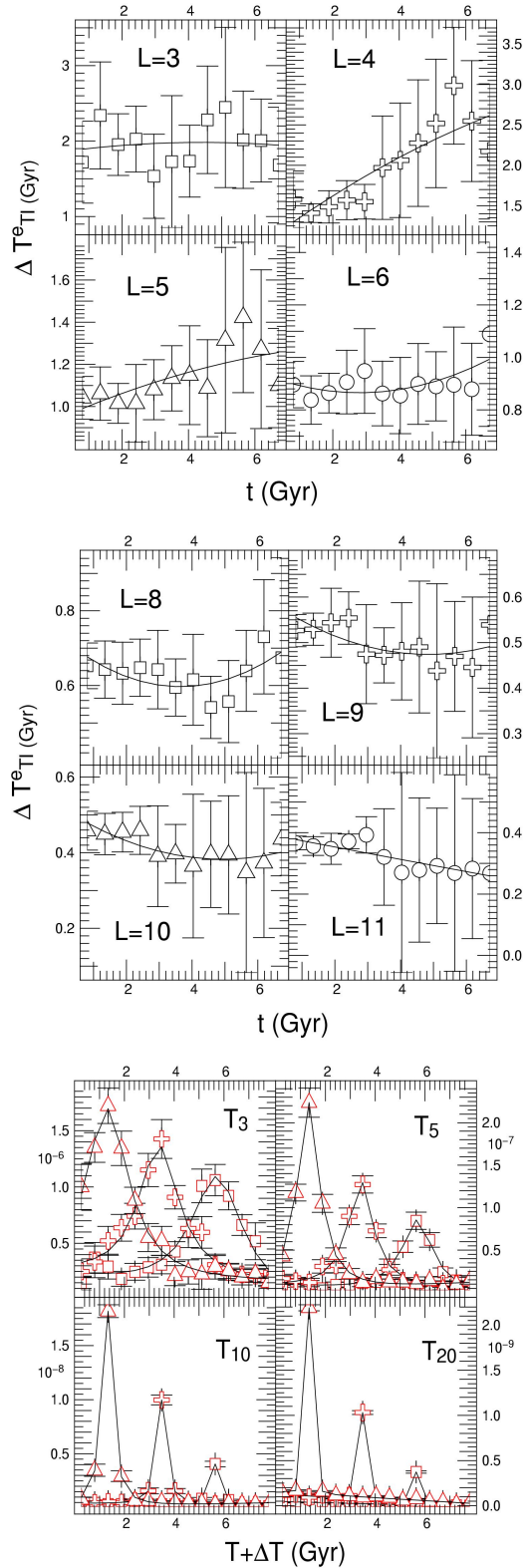


Figure 25. *Top and Middle:* the time evolution of the characteristic time scale $\Delta T_{T_\ell^{\psi_e}}$, obtained by fitting $T_\ell^{\psi_e}(t, t + \Delta t)$ with equation (71). Symbols are the measurements while bars stand for 3σ fitting error bars. The second order fit of the time evolution of each $T_\ell^{\psi_e}$ is also shown. Parameters can be found in appendix. Except $\ell = 4$ and (marginally) $\ell = 5$ modes, no time evolution can be observed. The time resolution is 0.53 Gyr. *Bottom:* examples of $T_\ell^{\psi_e}(t, t + \Delta t)$ fitted by Lorentzian functions.

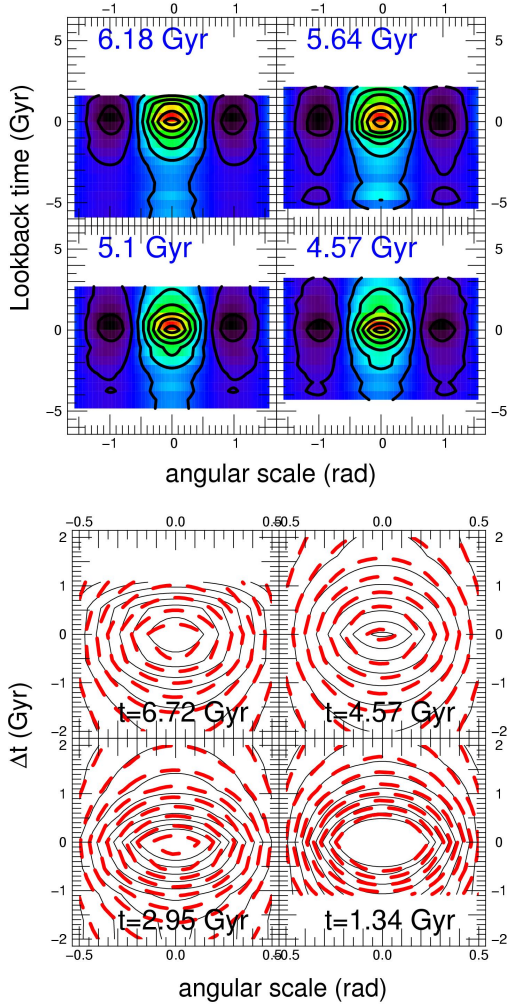


Figure 26. *Top:* the angulo-temporal correlation function, $w^e(\theta, \Delta t) = \langle \delta_{[\psi^e]}(\mathbf{\Omega}, t) \delta_{[\psi^e]}(\mathbf{\Omega} + \Delta \mathbf{\Omega}, t + \Delta t) \rangle$. The dipole ($\ell = 1$) and the quadrupole ($\ell = 2$) components were removed. Blue (resp. red) colours stand for low (resp. high) values of the correlation. Isocontours are also shown. The main axes of the ‘ellipses’ centred on $(\Delta \mathbf{\Omega} = 0, \Delta t = 0)$ give indications on the characteristic time and angular scales of $\psi^e(\mathbf{\Omega}, t)$. *Bottom:* comparison between the measured 2D correlation function (*solid lines*) and the fit obtained using the equation (72) (*dashed lines*).

6.2 Flux density of mass: $\omega_\rho \equiv \rho v_r$

The mode $\langle C_\ell^{\omega_\rho} \rangle$ of the distribution of the ω_ρ angular power spectrum is computed using equations (42)–(43). In order to deal with adimensional quantities, the reduced harmonic coefficients, $\tilde{a}_{\ell,m}$, are defined as:

$$\tilde{a}_{\ell,m} \equiv \sqrt{4\pi} \left(\frac{a_{\ell,m}}{\langle a_{00} \rangle} - \delta_{\ell 0} \frac{a_{0,0}}{\langle a_{00} \rangle} \right). \quad (74)$$

The accretion contrast, $\delta_{[\omega_\rho]}$, and the $\tilde{a}_{\ell,m}$ coefficients are linked by:

$$\delta_{[\omega_\rho]}(\mathbf{\Omega}) \equiv \frac{\omega_\rho(\mathbf{\Omega}) - \overline{\omega_\rho}}{\langle \overline{\omega_\rho} \rangle} = \sum_{\ell,m} \tilde{a}_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\mathbf{\Omega}). \quad (75)$$

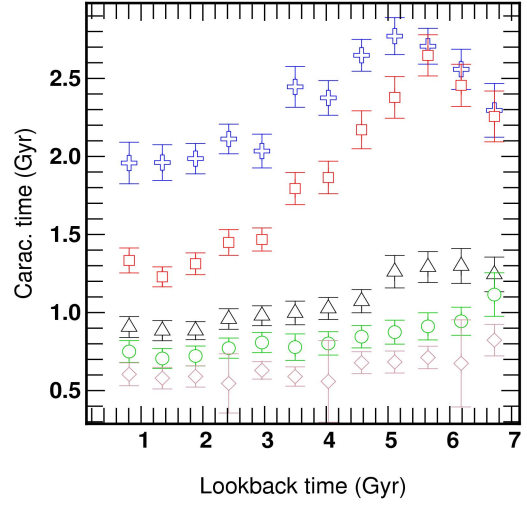


Figure 27. The cosmic evolution of the potential’s coherence time. This characteristic time scale is obtained by fitting the 2D correlation function $w^e(\theta, \Delta t)$ with the function given in equation (72). The correlation function is computed using harmonics coefficients with $\ell \geq 3$ (crosses), $\ell \geq 4$ (squares), $\ell \geq 5$ (triangle), $\ell \geq 6$ (circle) and $\ell \geq 7$ (diamonds). Bars stand for 3σ fitting errors. The time resolution is 0.53 Gyr.

6.2.1 Angular power spectrum

Knowing $\langle a_{00} \rangle(t)$, the angular power spectrum $C_\ell^{\omega_\rho}(t)$ is computed for each halo. At each time step and for each harmonic order ℓ , we fitted the $C_\ell^{\omega_\rho}(t)$ distribution by a log-normal distribution (see Fig. C4). The probability distribution of $C_\ell^{\omega_\rho}(t)$ is weighted as described in appendix A.

The evolution of $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ with time is shown in Fig. (28). The shape of $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ remains mostly the same with time and is fitted by a simple function:

$$\langle C_\ell^{\omega_\rho} \rangle(t) = q_1^{\omega_\rho}(t) + \frac{q_2^{\omega_\rho}(t)}{(\ell + q_3^{\omega_\rho}(t))^2}. \quad (76)$$

The time evolutions of $q_1^{\omega_\rho}$, $q_2^{\omega_\rho}$ and $q_3^{\omega_\rho}$ are shown in Fig. (29) and can be fitted by decreasing exponential:

$$q_i^{\omega_\rho}(t) = h + ke^{-\frac{t}{u}}. \quad (77)$$

Only the dipole ($\ell = 1$) harmonic does not fit with the previous functional form and is systematically lower than the other harmonics’ contributions. If particles velocities were measured in an absolute referential, the dipole strength would reflect the halo’s motion in the surrounding matter. Also strong mergers may cover a 180 degree angle on the sphere and would contribute to the dipole. Since velocities are measured in the halo’s rest frame and strong mergers are excluded, the dipole strength is substantially lowered, as is measured.

The values for h, k, u are given in table 4. The offset $q_1^{\omega_\rho}$ of $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ increases with time. From equation (74), one can see that $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ is proportional to the square of the accretion contrast. If the power spectrum experiences a global shift toward higher values with time it implies that the accretion contrast increases with time. Since the average velocity does not vary strongly with time, it suggests that we actually see objects getting denser with time. This effect is similar to the global increase of the 3D power spectrum $P(k)$

	h	k	u
$q_1^{\omega_\rho}$	0.0242	17.86	0.867
$q_2^{\omega_\rho}$	3.153	2699.	0.8933
$q_3^{\omega_\rho}$	5.4105	9.44	1.55

Table 4. Fitting parameters for the time evolution of $\langle C_\ell \rangle^{\omega_\rho}$ model's coefficients (see (equation (76))). $q_3^{\omega_\rho}(t) = h + ke^{-\frac{t}{u}}$ with lookback time t expressed in Gyr.

with time due to density growth. The $q_2^{\omega_\rho}$ coefficient evolves as $q_1^{\omega_\rho}$. It illustrates the fact that the $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ amplitude remains mainly constant. The $q_3^{\omega_\rho}$ coefficient should be seen as a typical scale and varies slightly from $q_3^{\omega_\rho} = 6$ at $z = 1$ to $q_3^{\omega_\rho} = 11$ at $z = 0.1$. The $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ becomes marginally ‘flatter’ as time passes, implying that small scales contribute more to the spatial distribution of $\omega_\rho(\mathbf{\Omega}, t)$, consistently with the evolution of $\langle C_\ell(t) \rangle^{\psi^e}$.

The flat power spectrum measured for ω_ρ on small scales suggests that isolated particles contribute significantly and increasingly with time. In other words, accretion becomes low enough to be poorly resolved in terms of particles.

In order to assess these environment/resolution effects, we computed $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ for three different classes of masses (see figure 30) at a look-back time of 800 Myrs. For the heaviest haloes, the power spectrum is peaked toward low ℓ values. The contribution of large scales is quite important. For smaller masses the power spectrum gets flatter and all scales almost contributes equally for the lightest class of mass. We recall that the harmonic decomposition of a Dirac function leads to $C_\ell = \text{constant}$. Thus a flat power spectrum indicates that isolated particles contributes significantly to the distribution of matter on the sphere. The relative behaviour of the three $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ confirms that larger haloes still experience important mergers (i.e. on large scales) while small ones are in quiet environments at our simulation resolution.

It clearly appears that the angulo-temporal correlation function related to $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ would be dominated by the secular evolution of the angular power spectrum and consequently no coherence time would be detectable. We show in appendix D how the evolution of $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ is related to class of mass biases and possible resolution effects. The previous measurements on the potential were not sensitive to these effects because of the smoother nature of the field. Using an alternative definition of $C_\ell^{\omega_\rho}$, we circumvent the measured secular evolution and find that angular power spectrum of ω_ρ can be fitted by a simple power-law (see Fig. D1) at every time:

$$\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle = 0.75\ell^{-1.15}. \quad (78)$$

The corresponding angulo-temporal correlation function is given in Fig. D3. As expected, we find a shorter coherence time for the ω_ρ than for ψ^e , because of the ‘sharper’ nature of the former. Overall, these results strongly suggest that class of mass and resolution biases should be systematically investigated. Such studies will constrain more firmly the correlations of the mass flux measured at the virial radius.

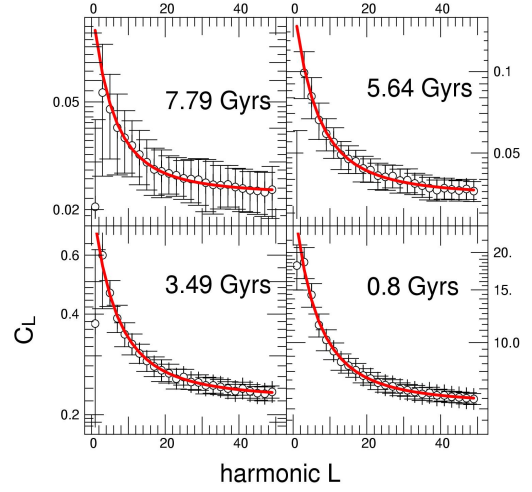


Figure 28. The average angular power spectrum, $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$, at $t = 0.8, 3.5, 5.7, 7.8$ Gyr (symbols). $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ is taken as the mode of the log-normal function used to fit the C_ℓ distribution. Bars stand for 3σ errors. For a given ℓ the corresponding angular scale is π/ℓ . $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ may be fitted by a generic model given by equation (76) (solid line).

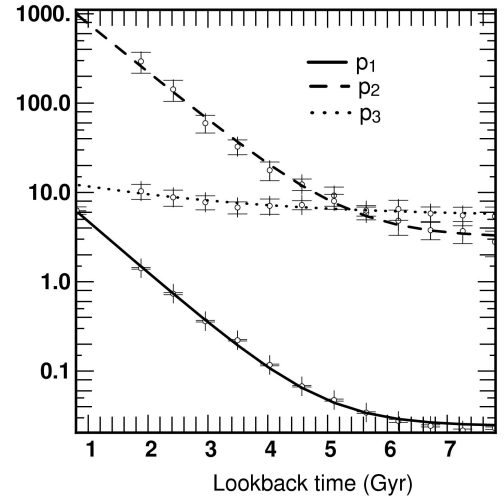


Figure 29. Coefficients time evolution for the $\langle C_\ell^{\omega_\rho}(t) \rangle$ model (see equation (76))(symbols). The three time evolutions may be described accurately by decreasing exponentials (see equation (77)) (solid lines).

6.3 A scenario for the accretion of a typical halo between $z = 1$ and $z = 0$

Let us draw a summary of the previous results in order to get a synthetic picture of the flux properties at the virial radius. A typical halo would have a mass of $10^{13}M_\odot$ and a radius $R_{200} \sim 500\text{kpc}$ at $z=0$. It would be embedded in a quasi-stationary gravitational potential, ψ^e . Such a potential would be highly quadrupolar and is likely to be induced by the large scale distribution of matter around the halo. The halo accretes material between $z = 1$ and $z = 0$ at a rate which declines with time. At high redshift, only accretion is detected at R_{200} . It is mainly radial and occurs at a velocity close to 75% times the circular velocity. As time advances, accretion of new material decreases, while outflows become significant. Outflows

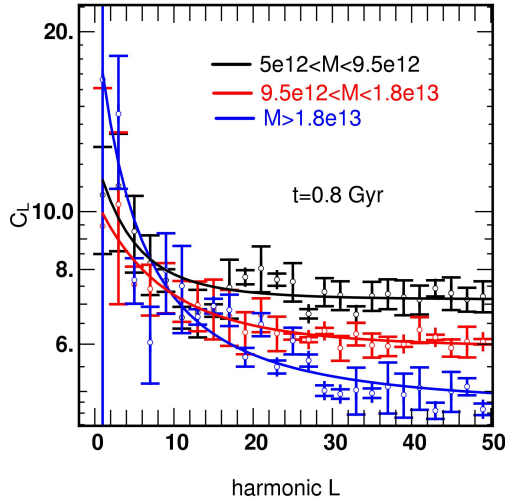


Figure 30. The average angular power spectrum, $\langle C_\ell^{\omega_\rho} \rangle(t)$, at $t = 0.8$ Gyr (symbols) for three different class of masses. $\langle C_\ell^{\omega_\rho} \rangle(t)$ is taken as the mode of the log-normal function used to fit the $C_\ell^{\omega_\rho}$ distribution. Bars stand for 3σ errors. Mass are expressed in solar masses. For a given ℓ the corresponding angular scale is π/ℓ . The three measurements are fitted by equation (76) (solid line). The power spectrum gets flatter for small haloes. Accretion by small haloes is dominated by small objects or even isolated particles.

occur at lower velocities and on more circular orbits. A fraction of the outflowing component is due to a backsplash population made of material which already has passed through the virial sphere. Another fraction of outflows is made from ‘virialized’ material of the halo which goes further than R_{200} and is being ‘cancelled’ by its infalling counterpart. The clustering on the sphere of the gravitational potential drifts toward smaller scales, while the clustering of matter follows marginally the same trend at our level of resolution. It reflects the increasing contribution with time of weak/diffuse accretion, poorly sampled at our resolution. In parallel, the coherence time of potential fluctuations is seen decreasing with time by the halocentric observer. This decrease may be related with the accretion of satellites, where objects were numerous enough to ‘overlap’ in the past and implying that accretion occurs mainly in the same direction on the virial sphere.

This scenario seems qualitatively consistent with most of the past studies made on the subject using the full 3D information contained in simulations. The decline of accretion rate has been already measured by e.g. van den Bosch (2002b) even though our measurements are in a slight quantitative disagreement. The ‘rebound’ of matter through the Virial sphere has already been mentioned by e.g. Mamon et al. (2004) or Gill et al. (2004). Furthermore, we recover the velocity bimodality and the circularization of orbits detected by Gill et al. (2004) in high resolution simulations. Finally, we relate the variation of the potential’s coherence time to the anisotropy of accretion, already demonstrated by e.g. Knebe et al. (2004) or Aubert et al. (2004).

7 SUMMARY & DISCUSSION

In this paper we measured the detailed statistical properties of dark matter flows on small scales (≤ 500 kpc) in the near environment of haloes using a large set of Λ CDM cosmological simulations. We

concentrated on flows at the haloes’ virial radius while describing the infalling matter via flux densities through a spherical shell. In parallel, we measured the statistical properties of the tidal potential reprojected back onto the boundary.

The statistical one- and two-point expectations of the inflow were tabulated both kinematically and angularly on the R_{200} virtual sphere. All measurements were carried for 15 000 haloes undergoing minor (as defined) mergers between redshift 1. and zero.

Our purpose was twofold: (i) characterize statistically (via one- and two-point statistics) the detailed (angular and kinematic) incoming fluxes of dark matter entering the virial sphere of a biased (described in Section 4.2) sample of haloes undergoing minor mergers, (and in particular measure the statistical properties of the first three moments, ω_ρ , (this paper) $\omega_{\rho v}$, and $\omega_{\rho\sigma\sigma}$ (paper II)); (ii) compute the first two moments of the linear coefficients, c_n , (resp. b_n) of the source term (resp. external potential) entering equations (13)-(14) (paper II). We also provided a method to re-generate realization of the field, via Equation (38) and (E6)).

We briefly demonstrated (Section 2.2) how a perturbative description of the dynamics of haloes can propagate the statistical properties of environments to the statistical properties of the halo’s response.

The description of the environment involved the projection of the potential and the source on a basis of functions. This basis allowed us to decouple the time evolution from the angular and velocity dependence of these two quantities. Hence, the accretion and the tidal potential were completely described by the projection coefficients and their statistical properties, which depend on time only. We also discussed how the flux densities of matter, momentum and energy can be related to the source and its expansion coefficients.

We restricted ourselves to the one- and two-point statistical description of the tidal field ψ^e and the flux density of mass ω_ρ and postponed to paper II (Aubert & Pichon (2005), in prep.) the full description of the higher moments. Since these measurements will be used as an entry to a perturbative description of the inner dynamics of haloes, only objects with quiet accretion history were selected as discussed in Section 4. Throughout this biased sample of haloes we made statistical measurements of the kinematic properties of accretion.

These measurements provide statistical results on the following quantities:

- the evolution of the accretion rate at the virial sphere: the net accretion is found to decrease with time, probing both the increasing contribution of outflows and the decline of strong interactions.
- the evolution of the net velocity distribution of the accretion: infall exhibits a typical velocity of $0.75V_c$. A backsplash component is detected at recent times with a significant outflowing component at a lower velocity ($\sim 0.6V_c$).
- the evolution of the impact parameters/incidence angle distribution of the infall. The infall is found to be mainly radial while outflows are on more circular orbits.
- the angular-temporal two-point correlation of the external potential on virial sphere. The potential appear to be mainly dominated by a strong and constant quadrupole. The coherence time of smaller angular scales provide hints of anisotropic accretion.
- the angular power spectrum of accreted matter. The clustering is dominated by small angular scales, possibly at the resolution limit.

- the angulo-temporal correlation of the flux density of mass. The coherence time appears shorter than for potential fluctuations, as expected.

These quantitative and tabulated results can also be interpreted in terms of properties of accreted objects or of smooth accretion and are coherent with previous studies (e.g. Mamon et al. (2004), Gill et al. (2004), van den Bosch (2002b), Knebe et al. (2004), Aubert et al. (2004)). This agreement between our fluid description of the environment and those published results are clearly encouraging for the reliability of the method. A systematic comparison of the current approach with an analysis in terms of satellites is in order, in the spirit of Aubert et al. (2004).

These kinematic signatures provide insights into the processes which occur in the inner regions of haloes. In particular, the kinematic discrepancies between the different components of the mass flux should be understood in terms of dynamical friction, tidal stripping or even satellite-satellite interactions within the halo. The kinematical properties of accreted matter may be transposed to the kinematical properties of satellites observed around galaxies. Newly accreted material exhibits kinematic signatures (radial, high velocity trajectories) different from the ones measured for matter which has already interacted with the halo (tangential, low-velocity orbits). Admittedly, it is not straightforward to apply directly our results to the luminous component (see Pichon & Aubert (2005) for a discussion of thresholding), and how projection effects may affect the distributions. Nevertheless, the corresponding observational measurements on satellites should provide information on the past history of these objects.

With the statistical description of the tidal field presented in this paper only, we may already implement the theory presented in paper III in the regime of pure tidal excitation. The complete knowledge of the source (described in paper II) should considerably extend the realm of application provided by this theory. Specifically, we have shown in paper III, that the internal dynamics of substructures within galactic haloes (distortion, clumps as traced by X-ray emissivity, weak lensing, dark matter annihilation, tidal streams ..), and the implication for the disk (spiral structure, warp etc...) could be predicted within this framework. Conversely the knowledge of the observed properties of a statistical sample of galactic haloes could be used to (i) constrain observationally the statistical nature of the infall (ii) predict the observed distribution and correlations of upcoming surveys, (iii) time reverse the observed distribution of clumps, and finally (iv) weight the relative importance of the intrinsic (via the unperturbed distribution function) and external (tidal and/ or infall) influence of the environment in determining the fate of galaxies.

The statistical measurements of the clustering of both ψ^e and ω_ρ allow the regeneration of synthetic environments. Knowing the average evolution and the angular power spectra of these quantities, the generation of spherical maps in the Gaussian regime is straightforward. We describe such a regeneration procedure in appendix E. Such maps would efficiently provide realistic environments of haloes, consistent (up to two-point statistics) with those measured in simulations².

² Extensions to non Gaussian fields are possible (following e.g. Contaldi & Magueijo (2001)) but imply the use of higher order correlations which are beyond the scope of this work

It should also be emphasized that some aspects of the present work are exploratory only, in that the resolution achieved ($M_{\text{halo}} > 5 \cdot 10^{12} M_\odot$) is somewhat high for L_* galaxies. In fact, it would be interesting to see if the properties of infall changes for lower mass ($M_{\text{halo}} < 5 \cdot 10^{12} M_\odot$) together with the intrinsic properties of galaxies. In addition a systematic study of biases induced by our estimators of angular correlations should be conducted. For a fixed halo mass, our lack of resolution implies that we over estimate the clumsiness of the infall.

This limited resolution both spatially and in mass of our simulations appeared to be an issue for some of the results presented here (e.g. the angular power spectrum of ω_ρ). Higher resolution simulations will be required to fully assess these limitations. In particular, a fraction of accretion detected as a weak/diffuse component may be associated to unresolved objects; the influence of small mass satellites should therefore be explored. With the prospect of deducing the properties of galaxies from haloes environments, lower mass haloes are more likely to host only one galaxy, making them more suitable for such a study. Cosmological simulation of small volumes also tend to prevent the formation of rare events which may be relevant for the representativity of the study: for example, some disks seem to indicate that they were formed in ‘very quiet’ environments. The right balance between resolution and volume should be found. Aside from these biases induced by simulations, we also introduced selection criteria on both the mass or the accretion history of haloes and the influence of these arbitrary choices on our statistical distribution should be assessed precisely.

It should also be stressed that we did not take into account the anisotropy of the infall, as discussed in Aubert et al. (2004), nor the extra polarization induced by the presence of an embedded disk, which will undoubtedly reinforce the corresponding polarization and anisotropy.

Eventually using hydrodynamical codes (such as AMR) which includes baryonic effects in simulations and introducing the physics of gas in our model, we would construct a complete semi-analytic tool to study dynamics of galaxies.

Acknowledgments

We are grateful to S. Colombi for useful comments and helpful suggestions. We would like to thank D. Munro for freely distributing his Yorick programming language (available at <ftp://ftp-icf.llnl.gov/pub/Yorick>), together with its MPI interface, which we used to implement our algorithm in parallel. DA thanks the Institute of Astronomy for their hospitality and funding from a Marie Curie studentship. We acknowledge support from the HORIZON project.

REFERENCES

- Abadi M. G., Navarro J. F., Steinmetz M., Eke V. R., 2003, *ApJ*, 597, 21 224
- Appel W., 2002, *Mathematiques pour la physique et les physiciens.. Mathematiques pour la physique et les physiciens.* Publisher: H&K Editions 226
- Aubert D., Pichon C., 2005, in prep. 1, 224, 246
- Aubert D., Pichon C., Colombi S., 2004, *MNRAS*, 352, 376 224, 225, 226, 229, 230, 231, 234, 240, 243, 246, 247
- Bardeen J. M., Bond J. R., Kaiser N., Szalay A. S., 1986, *ApJ*, 304, 15 234

Bernardeau F., Colombi S., Gaztañaga E., Scoccimarro R., 2002, *Phys. Rep.*, 367, 1 224
 Bertschinger E., 2001, *ApJS*, 137, 1 234
 Binney J., Jiang I., Dutta S., 1998, *MNRAS*, 297, 1237 224
 Colpi M., Mayer L., Governato F., 1999, *ApJ*, 525, 720 239
 Contaldi C. R., Magueijo J., 2001, *Phys. Rev. D*, 63, 103512 247
 Eisenstein D. J., Hut P., 1998, *ApJ*, 498, 137 234
 Flores R. A., Primack J. R., 1994, *ApJL*, 427, L1 224
 Gill S. P. D., Knebe A., Gibson B. K., Dopita M. A., 2004, *MNRAS*, 351, 410 224, 238, 239, 246, 247
 Hashimoto Y., Funato Y., Makino J., 2003, *ApJ*, 582, 196 239
 Hunter C., Toomre A., 1969, *ApJ*, 155, 747 224
 Ibata R. A., Gilmore G., Irwin M. J., 1995, *MNRAS*, 277, 781 224
 Jiang I., Binney J., 1999, *MNRAS*, 303, L7 224
 Kalnajs A. J., 1977, *ApJ*, 212, 637 224
 Kauffmann G., White S. D. M., 1993, *MNRAS*, 261, 921 225
 Klypin A., Kravtsov A. V., Valenzuela O., Prada F., 1999, *ApJ*, 522, 82 224
 Knebe A., Gill S. P. D., Gibson B. K., Lewis G. F., Ibata R. A., Dopita M. A., 2004, *ApJ*, 603, 7 224, 243, 246, 247
 Lacey C., Cole S., 1993, *MNRAS*, 262, 627 225
 Lynden-Bell D., Kalnajs A. J., 1972, *MNRAS*, 157, 1 224
 Mamon G. A., Sanchis T., Salvador-Solé E., Solanes J. M., 2004, *AAP*, 414, 445 238, 246, 247
 McConnachie A. W., Irwin M. J., Ibata R. A., Ferguson A. M. N., Lewis G. F., Tanvir N., 2003, *MNRAS*, 343, 1335 224
 Moore B., 1994, *Nature*, 370, 629 224
 Moore B., Ghigna S., Governato F., Lake G., Quinn T., Stadel J., Tozzi P., 1999, *ApJL*, 524, L19 224
 Murali C., 1999, *ApJ*, 519, 580 225, 227
 Murali C., Tremaine S., 1998, *MNRAS*, 296, 749 229
 Navarro J. F., Steinmetz M., 1997, *ApJ*, 478, 13 224
 Ostriker E. C., Binney J. J., 1989, *MNRAS*, 237, 785 224
 Peacock J. A., 1999, *Cosmological physics*. Cosmological physics. Publisher: Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0521422701 248
 Peebles P. J. E., 1980, *The large-scale structure of the universe*. Research supported by the National Science Foundation. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1980. 435 p. 224
 Pichon C., Aubert D., 2005, in prep. 1, 224, 247, 254
 Quinn P. J., Hernquist L., Fullagar D. P., 1993, *ApJ*, 403, 74 224
 Reshetnikov V., Combes F., 1998, *AAP*, 337, 9 224
 Somerville R. S., Kolatt T. S., 1999, *MNRAS*, 305, 1 225
 Sparke L. S., Casertano S., 1988, *MNRAS*, 234, 873 224
 Springel V., Yoshida N., White S. D. M., 2001, *New Astronomy*, 6, 79 234
 Toomre A., Toomre J., 1972, *ApJ*, 178, 623 224
 Tormen G., 1997, *MNRAS*, 290, 411 224
 Tremaine S., Weinberg M. D., 1984, *MNRAS*, 209, 729 225, 226
 Tsuchiya T., 2002, *New Astronomy*, 7, 293 224
 van den Bosch F. C., 2002a, *MNRAS*, 332, 456 236, 237
 van den Bosch F. C., 2002b, *MNRAS*, 331, 98 246, 247
 van Haarlem M., van de Weygaert R., 1993, *ApJ*, 418, 544 224
 Velazquez H., White S. D. M., 1999, *MNRAS*, 304, 254 224
 Walker I. R., Mihos J. C., Hernquist L., 1996, *ApJ*, 460, 121 224
 Weinberg M. D., 1998, *MNRAS*, 299, 499 224

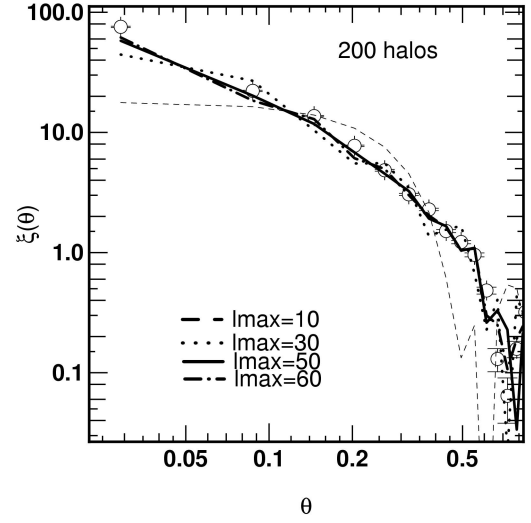


Figure A1. The average angular two-point correlation function, $\langle \xi(\theta) \rangle$ of the advected mass spherical field $\rho v_r(\Omega)$. The correlation function is shown as a function of the angular distance on the sphere θ given in radians. Using the positions of accreted particles around 200 haloes at $z=1$, the average correlation function can be computed (dots). Lines represent the correlation function deduced from the harmonic coefficients of the $\rho v_r(\Omega)$ fields around the same 200 haloes, with $\ell_{\max} = 10, 30, 50, 60$. The convergence is ensured for $\ell_{\max} \geq 50$.

APPENDIX A: HARMONIC CONVERGENCE

As explained in section 3.1, the angular dependence of the source function is expanded over a basis of spherical harmonics $Y_{\ell m}(\Omega)$. In order to set the maximal order of this expansion, ℓ_{\max} , we compared the two-point correlation function of the spherical field $\rho v_r(\Omega)$ to the one inferred from harmonic coefficients, $a_{\ell m}$, and power spectrum C_ℓ (see equations (equation (42)) and (equation (43))). Within a set of randomly distributed particles, let $d_{\text{poisson}}(\theta)$ be the probability of finding two particles with an angular separation θ . If $d(\theta)$ is the same probability for a given distribution of particles then its two-point correlation function $\xi(\theta)$ is defined as:

$$\xi(\theta) \equiv \frac{d(\theta)}{d_{\text{poisson}}(\theta)} - 1. \quad (\text{A1})$$

The correlation function $\xi(\theta)$ and the $a_{\ell m}$ coefficients are related by (e.g. Peacock (1999)):

$$\xi(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} C_\ell (2\ell + 1) P_\ell(\cos \theta), \quad (\text{A2})$$

where θ is an angular distance on the sphere and $P_\ell(x)$ a Legendre function. The average angular correlation function $\langle \xi(\theta) \rangle_{\text{pair}}$ is defined as:

$$\langle \xi(\theta) \rangle_{\text{pair}} \equiv \frac{1}{\sum_p n_p^2} \sum_p n_p^2 \xi_p(\theta), \quad (\text{A3})$$

where $\xi_p(\theta)$ is the two-point correlation function of the p -th halo computed using n_p particles passing through the virial sphere. From a set of 200 haloes extracted from a simulation, we computed $\langle \xi(\theta) \rangle$ using different values for ℓ_{\max} (see figure A1). From the same set of haloes, we also computed the average two-point correlation function directly from the particles positions using equation (A1).

From figure A1, it clearly appears that $\langle\langle\zeta(\theta)\rangle\rangle_{\text{pair}}$ has not converged for $\ell_{\text{max}} \leq 30$. For $\ell_{\text{max}} \geq 50$ the actual two-point correlation function is well reproduced. Since no real difference can be distinguished between $\ell_{\text{max}} = 50$ and $\ell_{\text{max}} = 60$, we chose to limit the harmonic expansion of the source term to $\ell \leq 50$. Note that the truncation in ℓ_{max} defines an effective resolution beyond which the distribution is effectively coarsened.

APPENDIX B: ANGULO-TEMPORAL CORRELATION

Let us consider a spherical field $X(\mathbf{\Omega}, t)$ which can be expanded over the spherical harmonic basis:

$$X(\mathbf{\Omega}, t) = \sum_{\ell m} x_{\ell m}(t) Y_{\ell m}(\mathbf{\Omega}). \quad (\text{B1})$$

The correlation w^X between two successive realizations of X is defined as:

$$w^X(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', t, t') \equiv \langle X(\mathbf{\Omega}, t) X(\mathbf{\Omega}', t') \rangle \quad (\text{B2})$$

where $\langle \cdot \rangle$ stands for the statistical average. If $X(\mathbf{\Omega}, t)$ is *isotropic*, the correlation should not depend on $\mathbf{\Omega}$ or $\mathbf{\Omega}'$ but only on the distance θ between the two points. It implies that w^X can be expanded on a basis of Legendre Polynomials $P_L(y)$:

$$w^X(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}', t, t') = w^X(\theta, t, t') = \sum_L (2L+1) T_L P_L(\cos(\theta)) \quad (\text{B3})$$

How are T_L and $x_{\ell m}$ related? Rewriting equation (B2) as:

$$w^X(\theta, t, t') = \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \langle x_{\ell m}(t) x_{\ell' m'}^*(t') \rangle Y_{\ell m}(\mathbf{\Omega}) Y_{\ell' m'}^*(\mathbf{\Omega}'), \quad (\text{B4})$$

one can write:

$$\int d\mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}' Y_{\ell_1 m_1}^*(\mathbf{\Omega}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{\Omega}') w^X = \langle x_{\ell_1 m_1}(t) x_{\ell_2 m_2}^*(t') \rangle. \quad (\text{B5})$$

Meanwhile, assuming isotropy, one can also write

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}' Y_{\ell_1 m_1}^*(\mathbf{\Omega}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{\Omega}') w^X = \\ & \sum_L (2L+1) T_L \int d\mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}' Y_{\ell_1 m_1}^*(\mathbf{\Omega}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{\Omega}') P_L(\cos(\theta)) \\ & = \sum_{LM} (4\pi) T_L \int d\mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}' Y_{\ell_1 m_1}^*(\mathbf{\Omega}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{\Omega}') Y_{LM}(\mathbf{\Omega}) Y_{LM}^*(\mathbf{\Omega}') \\ & = \sum_{LM} (4\pi) T_L \delta_{L\ell_1} \delta_{L\ell_2} \delta_{Mm_1} \delta_{Mm_2}, \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

where P_L is expressed in terms of spherical harmonics using the spherical harmonics addition theorem. In the end, we get:

$$T_\ell = \frac{1}{4\pi} \langle x_{\ell m}(t) x_{\ell m}^*(t') \rangle. \quad (\text{B7})$$

For a given realization of $X(\mathbf{\Omega}, t)$, T_ℓ can be estimated by:

$$T_\ell = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2\ell+1} \sum_m x_{\ell m}(t) x_{\ell m}^*(t') \quad (\text{B8})$$

APPENDIX C: DISTRIBUTIONS

In this appendix, we present the various distributions fitted either by normal or log-normal PDF. For each quantity, the mode (or most probable value) of the distribution has been obtained from these fits. The Gaussian distribution is defined by:

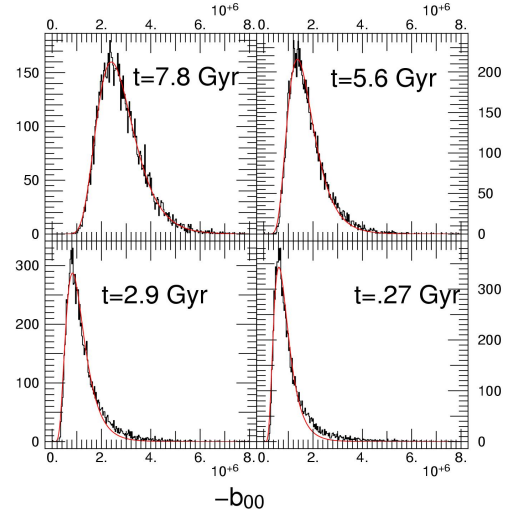


Figure C1. The probability distribution of b_{00} at four different times. This coefficient is proportional to the external potential averaged on the sphere. The log-normal fit is also shown.

$$N(x) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{C1})$$

while the mode is equivalent to the mean μ . The log-normal distribution is given by

$$\text{LN}(x) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log(x/\mu))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{C2})$$

while the mode is given by $\mu \exp(-\sigma^2)$. The different fits mentioned in the main text are described in the following figures:

- Fig. (C1) shows the distributions of the harmonic coefficient $b_{00}(t)$ which is proportional to the potential averaged on the sphere. It is expressed in units of GM/R where M is expressed in $10^{10} M_\odot$, R in $\text{kpc} h^{-1}$ and $G=43007$ in internal units.
- Fig. (C2) shows the distributions of the external potential's power spectrum for four different harmonic $\ell = 2, 5, 10, 20$ at $t=1.3$ Gyr. The distribution has been fitted by a log normal function.
- Fig. (C3) shows the distributions of the mean flux $\Phi^M(t)$. The mean flux is proportional to the harmonic coefficient a_{00} . The distribution is fitted by a normal distribution. The normal model agrees well with the measured distribution at recent times but fails to reproduce the outliers tail at high redshift. Consequently the mode position is underestimated at these times.
- Fig. (C6) shows the distributions of one of the coefficient involved in the computation of the velocity distribution $\phi(v)$. Four different times are being represented. The coefficient distribution has been fitted by a Gaussian distribution.
- Fig. (C4) shows the distributions of the power spectrum values $C_\ell^{\omega_p}$ for four different harmonic order ℓ . The fits were made at $t = 1.9$ Gyr. This distribution has been fitted by a lognormal distribution.
- Fig. (C5) shows the distributions of the power spectrum values $C_\ell^{\omega_p}$ for four different harmonic order ℓ . The fits were made at $t = 2.95$ Gyr. This distribution has been fitted by a lognormal distribution.

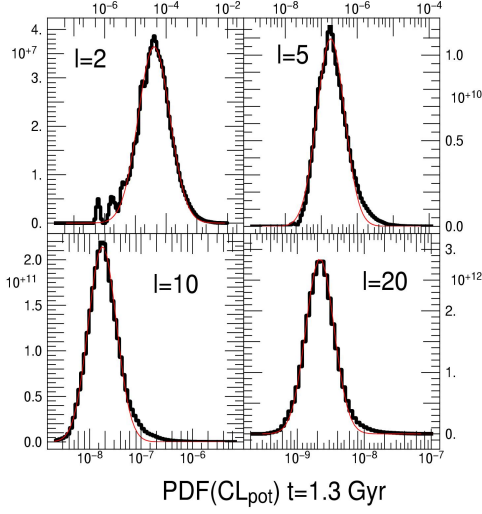


Figure C2. The probability distribution of $C_\ell^{\psi_c}$ for $\ell = 2, 5, 10, 20$ at the look-back time $t = 1.9$ Gyr. Note that the X-axis is sampled logarithmically; the corresponding log normal fit of the mode is also shown.

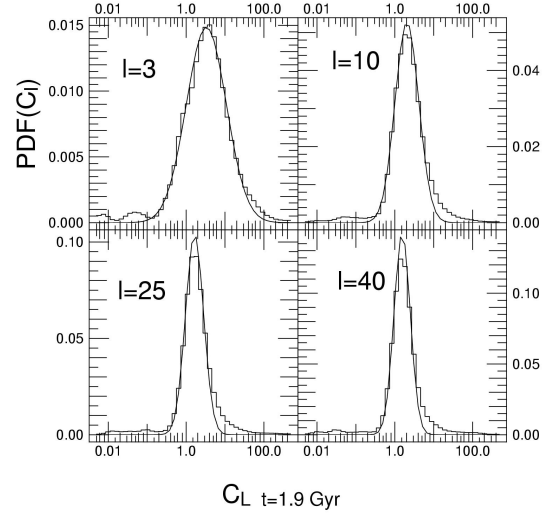


Figure C4. The probability distribution of the C_ℓ for $\ell = 3, 10, 25, 40$ at the look-back time $t = 1.9$ Gyr. Note that the X-axis is sampled logarithmically; the corresponding log normal fit of the mode is also shown.

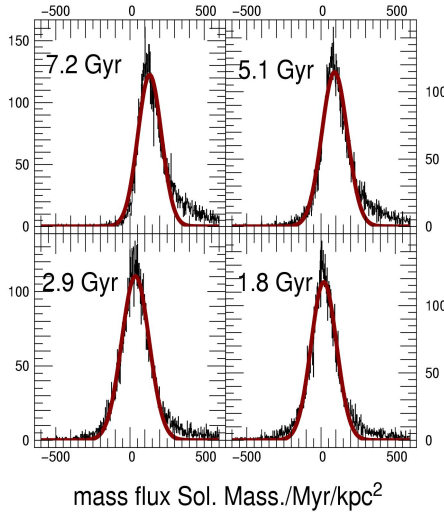


Figure C3. The probability distribution of the mean flux $\Phi^M(t)$ for four different times. The normal fit is also shown.

APPENDIX D: ALTERNATIVE CONTRAST AND ANGULO-TEMPORAL CORRELATION

It appears clearly from the time evolution of $\langle C_\ell^{\omega_\rho} \rangle(t)$ presented in the main text, that no angulo-temporal correlation can be computed, since it would be completely dominated by the secular evolution of the power spectrum. For this reason, an alternative definition of the flux density contrast has been used:

$$\delta'_{[\omega_\rho]}(\Omega) \equiv \frac{\omega_\rho(\Omega) - \bar{\omega}_\rho}{\bar{\omega}_\rho} = \sum_{\ell, m} \tilde{a}'_{\ell, m} Y_{\ell, m}(\Omega), \quad (D1)$$

or in terms of harmonic coefficients:

$$\tilde{a}'_{\ell, m} \equiv \sqrt{4\pi} \left(\frac{a_{\ell, m}}{a_{00}} - \delta_{\ell 0} \right). \quad (D2)$$

Using this new definition, the fluctuations of ω_ρ on the sphere are measured relative to the mass flux of each individual halo. The main

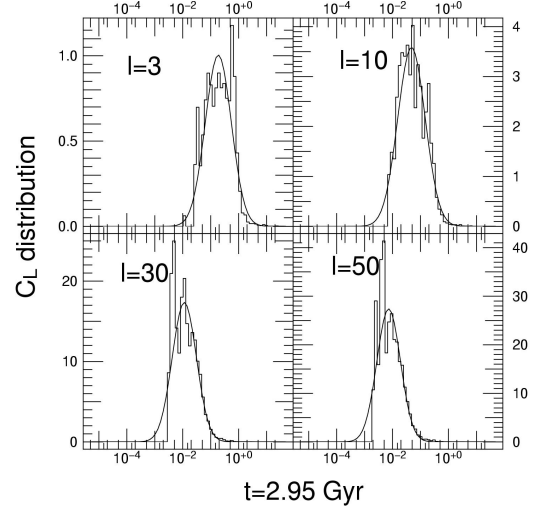


Figure C5. The probability distribution of $C_\ell^{\omega_\rho}$ for $\ell = 3, 10, 25, 40$ at the look-back time $t = 1.9$ Gyr. Note that the X-axis is sampled logarithmically; the corresponding log normal fit of the mode is also shown.

drawback of such a definition is that it couples the a_{00} and the $a_{\ell m}$ coefficients from the beginning. For example, the resimulation of such fields would require the knowledge of conditional probabilities, i.e. what is the distribution of $a_{\ell m}$ for a given value of a_{00} , while the previous definition (given by equation (74)) only acted as specific choice of (non constant) units. Furthermore this new definition is more sensitive to outliers with low a_{00} values.

Still, the angular power spectrum $\langle C_\ell^{\omega_\rho} \rangle(t)$ of $\delta'_{[\omega_\rho]}(\Omega)$ is much more regular than the one obtained from the previous definition. Its overall amplitude remains constant over the last 8 Gyrs, while its shape seems to be less dominated by small scale contributions. This alternative power spectrum is well fitted by a single power law:

$$\langle C_\ell^{\omega_\rho} \rangle(t) = 0.75 \ell^{-1.15}, \quad (D3)$$

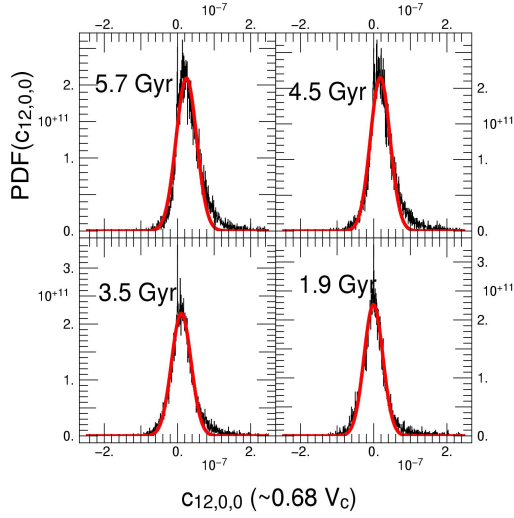


Figure C6. The probability distribution of the $c_{12,0,0}^{0,0}$ for the look-back times $t = 1.9, 3.5, 4.5$ and 5.7 Gyrs. Note that the X-axis is sampled linearly; the corresponding fit of the mode is also shown.

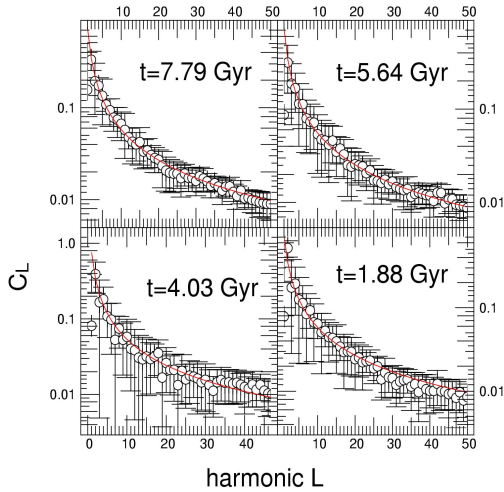


Figure D1. The angular power spectrum of the external potential, $\langle C_{\ell}^{\omega_p} \rangle(t)$, at four different look-back times (symbols). Harmonics coefficients were normalized using equation (D2), halo by halo. $\langle C_{\ell}^{\omega_p} \rangle(t)$ is taken as the mode of the log-normal function used to fit the $C_{\ell}^{\omega_p}$ distribution. Bars stand for 3σ errors. For a given ℓ the corresponding angular scale is π/ℓ . The power spectra may be fitted by a generic model given by equation (D3) (solid line). Unlike $\langle C_{\ell}^{\omega_p} \rangle(t)$, $\langle C_{\ell}^{\omega_p} \rangle(t)$ remains the same with time because of a different normalization.

for the whole time range covered by the current measurements. This constant shape suggest that harmonic coefficients scale like a_{00} , i.e. the mass flux. Such a scaling is not obvious, since a strongly clustered ω_p field may coexist with a nil net flux (i.e. $a_{00} \sim 0$). It also implies that the evolution measured on the previous definition of the power spectrum, $\langle C_{\ell}^{\omega_p} \rangle(t)$, is more related to the evolution of the average flux (traced by a_{00}) than to the modification of the fluctuations amplitude (traced by the others $a_{\ell m}$). Still, the evolution of $\langle a_{00} \rangle$ spans over one magnitude while the evolution of $\langle C_{\ell}^{\omega_p} \rangle(t)$ spans over several order of magnitudes: this strongly

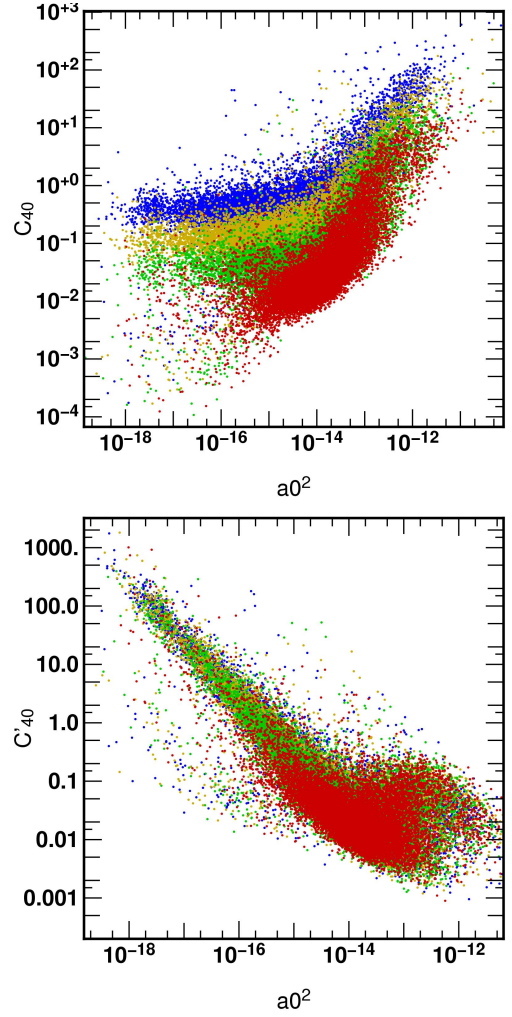


Figure D2. Scatter plots of the power spectra $C_{40}^{\omega_p}$ (Top) and $C_{40}^{\omega_p}$ (Bottom) as a function of a_{00}^2 . The four colors stand for different lookback times: $t = 7.8$ Gyrs (red), 5.6 Gyrs (green), 4 Gyrs (yellow) and 2.8 Gyrs (blue). The monopole a_{00} scales like the integrated flux of matter. The quantities $C_{40}^{\omega_p}$ and $C_{40}^{\omega_p}$ differ by the normalization applied to the harmonic coefficients $a_{\ell m}$. See the main text for more details.

suggests that two different populations of haloes contribute to the two type of power spectrum. In Fig. (D2), the scatter plot of C_{40} and C_{40}' as a function of a_{00} shows that the haloes which experience strong accretion dominate the peak of the C_{40}' distribution while haloes with low accretion dominate the peak of the C_{40} . Furthermore C_{40} does not scale anymore like a_{00} as it drops below some level, providing hints of resolution and isolated particles effects. To conclude, $\delta'_{[\omega_p]}(\Omega)$ appears as better way to re-scale the fluctuations' amplitude since it provides a more regular behavior of the power spectrum, but it is a more complex quantity to manipulate. Meanwhile, $\delta'_{[\omega_p]}(\Omega)$ is probably the correct way to proceed but is clearly more sensitive to resolution effects, which should be assessed with bigger simulations in the future.

Since the behavior of $\delta'_{[\omega_p]}(\Omega)$ is more regular than the previous contrast definition, the angulo-temporal correlation function of the flux density of mass has been computed from this new definition. Since this definition is different from that used for the potential, we restrict ourselves to a qualitative description. The correla-

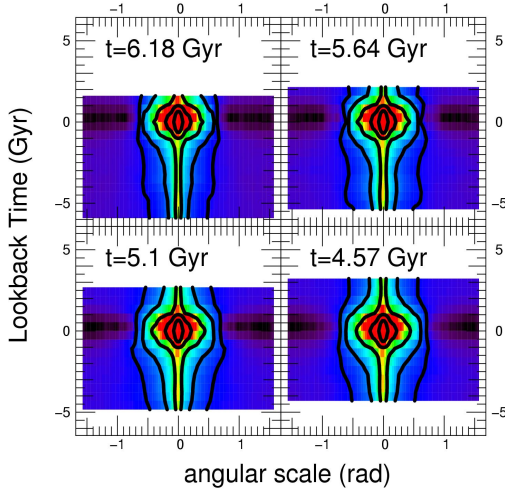


Figure D3. The angulo-temporal correlation function, $w^{\omega}(\theta, \Delta t) = \langle \delta_{[\omega]}(\mathbf{\Omega}, t) \delta_{[\omega]}(\mathbf{\Omega} + \Delta \mathbf{\Omega}, t + \Delta t) \rangle$. Blue (resp. red) colors stand for low (resp. high) values of the correlation. Isocontours are also shown. Large angular scale isocontours ($\Delta \mathbf{\Omega} \sim \pi/2$) have large temporal extent, due to the quadrupole dominance over the potential seen on the virial sphere.

tions are given in Fig. (D3). Clearly, the correlation is more peaked around $\Delta t = 0$ and more generally $w^{\omega\rho}$ is sharper than w^{ψ} . Note that no multipole ℓ has been removed during the computation of $w^{\omega\rho}$, implying that the quadrupole effect measured in the potential correlation is simply not detected for this field. This strongly suggest a large-scale ‘cosmic’ origin for the quadrupolar tidal field rather than an artifact of the spherical intersection of an ellipse. Furthermore, the correlation time is smaller than the one measured for the potential, even compared to the correlation time of the potential without the $\ell = 2$ component. This is coherent with the fact that density blobs should be ‘sharper’ than potential blobs as they pass through the sphere.

APPENDIX E: RE-GENERATING GALACTIC TIME LINES

Given the measurements given in Section 5 and Section 6, let us now describe how to regenerate realizations of the history of the environment of haloes, first for the tidal field only, and then for the full accretion history.

E1 Re-generating tidal fields

Let us first focus on the generation of the potential tidal field generated by fly by’s, hence neglecting the influence of the infall through the virial sphere.³

Let us call $\hat{\Psi} = \hat{\psi}_{\mathbf{m},\omega}(T)$ the temporal (w.r.t the fast time) and angular Fourier transform of the potential, at fixed slow time, T . The probability distribution of $\hat{\Psi}$, $p(\hat{\Psi})$ is given by

³ note that this assumption is not coherent with the way the measurements are carried, since it implies that the infalling material somehow disappear after crossing R_{200} .

$$p(\hat{\Psi}) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (\hat{\Psi} - \langle \hat{\Psi} \rangle)^{\top} \cdot \mathbf{C}_{\hat{\Psi}}^{-1} \cdot (\hat{\Psi} - \langle \hat{\Psi} \rangle) \right]}{(2\pi)^{1/2} \det^{1/2} |\mathbf{C}_{\hat{\Psi}}|}, \quad (\text{E1})$$

where the variance reads

$$\mathbf{C}_{\Psi}(T) = \langle (\hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega} - \langle \hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega} \rangle) \cdot (\hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega} - \langle \hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega} \rangle) \rangle, \quad (\text{E2})$$

and the mean field obeys

$$\langle \hat{\Psi} \rangle(T) = \langle \hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega} \rangle. \quad (\text{E3})$$

Since the potential is isotropic, $\langle \hat{\Psi} \rangle(T)$ is essentially zero (see also Fig. ??), while \mathbf{C}_{Ψ} stands for the angular power spectrum described in section 6.1. Let us call $\{\hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega}(T_i)\}_{i \leq N}$, the set of sampled $\hat{\Psi}$ a fixed slow time, T_i . Relying on a linear interpolation between two such realizations, the corresponding external potential reads in real space:

$$\psi^e(t, \mathbf{\Omega}) = \sum_i \sum_{\mathbf{m}} \int d\omega \exp(i\mathbf{m} \cdot \mathbf{\Omega} + i\omega t) \mathcal{K}_i^{\mathbf{m}}(t, \omega). \quad (\text{E4})$$

where the kernel, $\mathcal{K}_i^{\mathbf{m}}(t, \omega)$, reads

$$\mathcal{K}_i^{\mathbf{m}}(t, \omega) = \left[\hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega}(T_{i+1}) \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i} + \hat{\Psi}_{\mathbf{m},\omega}(T_i) \frac{T_{i+1} - t}{T_{i+1} - T_i} \right] \times \Theta(T_{i+1} - t) \Theta(t - T_i), \quad (\text{E5})$$

recalling that $\Theta(x)$ is the Heaviside function. This procedure can be repeated for an arbitrary number of virtual tidal histories.

E2 Re-generating tidal fields and infall history

Let us assume briefly that the fields are stationary both in time and angle, and that their statistics is Gaussian. As shown in figure E1, this assumption is quite accurate for the expansions of the potential and the flux density of mass. Let us call the eleven dimensional vector $\mathbf{\Pi}(t) \equiv (\omega_{\rho}, \omega_{\rho\mathbf{v}}, \omega_{\rho\sigma\sigma}, \psi^e)$; and $\hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega}$ the temporal and angular Fourier transform of the fields. The joint probability of the field, $p(\hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega})$, reads

$$p(\hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega}) = \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (\hat{\Gamma} - \langle \hat{\Gamma} \rangle)^{\top} \cdot \mathbf{C}_{\hat{\Gamma}}^{-1} \cdot (\hat{\Gamma} - \langle \hat{\Gamma} \rangle) \right]}{(2\pi)^{11/2} \det^{1/2} |\mathbf{C}_{\hat{\Gamma}}|}, \quad (\text{E6})$$

where

$$\mathbf{C}_{\Pi} = \left[\langle (\hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega}^i - \langle \hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega}^i \rangle) \cdot (\hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega}^j - \langle \hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega}^j \rangle) \rangle \right]_{i,j \leq 11}, \quad (\text{E7})$$

and

$$\langle \hat{\Gamma} \rangle = \left[\langle \hat{\Gamma}_{\mathbf{m},\omega}^i \rangle \right]_{i \leq 11}, \quad (\text{E8})$$

Since these fields are mostly isotropic, their expansions coefficients are nil on average. Hence, the quantity \mathbf{C}_{Π} stands for the angular power spectrum of the eleven fields. For respectively the potential and the flux density of mass, its *temporal* evolution is described in section 6.1 and 6.2. These measured power spectra are sufficient to generate environments restricted to the flux density of mass and the potential. We emphasize that these two fields would not be coherent if no-cross correlations is specified. These cross-correlations and the power spectra for higher moments of the source are given in paper II.

Assuming the full knowledge of these 11 fields and their cross-correlation, it is therefore straightforward to generate for each (\mathbf{m}, ω) a eleven dimensional vector which satisfies equation (E6),

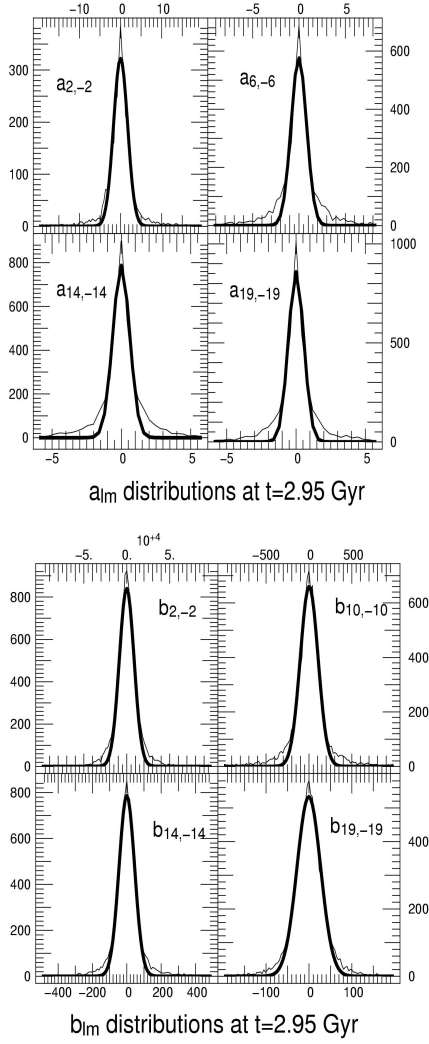


Figure E1. Probing the Gaussianity of the harmonic expansions $a_{\ell m}$, describing the flux density of mass (*Top*) and $b_{\ell m}$, describing the potential ψ^e (*bottom*). Units are arbitrary. Only the real part of the coefficients is shown here, but the imaginary parts have similar distributions. Clearly, the distributions are quasi-Gaussians.

and repeat the draw for all modes (both ω and \mathbf{m}). Inverse Fourier transform yields $\Pi(t)$. Once $\Pi(t)$ is known, we can regenerate the whole five dimensional phase-space source as a function of time via equation (38). This process can also be repeated for an arbitrary number of virtual halo histories. The assumption of stationarity in time can be lifted following the same route as that sketched in Section E1.

APPENDIX F: FROM EXPANSION COEFFICIENTS TO FLUX DENSITIES

F1 From expansion coefficients to advected momentum

The phase space distribution of advected momentum is given by:

$$\begin{aligned} \omega_{\rho\mathbf{v}}(\Omega, v, \Gamma, t) &\equiv s^e(\Omega, v, \Gamma, t) \mathbf{v}. \\ &= \sum_{\alpha, \mathbf{m}, \mathbf{m}'} c_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) g_{\alpha}(v) Y_{\mathbf{m}}(\Omega) Y_{\mathbf{m}'}(\Gamma) \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (\text{F1})$$

where the velocity vector may be written as a function of spherical harmonics:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -v \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (-Y_{1-1}^*(\Gamma) + Y_{11}^*(\Gamma)) \mathbf{e}_{\theta} \\ &\quad - v i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_{1-1}^*(\Gamma) + Y_{11}^*(\Gamma)) \mathbf{e}_{\phi} \\ &\quad v \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{10}^*(\Gamma) \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (\text{F3})$$

Then, one can write:

$$\omega_{\rho\mathbf{v}}(\Omega, t) \equiv \int d\mathbf{v} d\Gamma v^2 s^e(\Omega, v, \Gamma, t) \mathbf{v} \quad (\text{F4})$$

$$= \sum_{\alpha, \mathbf{m}, \mathbf{m}'} [\omega_{\rho\mathbf{v}}]_{\mathbf{m}}(t) Y_{\mathbf{m}}(\Omega) \quad (\text{F5})$$

where

$$[\omega_{\rho\mathbf{v}}]_{\mathbf{m}}(t) = \sum_{\alpha} (3\sigma^2 \mu_{\alpha} + \mu_{\alpha}^3) \mathbf{T}_{\mathbf{m}}(t), \quad (\text{F6})$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mathbf{m}}(t) &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (c_{\alpha,1,-1}^{\mathbf{m}}(t) - c_{\alpha,1,1}^{\mathbf{m}}(t)) \mathbf{e}_{\theta} \\ &\quad + i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (-c_{\alpha,1,-1}^{\mathbf{m}}(t) - c_{\alpha,1,1}^{\mathbf{m}}(t)) \mathbf{e}_{\phi} \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} c_{\alpha,1,0}^{\mathbf{m}}(t) \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (\text{F7})$$

F2 From coefficients to advected velocity dispersion

The distribution of advected velocity dispersion is given by:

$$\omega_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\Omega, v, \Gamma, t) = s^e(\Omega, v, \Gamma, t) (\mathbf{v} - \mathbf{V}(\Omega, t))_i (\mathbf{v} - \mathbf{V}(\Omega, t))_j, \quad (\text{F8})$$

where the subscripts i and j stand for r, θ, ϕ and where

$$\mathbf{V}_i(\Omega, t) \equiv \frac{\int d\mathbf{v} d\Gamma v^2 s^e(\Omega, v, \Gamma, t) v_i}{\int d\mathbf{v} d\Gamma v^2 s^e(\Omega, v, \Gamma, t)} = \frac{\omega_{\rho v_i}(\Omega, t)}{\omega_{\rho}(\Omega, t)}. \quad (\text{F9})$$

Using equation (F8) and equation (F9), one can find:

$$\omega_{\rho\sigma_i\sigma_j}(\Omega, t) + \frac{\omega_{\rho v_i}(\Omega, t) \omega_{\rho v_j}(\Omega, t)}{\omega_{\rho}(\Omega, t)} = \quad (\text{F10})$$

$$\begin{aligned} &\int d\mathbf{v} d\Gamma v^2 s^e(\Omega, v, \Gamma, t) v_i v_j \\ &= \sum_{\mathbf{m}} [\mathbf{q}_{ij}(t)]_{\mathbf{m}} Y_{\mathbf{m}}(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{F11})$$

The six independent elements of the symmetric tensor $\mathbf{q}(t)$ can be computed from $c_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t)$ coefficients using equation (F3) and recalling that:

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_{\ell_1, m_1} Y_{\ell_2, m_2} Y_{\ell_3, m_3} &= \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \times \\ &\quad \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{F12})$$

where $\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = W_{m_1, m_2, m_3}^{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$ is the Wigner 3-j symbol. One can find:

$$[\mathbf{q}_{rr}(t)]_{\mathbf{m}} = \sum_{\alpha\mathbf{m}'} \mathcal{H}_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) 2W_{00\mathbf{m}'}^{11\ell'} \quad (\text{F13})$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{q}_{r\phi}(t)]_{\mathbf{m}} &= \sum_{\alpha\mathbf{m}'} \mathcal{H}_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) i\sqrt{2}(W_{1-1\mathbf{m}'}^{11\ell'} + W_{11\mathbf{m}'}^{11\ell'}) \\
 [\mathbf{q}_{r\theta}(t)]_{\mathbf{m}} &= \sum_{\alpha\mathbf{m}'} \mathcal{H}_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) \sqrt{2}(W_{1-1\mathbf{m}'}^{11\ell'} - W_{11\mathbf{m}'}^{11\ell'}) \\
 [\mathbf{q}_{\phi\phi}(t)]_{\mathbf{m}} &= \sum_{\alpha\mathbf{m}'} \mathcal{H}_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) (-1)(W_{11\mathbf{m}'}^{11\ell'} + 2W_{1-1\mathbf{m}'}^{11\ell'} + W_{-1-1\mathbf{m}'}^{11\ell'}) \\
 [\mathbf{q}_{\phi\theta}(t)]_{\mathbf{m}} &= \sum_{\alpha\mathbf{m}'} \mathcal{H}_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) i(W_{-1-1\mathbf{m}'}^{11\ell'} - W_{11\mathbf{m}'}^{11\ell'}) \\
 [\mathbf{q}_{\theta\theta}(t)]_{\mathbf{m}} &= \sum_{\alpha\mathbf{m}'} \mathcal{H}_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) (W_{11\mathbf{m}'}^{11\ell'} - W_{-1-1\mathbf{m}'}^{11\ell'} - 2W_{1-1\mathbf{m}'}^{11\ell'}),
 \end{aligned}$$

where $\mathcal{H}_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t) = \sqrt{4\pi(2\ell' + 1)}(6\sigma^2\mu_\alpha^2 + \mu_\alpha^4)W_{000}^{11\ell'}c_{\alpha\mathbf{m}'}^{\mathbf{m}}(t)$

APPENDIX G: LINEAR DYNAMICAL KERNEL

Consider the equilibrium state F_0 of the dark halo which does not depend on time nor angles since it is assumed to be stationary. Let us introduce the corresponding actions \mathbf{I} and the angles $\mathbf{w} \equiv (w_r, w_\theta, w_\phi)$ together with the angular rates $\boldsymbol{\omega} \equiv d\mathbf{w}/dt$. Let us expand the perturbed potential according to equation (10) and Fourier transform the basis function with respect to the angles:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{w} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \psi^{[\mathbf{p}]}(\mathbf{r}), \quad (\text{G1})$$

where $\mathbf{k} \equiv (k_r, k_\theta, k_\phi)$ is the Fourier triple index corresponding to the three degrees of freedom on the sphere. Let $\Theta(\tau)$ the Heaviside function, we define two tensors:

$$K_{\mathbf{p}\mathbf{n}}(\tau) = (1 - \Theta(\tau)) \cdot \sum_{\mathbf{k}} \int d^3\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) i\mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}), \quad (\text{G2})$$

which depends only on the halo equilibrium state via F_0 and

$$H_{\mathbf{p}\mathbf{n}}(\tau) = (1 - \Theta(\tau)) \cdot \sum_{\mathbf{k}} \int d^3\mathbf{I} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}\tau) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{p}]*}(\mathbf{I}), \quad (\text{G3})$$

which depends only on the expansion basis, equation (10). In equation (G3), $\sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I})$ is defined by

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) &= \int \frac{d^2\mathbf{w}'}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}') Y_{\mathbf{m}}[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}, \mathbf{w}', \tilde{w}_r)] \times \\
 Y_{\mathbf{m}'}[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{I}, \mathbf{w}', \tilde{w}_r)] g_\alpha(v[\mathbf{I}, \mathbf{w}, \tilde{w}_r]) &\frac{\omega_r(\mathbf{I})}{|\dot{r}(R_{200}, \mathbf{I})|} \exp(-ik_r \tilde{w}_r), \quad (\text{G4})
 \end{aligned}$$

while $\tilde{w}_r(R_{200}, \mathbf{I})$ is the radial angle at the phase where the orbit, \mathbf{I} crosses R_{200} :

$$\tilde{w}_r(R_{200}, \mathbf{I}) = \pi \int^{R_{200}} \frac{dr}{\dot{r}(\mathbf{I}, r)} \bigg/ \oint \frac{dr}{\dot{r}(\mathbf{I}, r)}. \quad (\text{G5})$$

Note that in equation (G3) $\mathbf{n} \equiv (\ell, m, \alpha, \ell', m')$, $\mathbf{p} \equiv (\ell, m)$, while $\mathbf{w}' \equiv (w_\theta, w_\phi)$

G1 Propagating the statistics: a case study

Let us deduce $\varphi_{R_{200}/X}(v)$, the velocity distribution of particles at radius R_{200}/X , ($X > 1$) from the dynamical equation. We have by definition

$$\varphi_{R_{200}/X}(v) = \int d\Gamma d\boldsymbol{\Omega} dR \delta_D(R - R_{200}/X) f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t), \quad (\text{G6})$$

while

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{I}, \mathbf{w}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{n}} \int_{-\infty}^t d\tau \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau - t) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \times \\
 &\left[i\mathbf{k} \cdot \frac{dF_0}{d\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]}(\mathbf{I}) [a_{\mathbf{n}}(\tau) + b_{\mathbf{n}}(\tau)] + c_{\mathbf{n}}(\tau) \sigma_{\mathbf{k}}^{[\mathbf{n}]e}(\mathbf{I}) \right]. \quad (\text{G7})
 \end{aligned}$$

In equation (G6), the integrand can be reexpressed as a function of $(v, R, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Gamma})$ via the canonical transformation: $(\mathbf{I}, \mathbf{w}) = [\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \mathbf{w}(\mathbf{r}, \mathbf{v})]$ (e.g. equation (G5) above). It follows that

$$\varphi_{R_{200}/X}(v) \equiv \varphi_{\text{polarisation}}(v) + \varphi_{\text{tidal}}(v) + \varphi_{\text{ballistic}}(v) \quad (\text{G8})$$

where $\varphi_{\text{polarisation}}(v)$ corresponds to the component in equation (G7) which scales like $a_{\mathbf{n}}(\tau)$ (given by equation (12)), $\varphi_{\text{tidal}}(v)$ is given in turn by the component explicitly proportional to $b_{\mathbf{n}}(\tau)$, while $\varphi_{\text{ballistic}}(v)$ corresponds to the contribution of $c_{\mathbf{n}}(\tau)$ in equation (G7). Note that, once the solution to implicit problem, equation (13), is found, $\varphi_{\text{polarisation}}(v)$ is in fact proportional to $b_{\mathbf{n}}(\tau')$ and $c_{\mathbf{n}}(\tau')$, as expected. Note also that by construction, all the unperturbed orbits do not contribute to equation (G8).

Recall that we have

$$w_\theta = \psi + \int^r dr \frac{1}{\dot{r}} \left[\Omega_\theta - L_z/r^2 \right], \quad \sin(\phi - w_\phi) = \cot \beta \cot \theta \quad (\text{G9})$$

where $\cos \beta = L_z/L$ and $\sin \psi = \cos \theta / \sin \beta$. equation (G5) and (G9) and their time derivative define implicitly the relationship between the angles $\mathbf{w} = (w_r, w_\theta, w_\phi)$, the actions $\mathbf{I} = (I_r, L, L_z)$ and the positions and velocities $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$, $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$.

Note in closing that the nonlinear theory presented in Pichon & Aubert (2005) should eventually allow us to propagate the statistics while accounting for dynamical friction.

11

Distribution des métaux dans le milieu intergalactique

Bien que portant sur l'environnement des halos, l'étude décrite dans ce chapitre (et dans [l'article ci-joint Pichon et al. \(2003\)](#)) se situe sensiblement à part parmi les autres travaux présentés dans ce manuscrit. Au contraire des autres sections, ce sont les propriétés de la matière baryonique qui y sont abordées. Ce travail illustre toutefois la mise en oeuvre d'une description statistique des sous-structures d'un halo dans un contexte observationnel. Cette étude aura de plus permis de tester la production de simulations sur des échelles de temps de calcul et nombre de particules largement supérieures à celle impliquées dans la série de simulations. Deux simulations de matière noire pure à très haute résolution en masse (512^3 particules dans des volumes de 50 et $20 h^{-3} \text{ Mpc}^3$) ont été produites en collaboration avec l'équipe GALICS. Destinées entre autres à l'étude des effets de résolution sur les mesures de flux, l'étude de la distribution des métaux aura permis une première application à ces simulations.

Comme expliqué dans l'introduction de l'article ci-joint (Pichon et al. (2003)), les métaux du milieu intergalactique jouent un rôle fondamental dans la formation des galaxies. Compte tenu de leur impact sur les processus de refroidissement du gaz, la présence de métaux dans le gaz permet d'expliquer la formation de galaxies massives à haut redshift. De même une formation rapide d'étoiles massives à partir de ce gaz pourrait expliquer le manque observationnel de petites structures, comparés aux modèles de type CDM. Néanmoins, leur origine n'est toujours pas clairement établie : les éjecta de supernovae ou les jets d'AGN, constituent autant d'explications possibles. L'étude présentée dans ce chapitre et cet article vise à apporter de premiers éclaircissements quant à la nature de la source des métaux.

11.1 Contraintes observationnelles

Les données observationnelles sur la distribution des métaux ont été obtenues suivant la procédure détaillée dans (Pichon et al. (2003)). Des spectres haute résolution de

quasars ont été obtenues à partir d'observation VLT. Plus de 643 systèmes absorbant de carbone C IV et 104 de silicium Si IV ont pu être extraits de ces données. L'ajustement de ces systèmes absorbants conduit à la distribution en redshift z le long de la ligne de visée des sources de ces métaux. Cette distribution est caractérisée par sa fonction de corrélation à deux points, $\xi(v)$, où v désigne la vitesse relative des deux systèmes absorbants. Vitesse et séparation en redshift sont reliées par :

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta z}{1 + \bar{z}}. \quad (11.1)$$

Les fonctions de corrélation à deux points observées sont données dans la figure 1. de l'article ci-joint.

Quel que soit l'espèce d'ions considérée (C IV ou Si IV), la fonction de corrélation exhibe deux régimes distincts de distribution d'excès de paires. Pour des séparation correspondant à des vitesses supérieures à 150 km.s^{-1} , $\xi(v)$ croît fortement à mesure que la séparation décroît. Passée cette échelle de transition, la pente de $\xi(v)$ se fait plus faible pour les faibles séparations.

L'image que suggère ce type de fonction est celle de *bulles remplies de métaux* centrées autour d'objets distribués à grande échelle. Les systèmes absorbants au sein de ces bulles seraient responsables de la corrélation à faible pente pour de faibles séparation. La corrélation à grande échelle refléterait la distribution des objets émetteurs de métaux, présumément induite par la répartition des grandes structures.

11.2 Un modèle simple de la distribution des métaux

Au vu du type de corrélations mesurées dans les spectres de quasars, l'objectif fut de parvenir à reproduire $\xi(v)$ en appliquant le modèle "bulle de métaux" à des simulations cosmologiques. Ces bulles sont supposées remplies de métaux, mais seules les sous-structures qui s'y trouvent enfouies sont susceptibles de présenter une densité suffisante pour pouvoir être détecté dans les spectres observées. De fait, les contraintes statistiques portées sur la distribution spatiale des métaux permet de sonder la répartition des sous-structures associées. En assimilant les halos de simulations aux points d'ancrages de ces bulles ionisées, des contraintes peuvent être apportées sur la taille de ces bulles et sur la masse des halos concernés.

11.2.1 Une simulation haute résolution

Afin d'étudier une large gamme de masses d'objets, l'étude fut effectuée à l'aide des halos détectés dans une simulation à haute résolution (voir aussi la figure 11.2).

La simulation utilisée fut produite à l'aide de la procédure décrite dans le chapitre 5. Sa taille de boîte est $50 \text{ Mpc}^3 h^{-1}$, contenant 512^3 ($134\,217\,728$) particules de matière noire. A nouveau, la cosmologie retenue fut de type ΛCDM et les paramètres cosmologiques sont identiques à ceux utilisés pour la série de simulations à 128^3 particules.

La résolution en masse atteinte par cette simulation est de $7.7 \times 10^7 h^{-1} M_\odot$. En ne gardant que les halos constitués d'au moins 40 particules, la limite inférieure en masse des halos est $3.2 \times 10^9 M_\odot$. Pour mémoire, cette masse correspond à celle d'une seule particule des simulations décrites dans le chapitre 5. Les halos des simulations furent détectés par HOP.

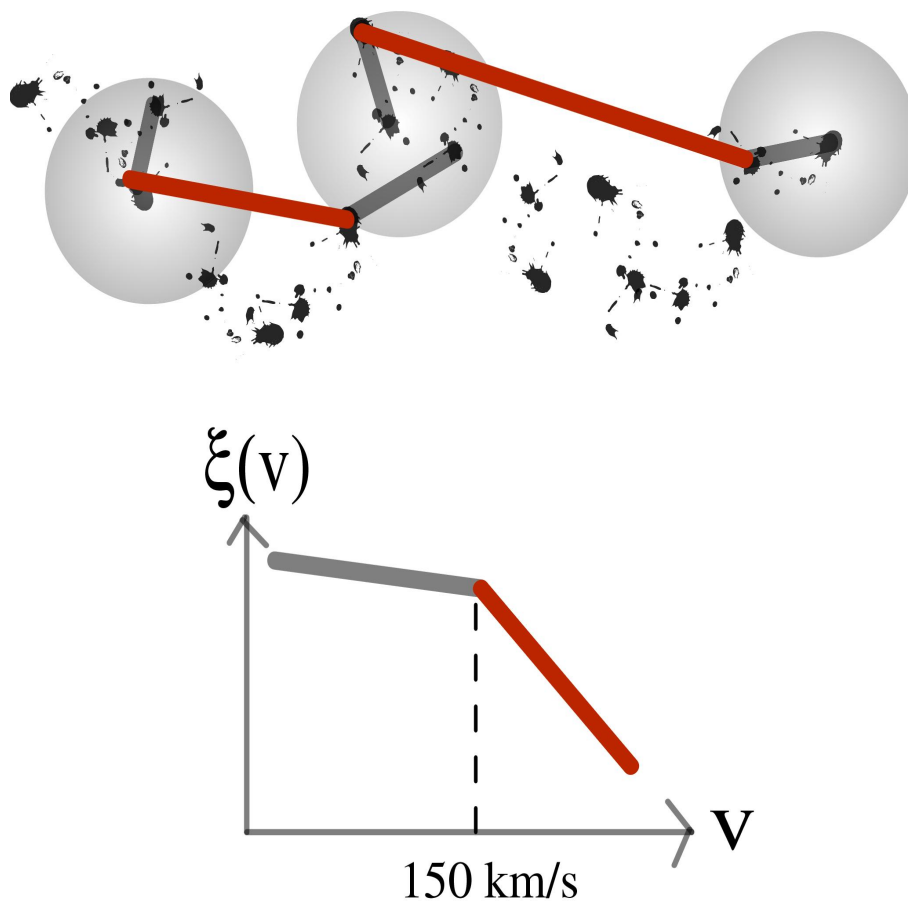


Figure 11.1: Les fonctions de corrélations mesurées sont de type “genou”, avec deux pentes distinctes à faible et grande séparation. Ces deux régimes suggèrent une distribution des métaux en bulles, centrées sur des objets dont la distribution suit la distribution à grande échelle des structures.

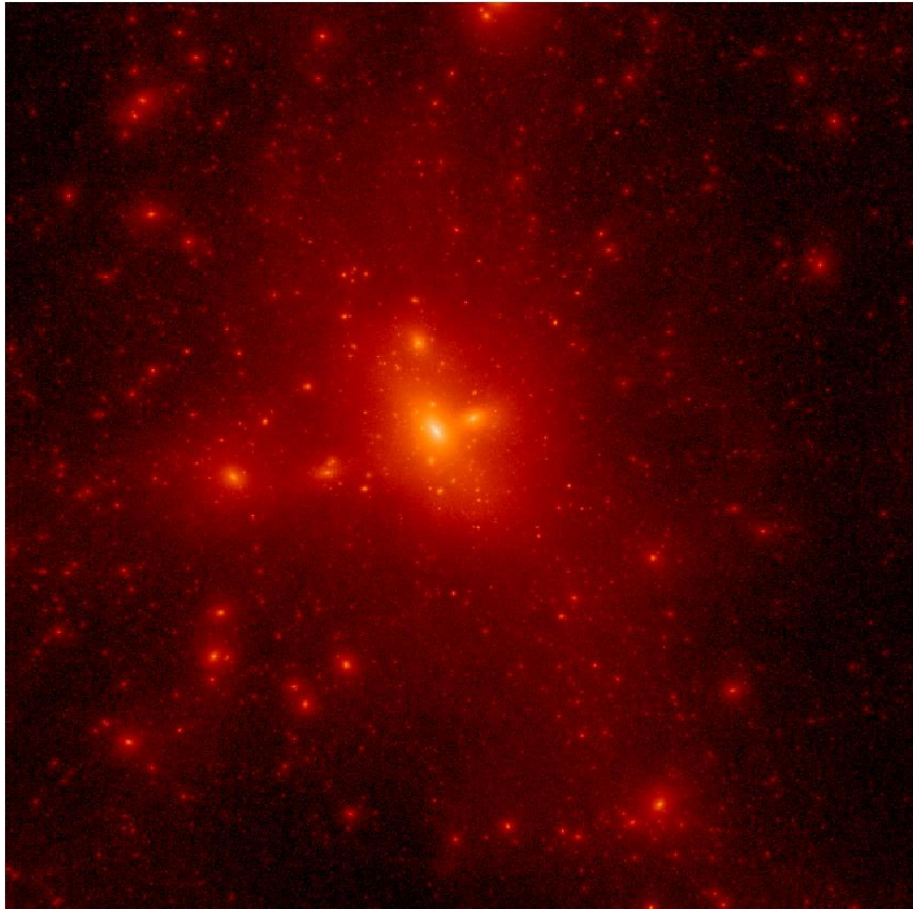


Figure 11.2: Halo de $10^{13}M_{\odot}$ (à $z=0$) extrait de la simulation utilisée pour l'étude de la distribution des métaux. La simulation globale contient 100 millions de particules dans une boîte de $50h^{-1}$ Mpc³.

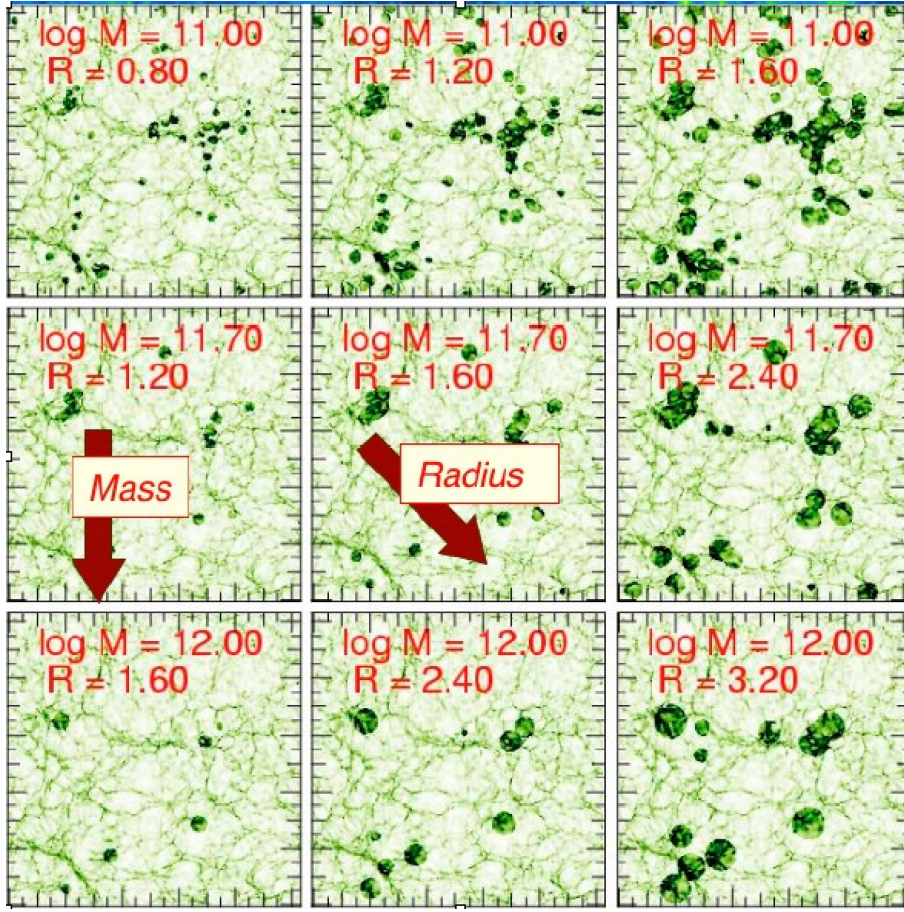


Figure 11.3: Construction des bulles de métaux à partir de la distribution des halos dans une simulation. Plusieurs cas de figures sont présentés ici, pour des tailles de bulles et des masses de halos hôtes différentes. Les sous-structures au sein de ces bulles sont assimilés à des systèmes absorbants.

11.2.2 Contraintes sur les sources de métaux

A partir de la position des halos dans la simulation, une fonction de corrélation $\xi(v)$ synthétique est construite. A cette fin, tous les halos de masses supérieures à M_s sont sélectionnés et autour desquels des sphères de rayon R_s sont définies. Tout groupe détecté à l'intérieur d'une de ces sphères est assimilé à un système absorbant et se voit attribuer un paramètre d'impact égal à dix fois son rayon. Les intersections de ces systèmes avec les lignes de visées tracées au travers de la boîte permettent de déduire une fonction $\xi(v)$ synthétique.

Cette procédure a été appliquée à l'instantané de la simulation correspondant à un redshift $z = 3$. Ce choix tient compte du redshift des observations et de leur absence d'évolution de $\xi(v)$ entre $z = 2$ et $z = 3$. Les deux types d'ions ayant des comportements similaires, le modèle synthétique a été uniquement comparé à la fonction de corrélation de l'espèce CIV. Dans la figure 3 de l'article joint, plusieurs modèles de $\xi(v)$, correspondant à des jeux de valeurs de M_s et R_s différents, ont été comparés à la fonction de corrélation

de CIV mesurée à $z=3$. Un bon ajustement est trouvé pour les valeurs $M_s = 5 \times 10^{11} M_\odot$ et $R_s = 1.6 \text{ Mpc} h^{-1}$.

En première approximation, l'éjection d'un matériau au travers d'un milieu ne dépend que de la densité (supposée constante) du milieu environnant ρ et de l'énergie E injectée (supposée instantanément) dans le matériau. La seule quantité sans dimension faisant intervenir ces deux quantités ainsi que le rayon de la bulle R_s fait intervenir une quantité temporelle t :

$$\beta = R_s \left(\frac{\rho}{Et^2} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad (11.2)$$

où la quantité β est supposée proche de l'unité. La solution exacte de l'expansion d'une sphère dans un milieu homogène fournit $\beta = 48\pi/125 \sim 1.2$. En supposant une densité locale moyenne proche de la densité critique et un temps d'expansion égal au temps de Hubble à cette époque, l'énergie associée à une taille caractéristique de $R_s = 1.6 h^{-1} \text{ Mpc}$ est $E \sim 1.6 \times 10^{58} \text{ ergs}$.

Peu de phénomènes physiques sont capables de produire une telle énergie de façon quasi instantanée. Parmi ceux-ci, les supernovae de type II, associés à l'effondrement d'étoiles massives, transmettent environ 1% de l'énergie libérée sous forme cinétique (le restant étant émis sous forme de neutrinos). Pour une énergie typique de 10^{53} ergs libérés par supernovae, le nombre d'explosions nécessaire pour fournir cette énergie s'élève à 10^7 , ce qui est compatible avec le nombre de systèmes absorbants mesurés en supposant une fonction de masse initiale stellaire raisonnable.

D'un point de vue technique, cette étude aura permis de produire une simulation à haute résolution dans les mêmes conditions que le jeu de simulation décrit dans le chapitre 5, mais dans un régime "numérique" autrement plus exoigeant. Une telle simulation doit permettre une étude en résolution des mesures de flux. D'un point de vue observationnel, elle illustre comment les observations sont susceptibles de fournir des contraintes statistiques sur la répartition des sous-structures au sein des halos. L'objectif de l'approche développée dans ce manuscrit est de pouvoir reproduire de telles contraintes, au vu de la connaissance des flux dans les simulations, du choix de modèle du halos et de l'influence des biais entre matière sombre et lumineuse.

12

**The clustering of intergalactic metals.
ApJL, 2003, 597, L87-L100.**

THE CLUSTERING OF INTERGALACTIC METALS

CHRISTOPHE PICHON,^{1,2,3} EVAN SCANNAPIECO,⁴ BASTIEN ARACIL,² PATRICK PETITJEAN,^{2,5}
 DOMINIQUE AUBERT,^{1,2,3} JACQUELINE BERGERON,² AND STÉPHANE COLOMBI^{2,3}

Received 2003 July 21; accepted 2003 September 26; published 2003 October 20

ABSTRACT

We measure the spatial clustering of metals in the intergalactic medium (IGM) from $z = 1.7$ to 3.0 , as traced by 643 C iv and 104 Si iv $N \geq 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ absorption systems in 19 high signal-to-noise ratio (40–80) and high-resolution ($R = 45,000$) quasar spectra. The number densities and two-point correlation functions of both these species are largely constant with redshift, suggesting that the bulk of metal ejection occurred at $z \geq 3$. However, at $z \leq 1.9$, some additional signature appears in the C iv correlation function at 500 km s^{-1} , associated with four strong and peculiar systems. At all redshifts, the C iv and Si iv correlation functions exhibit a steep rise at large separations and a flatter profile at small separations, with an elbow occurring at $\sim 150 \text{ km s}^{-1}$. We show that these properties are consistent with metals confined within bubbles with a typical radius R_s about sources of mass $\geq M_s$, and we use numerical simulations to derive best-fit values of $R_s \sim 2$ comoving Mpc and $M_s \sim 5 \times 10^{11} M_\odot$ at $z = 3$. This does not exclude the possibility that metals could have been produced at higher redshifts in smaller, but equally rare, objects. At the level of detection of this survey, IGM enrichment is likely to be incomplete and inhomogeneous, with a filling factor of $\sim 10\%$.

Subject headings: cosmology: observations — galaxies: halos — intergalactic medium —
 large-scale structure of universe — quasars: absorption lines

On-line material: color figures

1. INTRODUCTION

No one knows where they came from, how they got there, or when it happened, but quasar (QSO) absorption-line studies have encountered heavy elements in all regions of the tenuous intergalactic medium (IGM) in which they were detectable (e.g., Songalia & Cowie 1996). First, measurements of $N_{\text{C iv}}/N_{\text{H i}}$ indicated that typically $[\text{C}/\text{H}] \approx -2.5$ in somewhat overdense regions at $z \approx 3$, with an order-of-magnitude scatter (e.g., Rauch, Haehnelt, & Steinmetz 1997). Later, statistical methods pushed further, showing that C iv may be present in underdense regions (Ellison et al. 2000) and that a minimum IGM metallicity of approximately $3 \times 10^{-3} Z_\odot$ is already in place at $z \approx 5$ (Songaila 2001, hereafter S01). Although the presence of metals in underdense regions has not yet been firmly established (e.g., Petitjean 2001; Carswell, Schaye, & Kim 2002; Schaye et al. 2003; Aracil et al. 2003), their very existence outside galaxies has profound cosmological implications.

As the long cooling times of large clouds of primordial composition are shortened by even modest levels of enrichment (Sutherland & Dopita 1993; Scannapieco & Broadhurst 2001), IGM metals accelerated the formation of massive ($\geq 10^{12} M_\odot$) galaxies. Similarly, the violent events that ejected heavy elements from galaxies have important implications for the thermal and velocity structure of the IGM (e.g., Gnedin & Ostriker 1997) and would have exerted strong feedback on dwarf galaxies forming nearby (e.g., Thacker, Scannapieco, & Davis 2002).

Still, no one knows where they came from. Although numerous starburst-driven outflows have been observed at $3 \lesssim$

$z \lesssim 5$ (Pettini et al. 2001; Frye, Broadhurst, & Benitez 2002), it is unclear whether such objects are responsible for the majority of IGM enrichment. In fact, a variety of theoretical arguments suggest that these galaxies represent only the tail of a larger population of small “pregalactic” starbursts that formed earlier (Madau, Ferrara, & Rees 2001; Scannapieco, Ferrara, & Madau 2002). On the other hand, active galactic nuclei are observed to host massive outflows (Weyman 1997), whose contribution remains unknown. Finally, theoretical studies have suggested that the primordial generation of metal-free stars were very massive (e.g., Schneider et al. 2002), resulting in a profusion of tremendously powerful pair-production supernovae that distributed metals at $z \gtrsim 15$ (Bromm, Yoshida, & Hernquist 2003).

This Letter describes the first direct attempt to use clustering measurements to discriminate between these disparate models. Making use of 643 C iv and 104 Si iv absorption systems, measured in 19 high signal-to-noise ratio QSO spectra, we are able to place strong constraints on the spatial distribution of intergalactic metals at intermediate redshifts ($1.5 \leq z \leq 3.1$ and a detection limit of $N_{\text{C iv}} \geq 10^{12} \text{ cm}^{-2}$). Whatever the objects that enriched the IGM, it is clear that they formed in the densest regions of space, regions that were highly clustered. As this “geometrical biasing” is a systematic function of mass (e.g., Kaiser 1984), the large-scale clustering of metal-line systems encodes valuable information on the masses of the sources from which they were ejected. Likewise, we are able to relate the small-scale clustering of metals to the typical radius enriched by each source.

The structure of this work is as follows. In § 2 we summarize the properties of our data set and reduction methods. In § 3 we present the number density of C iv and Si iv absorption systems and their two-point correlations. In § 4 we compare these correlations with simulations to constrain the masses and ejection energies of the sources responsible for IGM metal enrichment. A discussion is given in § 5.

¹ Observatoire de Strasbourg, 11 rue de l’Université, 67000 Strasbourg, France.

² Institut d’Astrophysique de Paris, 98 bis boulevard d’Arago, 75014 Paris, France.

³ Numerical Investigations in Cosmology (NIC), CNRS, France.

⁴ Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Largo Enrico Fermi 5, 50125 Florence, Italy.

⁵ LERMA, Observatoire de Paris, 61 avenue de l’Observatoire, F-75014 Paris, France.

TABLE 1
LIST OF LINES OF SIGHT

NAME	z_{em}	COVERAGE	
		C IV	Si IV
PKS 2126–158	3.280	2.36–3.24	2.74–3.24
Q0420–388	3.117	2.23–3.08	2.59–3.08
HE 0940–1050	3.084	2.21–3.04	2.56–3.04
HE 2347–4342	2.871	2.04–2.83	2.38–2.83
HE 0151–4326	2.789	1.97–2.75	2.31–2.75
Q0002–422	2.767	1.96–2.73	2.29–2.73
PKS 0329–255	2.703	1.91–2.66	2.23–2.66
Q0453–423	2.658	1.87–2.62	2.19–2.62
HE 1347–2457	2.611	1.83–2.57	2.15–2.57
HE 1158–1843	2.449	1.71–2.41	2.01–2.41
Q0329–385	2.435	1.70–2.40	2.00–2.40
HE 2217–2818	2.414	1.68–2.37	1.98–2.37
Q1122–1328	2.410	1.68–2.37	1.98–2.37
Q0109–3518	2.404	1.67–2.36	1.97–2.36
HE 0001–2340	2.263	1.56–2.22	1.84–2.22
PKS 0237–23	2.222	1.53–2.18	1.81–2.18
PKS 1448–232	2.220	1.53–2.18	1.81–2.18
Q0122–380	2.190	1.50–2.15	1.78–2.15
HE 1341–1020	2.135	1.46–2.10	1.74–2.10

NOTES.—Here z_{em} is the QSO emission redshift. Only C IV and Si IV systems detected redward of the Ly α forest and at least 3000 km s $^{-1}$ blueward of z_{em} are used.

2. DATA SET AND REDUCTION

2.1. Observations

The ESO Large Programme “The Cosmic Evolution of the IGM” was devised to provide a homogeneous sample of QSO sight lines suitable for studying the IGM from $z = 1.7$ to 4.5. High-resolution ($R \sim 45,000$), high signal-to-noise ratio (40 and 80 pixel $^{-1}$ at 3500 and 6000 Å, respectively) spectra were taken over the wavelength ranges 3100–5400 and 5450–9000 Å, using the UV-Visual Echelle Spectrograph (UVES) on the Very Large Telescope. Although the complete emission redshift range is covered, emphasis is given to lower redshifts, and the C IV and Si IV metal lines discussed in this Letter were well detected over the redshift ranges of 1.5–3.0 and 1.8–3.0, respectively, as described in Table 1.

Observations were performed in service mode for over 2 years. The data were reduced using the UVES context of the ESO MIDAS data reduction package, applying the optimal extraction method, and following the pipeline reduction step by step. The details of this reduction and spectrum normalization are described in further detail in Aracil et al. (2003).

2.2. Line Identification

Metal-line systems were identified with an automated two-step procedure. For each species, we adopted a pixel-by-pixel procedure that compared the spectrum with one that was rescaled and shifted according to the ratio of the oscillator strengths, extracting the minimal flux and accounting for blends. A detection threshold was then applied, such that only absorption features with equivalent widths (EWs) larger than 5 times the noise rms were accepted. Finally, we imposed a set of physical criteria, to eliminate false detections.

For each identified system, the final decomposition into subcomponents was carried out using VPFIT (Carswell et al. 1987). For each component, the initial z -value was taken from the central wavelengths of the corresponding subfeature, and the initial values for the Doppler parameter b and the column density N were computed directly from the EW and peak ab-

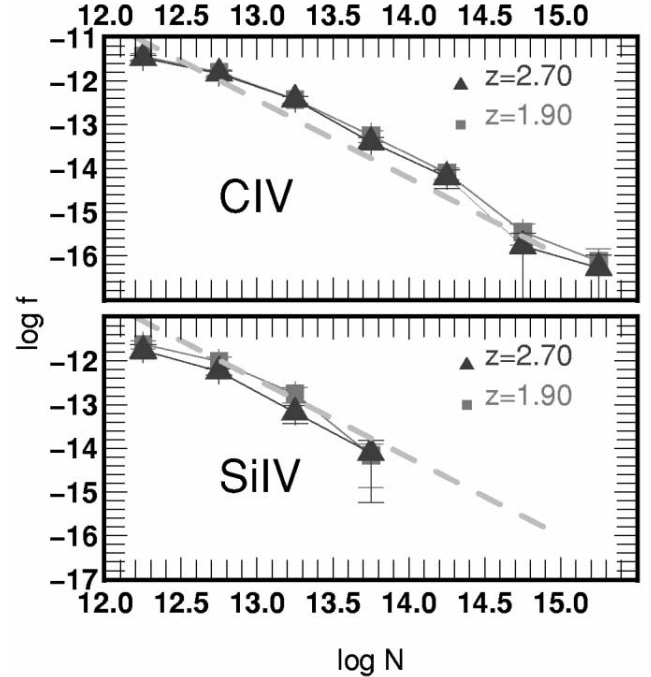


FIG. 1.—Column density distribution of C IV (upper panel) and Si IV (lower panel) absorption systems. In each panel, systems are divided into two redshift bins: $1.5 \leq z \leq 2.3$ (squares) and $2.3 \leq z \leq 3.1$ (triangles). Column density bins are $10^{0.5} N$ cm $^{-2}$ wide, and $\pm 1 \sigma$ error bars are given, computed from the variance of the data between spectra. The dashed lines are the power-law fits measured in S01. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

sorption. This procedure is described in detail in S. Aracil et al. (2003, in preparation) and has been tested on simulated spectra, doing well for all systems with realistic values of N and b .

Finally, we applied a set of four cuts to the automated list generated by VPFIT: $\log N$ (cm $^{-2}$) ≥ 12 due to the detection limit of our procedure, $b \geq 3$ km s $^{-1}$ to avoid false detections due to noise spikes, $\log N$ (cm $^{-2}$) ≤ 16 to remove two very badly saturated subcomponents, and $b \leq 45$ km s $^{-1}$ to avoid false systems due to errors in continuum fitting. Our cuts resulted in a final data set of 643 C IV and 104 Si IV systems, drawn from an original sample of 748 and 149, respectively.

3. ANALYSIS

3.1. Distribution Functions

This sample was first used to compute the column density distribution function $f(N)$. Following Tytler (1987), $f(N)$ is defined as the number of absorbing systems per unit column density and per unit redshift path $X(z) \equiv \frac{2}{3} [(1+z)^{3/2} - 1]$. In an $\Omega_m = 1$ universe, which is a reasonable approximation over the redshift range considered, $f(N)$ does not evolve for a population whose physical size and comoving space density are constant.

In Figure 1, we plot $f(N)$ for both C IV and Si IV systems, dividing our sample into two redshift bins (1.5–2.3 and 2.3–3.1). Both species are consistent with a lack of redshift evolution, as found by previous studies of C IV and Si IV absorption systems (Ellison et al. 2000; S01). Furthermore, the overall density distribution of C IV is consistent with a power law of

the form $f(N) \propto N^{-1.8}$ as fitted by S01. From this figure, we see that some incompleteness sets in around $10^{12.5} \text{ cm}^{-2}$. While fewer in total, Si IV systems are also consistent with a lack of evolution and follow a similar power law with a lower overall magnitude.

3.2. Clustering of Metal Absorption Systems

Having constructed a sample of well-identified metal absorption systems, we then computed their two-point correlation function in redshift space, $\xi(v)$. This quantity was last studied by Rauch et al. (1996) and Boksenberg, Sargent, & Rauch (2003), who noted a marked similarity between $\xi(v)$ of C IV and Mg II (see also Petitjean & Bergeron 1990, 1994). For each QSO, we computed a histogram of all velocity separations and divided by the number expected for a random distribution. We then combined these distributions, weighting them according to the number of pairs in each QSO, yielding $\xi(v) + 1$. The corresponding error bars were computed according to the weighted variance between QSOs.

The resulting correlation functions are shown in Figure 2, again split into two redshift bins. While the spatial distribution of both species shows no evolution at separations $\leq 400 \text{ km s}^{-1}$, our comparison uncovers a low-redshift feature in the 500 km s^{-1} C IV bin. This we have traced back to arising from four extended systems among our 19 QSO sight lines and seems to be due to some peculiarity in the internal structure of these systems. These will be studied in detail in a future publication and are excluded from our model comparisons below, although this cut has no effect on our final fits.

The overall shape and amplitude of the C IV and Si IV correlation functions are strikingly similar and are consistent to within the Si IV measurement errors. Both functions exhibit a steep rise at large separations and a flatter profile at small separations, with an elbow occurring at $\sim 150 \text{ km s}^{-1}$. Unlike Ly α absorption systems (see Cristiani et al. 1997), the correlation of C IV does not seem to depend strongly on absorption column densities. While choosing subsets below a fixed N increases the noise of our measurements, the shape of $\xi(v)$ is preserved to within error bars.

4. CONSTRAINTS ON METAL SOURCES

The two-slope shape of our correlation functions is highly suggestive of a picture in which metal bubbles of a typical size (associated with the small-scale clustering) are generated about objects of a typical mass (whose geometrical bias is associated with the large-scale clustering; see also Petitjean & Bergeron 1990). In order to explore this connection further, we generated a simple model, based on a dark matter-only simulation. As no evolution was detected, and the properties of both species were similar, we focused our attention on comparing C IV absorbers with simulated groups at a single representative redshift of 3.

We adopted a cold dark matter cosmological model with $h = 0.7$, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_b = 0.05$, $\sigma_8 = 0.87$, and $n = 1$, where Ω_m , Ω_Λ , and Ω_b are the total matter, vacuum, and baryonic densities in units of the critical density (ρ_c), σ_8^2 is the variance of linear fluctuations on the $8 h^{-1} \text{ Mpc}$ scale, and n is the “tilt” of the primordial power spectrum. We made use of a $50 h^{-1} \text{ comoving Mpc}^3$ N -body simulation, containing 512^3 dark matter particles. The particle mass was $7.7 \times 10^7 M_\odot$, which gave a minimum-mass resolution for our group finding of $10^{9.5} M_\odot$, as we selected only groups with 40 or more particles. The initial conditions were produced using GRAFIC

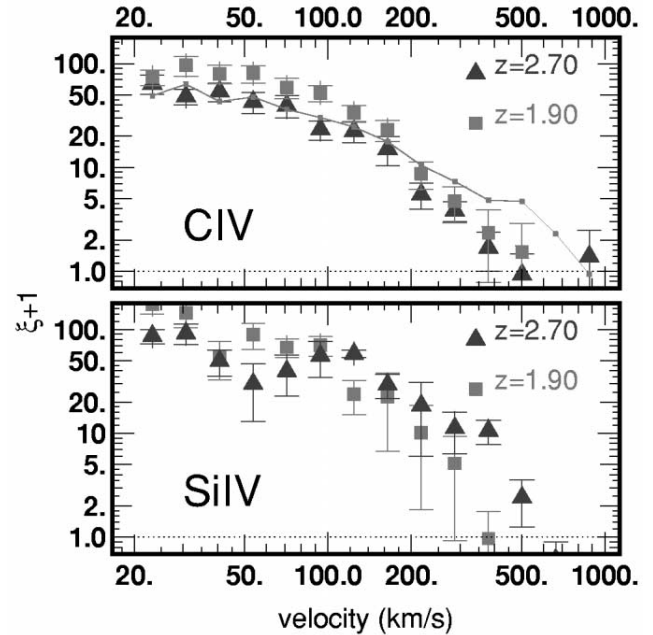


FIG. 2.—Two-point correlation function of C IV (upper panel) and Si IV (lower panel) absorption systems. In each panel, our systems have been divided into two redshift bins, with symbols as in Fig. 1. The solid line in the upper panel includes the four unusual low-redshift systems (see text). [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

(Bertschinger 2001) and were used as the inputs to the parallel version of GADGET (Springel, Yoshida, & White 2001). Halo detection was performed using the HOP algorithm (Eisenstein & Hut 1998) with the cuts $\delta_{\text{peak}} = 160$, $\delta_{\text{saddle}} = 140$, and $\delta_{\text{outer}} = 80$.

The resulting list of groups was then used to construct a simple simulated picture of IGM metal enrichment. We selected all $z = 3$ groups above a threshold group mass M_s , as markers of the centers of enrichment events, about which we painted spheres of radius R_s . Note that our choice of this set is not meant to imply that enrichment occurred at $z = 3$ but rather that it occurred at an unknown redshift higher than the observed range, centered on groups whose large-scale clustering was equivalent to $z = 3$ objects of mass M_s . All smaller groups within such spheres were associated with C IV absorbers, each with an overall impact parameter equal to a factor \tilde{b} times its dark matter radius. The observed number of C IV systems per unit redshift path was well reproduced by fixing $\tilde{b} = 10$.

Thirty-two planes were taken, and for each plane all 512 sight lines were drawn. The average two-point correlation was then compared with detected ξ -values, as shown in Figure 3. As expected, the large-scale correlations are almost completely dependent on M_s , while the position of the elbow in $\xi(v)$ is set by R_s . Our measurements are clearly suggestive of $R_s = 1.6 \text{ Mpc}$ and $M = 5 \times 10^{11} M_\odot$ $z = 3$ objects, corresponding to a filling factor of $f \sim 10\%$, at the level of detection of our survey. Varying \tilde{b} over a wide range of values has only a minor impact on this comparison, changing the inner slope of $\xi(v)$ slightly while giving a much poorer fit for the overall number of systems.

A straightforward geometric argument allows us to associate R_s with a wind ejection energy per object, E_s . Here we adopt a simple picture in which the average bubble expands according to a Sedov-Taylor solution (Sedov 1959). In this case, E_s is

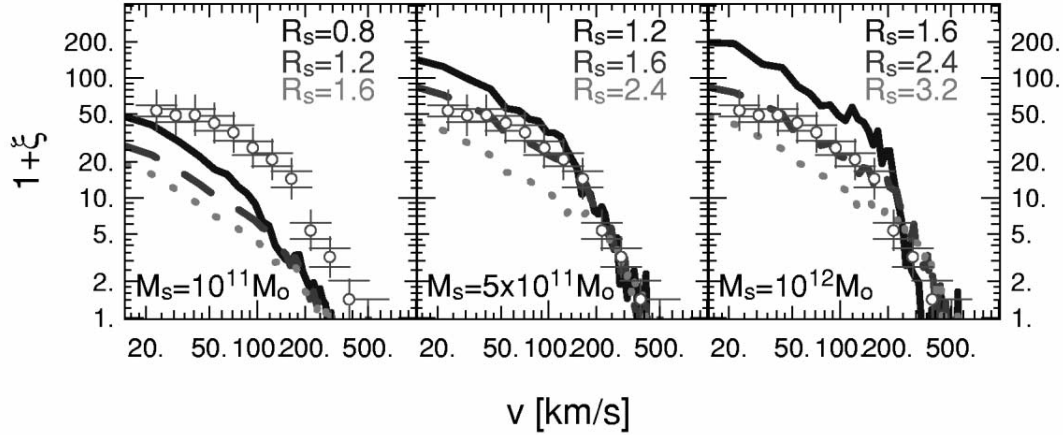


FIG. 3.—Comparison between detected C IV correlation functions (points) and simulated correlations (lines). In each panel, M_s is fixed, R_s is varied over three representative values, and $b = 10$. [See the electronic edition of the Journal for a color version of this figure.]

related to the bubble radius as $E_s = 48\pi R^5 \rho t^{-2}/125$, where t is the expansion time and R is in physical units such that $R = R_s/(1 + z_0)$, where z_0 is the redshift of observation. If we assume for simplicity that t is approximately the Hubble time (2.3 Gyr at $z = 3$ in our cosmological model) and that the shell expands into material at the mean density at this redshift, this gives $E = 1.6 \times 10^{58}$ ergs, which is equal to the kinetic energy input from roughly 1.3×10^7 Type II supernovae. This is roughly consistent with the overall number of C IV systems, which can be converted into a cosmological density of $\Omega_{\text{C IV}} \approx 5 \times 10^{-8}$ as described in S01.

5. DISCUSSION

We have studied the clustering of 643 C IV and 104 Si IV systems detected in UVES observations of 19 high- z QSOs using an automatic procedure. The independently derived correlation functions of C IV and Si IV are similar, giving confidence in our automated approach. The shape of the correlation function is consistent with a picture in which metals are confined within

bubbles of $R_s \sim 2$ Mpc about $M_s \sim 5 \times 10^{11} M_\odot$ halos at $z = 3$. This implies that the filling factor of the metals is only 10% at the detection limit of the survey.

However, since our overall mass constraint is derived only from the geometrical bias of the sources, we cannot exclude models in which equally rare but somewhat smaller higher redshift objects are responsible for metal enrichment. Furthermore, the observed number density of C IV shows little evolution at $z \leq 3$ as at higher redshift (e.g., S01). While more detailed investigations are necessary, it remains clear that all such models will be strongly constrained by the clustering of intergalactic metals.

We are grateful to J. Heyvaerts, C. Mallouris D. Pogossyan, E. Rollinde, R. Teyssier, and E. Thiébaud. E. S. was supported in part by an NSF MPS-DRF fellowship. This work is based on observations collected through ESO project 166.A-0106. The computational resources were made available to us by CINES.

REFERENCES

- Aracil, B., Petitjean, P., Pichon, C., & Bergeron, J. 2003, ApJ, submitted
 Bertschinger, E. 2001, ApJS, 137, 1
 Boksenberg, A., Sargent, W. L. W., & Rauch, M. 2003, ApJ, submitted (astro-ph/0307557)
 Bromm, V., Yoshida, N., & Hernquist, L. 2003, ApJ, 596, L135
 Carswell, R. F., Schaye, J., & Kim, T. S. 2002, ApJ, 578, 43
 Carswell, R. F., Webb, J. K., Baldwin, J. A., & Atwood, B. 1987, ApJ, 319, 709
 Cristiani, S., D'Odorico, S., D'Odorico V., Fontana, A., Giallongo, E., & Savaglio, S. 1997, MNRAS, 285, 209
 Ellison, S. L., Songaila, A., Schaye, J., & Pettini, M. 2000, AJ, 120, 1175
 Eisenstein, D. J., & Hut, P. 1998, ApJ, 498, 137
 Frye, B., Broadhurst, T., & Benitez, N. 2002, ApJ, 568, 558
 Gnedin, N. Y., & Ostriker, J. P. 1997, ApJ, 486, 581
 Kaiser, N. 1984, ApJ, 284, L9
 Madau, P., Ferrara, A., & Rees, M. J. 2001, ApJ, 555, 92
 Petitjean, P. 2001, Ap&SS Suppl., 277, 517
 Petitjean, P., & Bergeron, J. 1990, A&A, 231, 309
 ———. 1994, A&A, 283, 759
 Pettini, M., Shapley, A. E., Steidel, C. C., Cuby, J.-G., Dickinson, M., Moorwood, A. F. M., Adelberger, K. L., & Giavalisco, M. 2001, ApJ, 554, 981
 Rauch, M., Haehnelt, M.G., & Steinmetz, M. 1997, ApJ, 481, 601
 Rauch, M., Sargent, W. L., Womble, D. S., & Barlow, T. A. 1996, ApJ, 467, L5
 Scannapieco, E., & Broadhurst, T. 2001, ApJ, 549, 28
 Scannapieco, E., Ferrara, A., & Madau, P. 2002, ApJ, 574, 590
 Schaye, J., Aguirre, A., Kim T.-S., Theuns, T., Rauch, M., & Sargent, W. L. W. 2003, ApJ, 596, 768
 Schneider, R., Ferrara, A., Natarajan, P., & Omukai, K. 2002, ApJ, 571, 30
 Sedov, L. I. 1959, Similarity and Dimensional Methods in Mechanics (New York: Academic)
 Songaila, A. 2001, ApJ, 561, L153 (S01)
 Songaila, A., & Cowie, L. L. 1996, AJ, 112, 335
 Springel, V., Yoshida, N., & White, S. D. M. 2001, NewA, 6, 79
 Sutherland, R. S., & Dopita, M. A. 1993, ApJS, 88, 253
 Thacker, R. J., Scannapieco, E., & Davis, M. 2002, ApJ, 581, 836
 Tytler, D. 1987, ApJ, 321, 49
 Weymann, R. J. 1997, in ASP Conf. Ser. 128, Mass Ejection from AGN (Active Galactic Nuclei), ed. N. Arav, I. Shlosman, & R. J. Weymann (San Francisco: ASP), 3

13

Conclusions

Bien que le modèle cosmologique actuel ait remporté de nombreux succès dans l'étude des grandes échelles, sa description des phénomènes à l'échelle galactique est toujours en proie à des difficultés. Ces problèmes surgissent dans la description des propriétés baryoniques (par ex. taille des disques, processus de refroidissement) mais également dans celui du comportement de la matière noire (par ex. surproduction de petites structures, profils piqués des halos). En particulier, il n'est encore pas clair aujourd'hui si ces difficultés apparaissent du fait de la description des processus internes aux systèmes galactiques ou de leurs interactions avec l'environnement. De même, la nature intrinsèque ou extrinsèque de certaines propriétés observées des galaxies (par ex. le gauchissement, les spirales) n'est pas clairement établie et de façon générale, les contributions relatives des processus internes et externes au devenir des systèmes galactiques ne sont pas bien connues. Cette thèse propose d'établir un cadre qui permette d'aborder statistiquement cette question de l'inné ou de l'acquis des propriétés dynamique des systèmes galactiques.

La démarche développée repose sur une approche hybride. D'une part, le halo est décrit avec les outils de la dynamique galactique. Cette approche permet d'aborder de façon *statistique* et *cohérente* l'évolution dynamique de ces objets en interaction. En particulier, ces outils permettent d'aborder la dynamique du halo dans "les bonnes variables", i.e. les angles-actions dans le cas d'un système sphérique. Elles permettent d'appréhender les phénomènes non linéaires dans leur espace de description naturel, celui des orbites et des phases associées. D'autre part, les environnements sont modélisés à l'aide de simulations cosmologiques. De cette façon, les interactions conduites par ces environnements sont *représentatives* de la 'cosmologie environnante' en termes d'échelles spatiales ou temporelles impliquées. La mise en commun de ces deux approches permet d'aborder de façon globale les distributions au sens statistique des propriétés dynamiques des halos, tout en prenant en compte la grande diversité des histoires d'interactions possibles.

Pratiquement, les propriétés des environnement sont quantifiées via la mesure des flux de matière au travers du rayon de Viriel des halos simulés. Cette approche "fluide" permet d'appréhender l'accrétion de façon globale sans différenciation à priori sur la

nature “diffuse” ou non de celle-ci. Les objets accrétés ne sont constitués qu’une forme particulière du fluide de matière noire. Cette description des flux accrétés est complétée par une description des forces à longues distance reprojétée sur cette même surface de Viriel. Ces interactions au sens large sont décrites sous formes de champs sphériques, dont les propriétés statistiques sont amenées à être utilisées comme entrées des outils théoriques de la dynamique des halos. A ce titre, cette approche est similaire aux théories semi-analytiques de formation des galaxies (par ex. Kauffmann et al. (1999), Hatton et al. (2003), Benson et al. (2001)). De façon analogue, l’approche développée dans cette thèse repose sur un suivi de l’histoire de formation des halos. Elle présente l’avantage supplémentaire de fournir un descriptif de la géométrie des interactions, dont la connaissance est indispensable à l’étude de la réponse dynamique des halos. De plus, en combinant la dynamique locale à une description représentative des environnements, l’approche présentée ici est complémentaire des simulations haute résolution de galaxies isolées (par ex. Knebe et al. (2004), Gill et al. (2004), Abadi et al. (2003)). Celles-ci permettent d’étudier en détail les processus dynamiques sans toutefois parvenir à être toujours représentatives.

La dynamique est abordée à partir d’une extension de la méthode linéaire développée entre autres par Tremaine & Weinberg (1984) et Murali (1999). Cette extension repose 1) sur la prise en compte de termes sources décrivant l’accrétion de matière par les halos et 2) sur un développement perturbatif non linéaire. Ce dernier doit permettre de traiter de façon auto-consistante des phénomènes tels que la friction dynamique et la déplétion des satellites par effet de marée. Il est démontré que ce formalisme permet d’exprimer les propriétés statistiques de la réponse des halo en fonction des propriétés statistiques de l’accrétion et du champ de marée. Cette “propagation statistique” se fait sans avoir recours aux réalisations individuelles de ces interactions. Ces développements théoriques ont notamment mis en lumière la nécessité d’une description statistiques des flux et du potentiel qui prenne en compte leurs interdépendances (via des corrélations croisées). Une première mise en place pratique de ces développements, restreinte pour l’instant au cas linéaire, a été développée et soumise à de premiers tests. Ces derniers ont notamment été validés dans le cadre de l’étude de la compression adiabatique du halo par la croissance d’un disque.

L’évolution séculaire du halo soumis de façon récurrente à ces perturbations est également abordée via une description quasi-linéaire de sa dynamique. La dynamique au long cours du halo est alors gouvernée par une équation de Fokker-Planck décrivant la diffusion des orbites du système sur les perturbations environnementales (les satellites par exemple). Bien que similaire aux approches décrites par Weinberg (2001b) et Ma & Bertschinger (2004) par exemple, ce développement se distingue par l’utilisation de conditions aux bords issus de simulations, par la prise en compte de l’accrétion et par une description des processus diffusifs dans l’espace des actions.

En parallèle, un grand jeu de simulations cosmologiques de matière noire a été produit afin d’étudier les propriétés de ces flux tout en garantissant une convergence statistique des résultats. Des premiers résultats sur les propriétés des flux ont été obtenus. Il a été démontré que l’accrétion de matière noire par les halos se fait de façon anisotrope à un niveau de 15%. Ce résultat quantitatif confirme les conclusions qualitatives de Zentner et al. (2005), Knebe et al. (2004) par exemple. Cette propriété de l’accrétion a été établie via la description en termes de flux et confirmée par l’étude de la distribution

des satellites autour des halos. La brisure d'isotropie est faible mais significative et trace la distribution de matière à grande échelle le long de filaments. Cette anisotropie est susceptible d'influer sur les mesures de lentillage faible et sur les propriétés dynamiques des disques, pour peu que cette propriété des flux se propage jusqu'aux régions internes du halo.

Une autre série de mesures des flux a été conduite à explorer les propriétés de la fonction de distribution dans l'espace des phases de la matière accrétée. Une formalisation de cette "source" est proposée afin de pouvoir être directement transposable à la description analytique de la dynamique. De plus, ces mesures de flux ont permis d'aborder statistiquement et quantitativement la thématique de l'accrétion, habituellement contrainte par une approche de type Press-Schechter (par ex. Wechsler et al. (2002), van den Bosch (2002)), ou de façon moins représentative via le suivi de satellites dans des simulations hautes résolution (par ex. Tormen (1997), Gill et al. (2004), De Lucia et al. (2004)). L'étude cinématique des flux de masses a mis en évidence l'importance de l'influence du halo sur cette accrétion. Cette influence se manifeste par exemple par la circularisation des orbites et la différenciation cinématique de la matière nouvellement accrétée. La fonction de corrélation angulo-temporelle du champ de marée sur la sphère a également été mesurée. Le champ de marée est fortement quadrupolaire, reflétant probablement la distribution de matière environnante. Enfin, les premières contraintes ont été mises sur la statistique angulo-temporelles à deux points du flux de masse, mettant notamment en lumière des difficultés liées aux effets de résolution et de normalisation.

Cette thèse présente également succinctement une étude sur la distribution des métaux liés aux sous-structures des halos. Ce travail fut réalisé à l'aide une simulation haute résolution produite dans les même conditions que le jeu de simulations utilisé pour les mesures de flux.

Cette approche statistique des problèmes dynamiques aux échelles galactiques trouve son intérêt dans le vaste champ d'applications potentielles qui s'y rattache. Au vu des conditions aux bords mesurées dans les simulations, une telle approche doit permettre de prédire les distributions des propriétés dynamiques des halos. A l'inverse, les propriétés observées des halos (via des traceurs de la distribution de matière) mettront des contraintes sur la nature des interactions. De plus, la description analytique de la dynamique du halo permet d'étudier la dépendance des prédictions statistiques en fonction du modèle de halo tout en influant sur l'environnement. Par essence, ce genre d'étude est difficilement accessible via des nombres finis de simulations cosmologiques. Dans le contexte actuel où une large place est faite aux grands relevés du ciel (par ex. SDSS, 2DF), la confrontation des prédictions statistiques aux observations permettra à terme de trancher sur les contributions relatives des effets environnementaux et intrinsèques à l'établissement des propriétés dynamiques des halos. Enfin, la validation de la méthode au vu des observations ou des simulations autorisera la mise en place de l'inversion dynamique qui a pour objectif de remonter l'histoire dynamique de la matière accrétée par les halos (courants, sous-structures). Ce champ d'application reste essentiellement hors de portée des approches purement numériques. L'observation détaillée de la dynamique locale via des expérience telles que RAVE ou GAIA constitueront le champ d'application idéal d'une telle procédure.

Difficultés en suspens

Le projet scientifique qui sous-tend cette thèse est très clairement prospectif et certains points délicats demandent encore à être éclaircis. Ces points d'achoppement mêlent des difficultés d'ordres matériels, dont la résolution ne nécessite que des moyens matériels et/ou du temps à consacrer et des problèmes d'ordre plus conceptuel.

La complétion des mesures dans les simulations génère essentiellement des difficultés d'ordre matériel. L'utilisation de simulations à haute résolution et de resimulations doit permettre d'aborder de façon plus systématique les problématiques liées à la résolution spatiale ou en masse. Que ce soient les effets de résolution angulaire sur la sphère ou la dépendance des propriétés environnementales en fonction de la masse du halo, ces difficultés seront plus facilement abordées par des simulations à plus haute résolution. De plus, la spécificité de la représentation halocentrique implique que les résultats obtenus via cette approche ne sont pas aisément transposables à ceux obtenus via une description en terme de satellites. Pour améliorer la compréhension des propriétés des flux, une vérification systématique des mesures "fluides" par des mesures sous forme d'objets est nécessaire à terme. A nouveau, ce type d'étude est facilité dans le cadre de resimulations ou de simulations à haute résolution.

Toutefois cette classe de difficultés est partiellement éclipsée par un certain nombre de problèmes plus "profonds". Ainsi, la mesure des conditions aux bords a permis de mettre en lumière la difficulté de synthétiser au mieux la très grande quantité d'information contenue dans le terme source. Celui-ci décrivant totalement les propriétés de la matière accrétée dans l'espace des phases, en plus de son évolution temporelle, cette complexité apparaît après coup comme évidente et difficilement réductible. Une reformulation de ce terme source ou l'utilisation de certaines hypothèses simplificatrices (par ex. isotropie des vitesses, accrétion sphérique,...) mais *ad hoc* peuvent apparaître comme des solutions intermédiaires dans le processus d'une caractérisation complète de cette accrétion.

De même, l'approche analytique suppose un certain nombre d'hypothèses qui définissent son domaine de validité (par ex. la sphéricité des halos, l'amortissement des phénomènes transitoires). Ces conditions ne sont pas *à priori* satisfaites pour les halos formés dans les simulations. Plus généralement la formation hiérarchique des halos semble les faire sortir dès en amont du cadre formel sur lequel repose la dynamique non linéaire des systèmes sphériques. L'importance générale des fusions, l'accrétion importante à haut redshift ou la triaxialité constituent autant de difficultés qu'il faudra contourner. Toutefois, il paraît raisonnable de penser que toute une catégorie de halos puisse répondre aux critères d'application de la méthode analytique, reste à définir clairement cette population. Cette définition doit se faire au vu de critères "théoriques" (type histoire d'accrétion "calme" ou époque de dernière fusion) mais doit pouvoir être transposée en termes d'observables. C'est à cette seule condition que les biais induits par les hypothèses de départ pourront être pris en compte dans la prédiction ou l'interprétation d'observations via cette théorie.

Enfin, la démarche présente repose sur la mise en place d'un outil de dynamique non-linéaire qui reste à mettre en place. Or une grande partie des points d'achoppement précédents ne pourront être abordés que si l'on dispose d'un code capable de calculer la réponse non linéaire du halo ouvert pour un ensemble de cas de figures représentatifs. Ces cas de figure pourront tester le régime de validité de la théorie non linéaire, la pertinence des hypothèses visant à simplifier la description des flux et la nécessité (ou

non) de décrire la dynamique à des ordres supérieur à deux pour parvenir à une bonne description des processus de friction et d'effeuillage de marée.

Perspectives

La démarche qui aura prévalu durant cette thèse aura été d'explorer en parallèle les outils théoriques et numériques nécessaires à l'étude statistique de la dynamique des halos. Cette double approche aura permis de clarifier le cadre qui permet d'aborder cette dynamique dans un contexte cosmologique. A défaut de fournir des résultats quantitatifs, la propagation statistique, les outils dynamiques nécessaires à sa mise en place et le type de mesures de flux qui doivent servir d'entrées sont clairement identifiés, ainsi que les difficultés associées à chaque étape. Reste à passer d'une phase exploratoire à une phase de "production".

Au vu des points délicats mentionnés précédemment, il apparaît clairement que la mise en place de la théorie non-linéaire doit apparaître comme une priorité. La complexité des couplages entre réponses et perturbations implique que le développement d'un tel outil sera nécessairement ardue, particulièrement au vu de l'implémentation du seul modèle linéaire. Précisons à nouveau qu'un tel outil n'a pas vocation à remplacer les simulations numériques mais plutôt à les compléter. La mise en place d'une description analytique non-linéaire ne peut par exemple prétendre à la souplesse d'utilisation des simulations. En revanche, elle peut être "taillée sur mesure" au type de halo ou d'interactions que l'on souhaite étudier et c'est dans ce régime qu'un tel outil doit être envisagé.

En parallèle les mesures de flux devront être menées à terme car elles sont elles-mêmes porteuses d'applications. Le comparatif systématique du terme source avec le flux en termes de sous-structures conduira à aborder le problème d'identification des sous-structures dans l'espace des phases. En particulier, ce comparatif permettra de déterminer comment les satellites et restes de satellites peuvent être tracés plus efficacement au sein des simulations ou dans les relevés cinématiques. De telles mesures devront être poursuivies dans un régime "statistique" via de grands volumes simulés, car lui seul permet de garantir une convergence qualitative des résultats. Enfin, ces mesures permettront de mettre en place une procédure efficace de génération d'environnement synthétiques. De tels environnements trouveraient naturellement leur place dans l'optique de simulations de halos ou de galaxies à haute résolution, qui "baigneraient" dans des milieux représentatifs des simulations à grande échelle.

Enfin, des entrées devront être fournies à la théorie non-linéaire, une fois celle-ci mise en place. Dans l'idéal, ces entrées consisteraient en une description complète des environnements des halos à partir de simulations mais cette tâche ne pourra être complétée que sur le long terme. Entre temps, des problèmes précis pourront être étudiés à partir de mesures ciblées. Par exemple, disposant dès à présent des propriétés statistiques du champ de marée extérieur, les thématiques de polarisation et d'orientation du halo par rapport au champ environnant pourront être abordées. Autre possibilité, la mesure du moment angulaire accreté et sa propagation au travers du halo devront permettre d'étudier la thématique de profil universel de moment angulaire. De plus, le gauchissement du disque étant sensible à ce moment orbital, se pose la question de la conservation de son alignement ou de son amplitude au cours de sa "chute" au travers du halo. De telles études ne seraient certes pas complètement cohérentes au sens de la propagation

statistique, mais elles constitueraient de premières validations de cette dernière tout en participant à la compréhension des relations galaxies-environnements.

A plus long terme, ces travaux pourront être étendus à la dynamique du gaz, permettant d'aborder directement certaines thématiques liées à la composante baryonique du disque (par ex. génération de spirales). Ceci supposera que la dynamique propre du disque et les couplages disques/halos devront être pris correctement en compte. De plus, la procédure de mesure devra être transposée aux simulations hydrodynamiques afin de contraindre les propriétés du gaz accrété. Néanmoins, compte tenu de l'importance des phénomènes liés à la physique baryonique (par ex. refroidissement, conversion gaz-étoiles, ou phénomènes de rétroaction), le degré de complexité de la démarche actuelle s'en trouvera largement augmenté et nécessitera probablement une démarche plus ciblée en termes d'objectifs que celle développée en toute généralité dans le cas de la matière noire.

Epilogue

Les points précédents posent les jalons des développements devant conduire à la mise en place pratique et complète du projet. Les outils dynamiques sont complexes mais sont à l'image de l'objectif fixé, à savoir relier les propriétés statistiques des systèmes galactiques et des environnements. Les mesures dans les simulations drainent leur lot de spécificités et de difficultés mais résultent de la forte exigence initiale de cohérence du traitement dynamique.

Il s'agit de rappeler que c'est le large champs d'applications potentielles qui a servi de moteur aux recherches présentes. Bien que cette thèse repose sur des travaux à forte composante théorique et numérique, c'est bien les perspectives observationnelles qui ont guidé sa mise en place. Dans une époque où l'astronomie parvient à produire de très grandes quantités d'observations via la généralisation des grands relevés, il apparaît indispensable que des efforts théoriques accompagnent cette tendance. Ainsi, ils se doivent de prédire les distributions attendues d'objets présentant telle ou telle caractéristiques. C'est dans cette démarche que s'inscrivent les recherches décrites dans cette thèse, en proposant d'opter pour une approche globale et cohérente de la dynamique des galaxies en interaction.

Bibliographie

- Abadi M. G., Navarro J. F., Steinmetz M., Eke V. R., 2003, ApJ , 597, 21
- Antonov V. A., 1960, AZh, 37, 918
- Appel W., 2002, Mathematiques pour la physique et les physiciens.. H&K Editions
- Arad I., Dekel A., Klypin A., 2004, MNRAS , 353, 15
- Arfken G. B., Weber H. J., 1995, Mathematical methods for physicists
- Aubert D., Pichon C., Colombi S., 2004, MNRAS , 352, 376
- Bardeen J. M., Bond J. R., Kaiser N., Szalay A. S., 1986, ApJ , 304, 15
- Barnes J., Hut P., 1986, Nature, 324, 446
- Barnes J., Hut P., Goodman J., 1986, ApJ , 300, 112
- Barnes J. E., Hernquist L., 1992, ARAA , 30, 705
- Bennett C. L., Halpern M., Hinshaw G., Jarosik N., Kogut A., 2003, ApJS , 148, 1
- Benson A. J., Frenk C. S., Baugh C. M., Cole S., Lacey C. G., 2001, MNRAS , 327, 1041
- Bernardeau F., Colombi S., Gaztañaga E., Scoccimarro R., 2002, Phys. Rep., 367, 1
- Bertschinger E., 1998, ARAA , 36, 599
- Bertschinger E., 2001, ApJS , 137, 1
- Binney J., 1992, ARAA , 30, 51
- Binney J., Jiang I., Dutta S., 1998, MNRAS , 297, 1237
- Binney J., Tremaine S., 1987, Galactic dynamics. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p.
- Blumenthal G. R., Faber S. M., Flores R., Primack J. R., 1986, ApJ , 301, 27
- Bond J. R., Cole S., Efsthathiou G., Kaiser N., 1991, ApJ , 379, 440
- Brainerd T., 2004, astro-ph, 0408559
- Briggs F. H., 1990, ApJ , 352, 15

- Bryan G. L., Norman M. L., 1997, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series Simulating X-Ray Clusters with Adaptive Mesh Refinement. pp 363–+
- Bullock J. S., Dekel A., Kolatt T. S., Kravtsov A. V., Klypin A. A., Porciani C., Primack J. R., 2001, *ApJ* , 555, 240
- Burkert A., Truran J. W., Hensler G., 1992, *ApJ* , 391, 651
- Chandrasekhar S., 1943, *ApJ* , 97, 255
- Cole S., Aragon-Salamanca A., Frenk C. S., Navarro J. F., Zepf S. E., 1994, *MNRAS* , 271, 781
- Coles P., 2001, *astro-ph*, 0103017
- Colpi M., Mayer L., Governato F., 1999, *ApJ* , 525, 720
- Croft R. A. C., Metzler C. A., 2000, *ApJ* , 545, 561
- De Lucia G., Kauffmann G., Springel V., White S. D. M., Lanzoni B., Stoehr F., Tormen G., Yoshida N., 2004, *MNRAS* , 348, 333
- Edmonds A. R., 1960, Angular Momentum in Quantum Mechanics. Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton: Princeton University Press, 1960
- Eisenstein D. J., Hut P., 1998, *ApJ* , 498, 137
- Eke V. R., Cole S., Frenk C. S., 1996, *MNRAS* , 282, 263
- Faltenbacher A., Allgood B., Gottlober S., Yepes G., Hoffman Y., 2005, *astro-ph*, 0501452
- Fitzpatrick R., 1998, Introduction to Plasma Physics. <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/plasma.html>
- Flores R. A., Primack J. R., 1994, *ApJL* , 427, L1
- Frenk C. S., White S. D. M., Davis M., Efstathiou G., 1988, *ApJ* , 327, 507
- Fridman A. M., Poliachenko V. L., 1984, Shock and Vibration
- Fukushige T., Makino J., 1997, *ApJL* , 477, L9+
- Fukushige T., Makino J., 2001, *ApJ* , 557, 533
- Gill S. P. D., Knebe A., Gibson B. K., 2004, *MNRAS* , 351, 399
- Gill S. P. D., Knebe A., Gibson B. K., 2005, *MNRAS* , 356, 1327
- Gill S. P. D., Knebe A., Gibson B. K., Dopita M. A., 2004, *MNRAS* , 351, 410
- Gilmore G., Wyse R. F. G., 2001, *ArXiv Astrophysics e-prints*
- Goldstein H., 1950, Classical mechanics. Addison-Wesley World Student Series, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950

- Gross M. A. K., Somerville R. S., Primack J. R., Holtzman J., Klypin A., 1998, MNRAS , 301, 81
- Hashimoto Y., Funato Y., Makino J., 2003, ApJ , 582, 196
- Hatton S., Devriendt J. E. G., Ninin S., Bouchet F. R., Guiderdoni B., Vibert D., 2003, MNRAS , 343, 75
- Hatton S., Ninin S., 2001, MNRAS , 322, 576
- Hayashi E., Navarro J. F., Power C., Jenkins A., Frenk C. S., White S. D. M., Springel V., Stadel J., Quinn T. R., 2004, MNRAS , 355, 794
- Heavens A., Refregier A., Heymans C., 2000, MNRAS , 319, 649
- Hernquist L., 1990, ApJ , 356, 359
- Hernquist L., Ostriker J. P., 1992, ApJ , 386, 375
- Hohl F., 1971, ApJ , 168, 343
- Holmberg E., 1974, Arkiv for Astronomi, 5, 305
- Howard S., Byrd G. G., 1990, AJ , 99, 1798
- Huang S., Carlberg R. G., 1997, ApJ , 480, 503
- Hunter C., Toomre A., 1969, ApJ , 155, 747
- Huntley J. M., Sanders R. H., Roberts W. W., 1978, ApJ , 221, 521
- Ibata R., Irwin M., Lewis G., Ferguson A. M. N., Tanvir N., 2001, Nature, 412, 49
- Ibata R. A., Gilmore G., Irwin M. J., 1994, Nature, 370, 194
- Ibata R. A., Lewis G. F., 1998, ApJ , 500, 575
- Irwin J. A., 1995, PASP , 107, 715
- Jain B., Mo H. J., White S. D. M., 1995, MNRAS , 276, L25
- Jenkins A., Frenk C. S., White S. D. M., Colberg J. M., Cole S., Evrard A. E., Couchman H. M. P., Yoshida N., 2001, MNRAS , 321, 372
- Jiang I., Binney J., 1999, MNRAS , 303, L7
- Jiang I., Binney J., 2000, MNRAS , 314, 468
- Kalnajs A. J., 1971, ApJ , 166, 275
- Kalnajs A. J., 1976a, ApJ , 205, 745
- Kalnajs A. J., 1976b, ApJ , 205, 751
- Kalnajs A. J., 1977a, ApJ , 212, 637

- Kalnajs A. J., 1977b, *ApJ* , 212, 637
- Katz N., Keres D., Dave R., Weinberg D. H., 2003, in *ASSL Vol. 281: The IGM/Galaxy Connection. The Distribution of Baryons at $z=0$ How Do Galaxies Get Their Gas?*. pp 185–+
- Kauffmann G., Colberg J. M., Diaferio A., White S. D. M., 1999, *MNRAS* , 303, 188
- Kauffmann G., White S. D. M., 1993, *MNRAS* , 261, 921
- Kauffmann G., White S. D. M., Guiderdoni B., 1993, *MNRAS* , 264, 201
- Kazantzidis S., Mayer L., Mastropietro C., Diemand J., Stadel J., Moore B., 2004, *ApJ* , 608, 663
- Klypin A., Kravtsov A. V., Valenzuela O., Prada F., 1999, *ApJ* , 522, 82
- Knebe A., Gill S. P. D., Gibson B. K., Lewis G. F., Ibata R. A., Dopita M. A., 2004, *ApJ* , 603, 7
- Kroupa P., 2002, *MNRAS* , 330, 707
- López-Corredoira M., Betancort-Rijo J., Beckman J. E., 2002, *AAP* , 386, 169
- Lacey C., Cole S., 1993, *MNRAS* , 262, 627
- Landau L., 1946, *J. Phys. (USSR)*, 10, 25
- Landau L. D., Lifshitz E. M., 1969, *Mechanics. Course of Theoretical Physics*, Oxford: Pergamon Press, 1969, 2nd ed.
- Leeuwin F., Combes F., 1997, *MNRAS* , 284, 45
- Leeuwin F., Combes F., Binney J., 1993, *MNRAS* , 262, 1013
- Lynden-Bell D., Kalnajs A. J., 1972, *MNRAS* , 157, 1
- Ma C., Bertschinger E., 2004, *ApJ* , 612, 28
- Maller A. H., Dekel A., Somerville R., 2002, *MNRAS* , 329, 423
- Mamon G., 2001, *Cours de DEA de dynamique gravitationnelle*.
- Mamon G. A., Sanchis T., Salvador-Solé E., Solanes J. M., 2004, *AAP* , 414, 445
- Martin N. F., Ibata R. A., Bellazzini M., Irwin M. J., Lewis G. F., Dehnen W., 2004, *MNRAS* , 348, 12
- Messiah A., 1962, *Quantum mechanics*. Amsterdam: North-Holland Publication, 1961-1962
- Moore B., 1994, *Nature*, 370, 629
- Moore B., Ghigna S., Governato F., Lake G., Quinn T., Stadel J., Tozzi P., 1999, *ApJL* , 524, L19

- Moore B., Governato F., Quinn T., Stadel J., Lake G., 1998, *ApJL* , 499, L5+
- Murali C., 1999, *ApJ* , 519, 580
- Murali C., Katz N., Hernquist L., Weinberg D. H., Davé R., 2002, *ApJ* , 571, 1
- Navarro J. F., Eke V. R., Frenk C. S., 1996, *MNRAS* , 283, L72
- Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1995, *MNRAS* , 275, 56
- Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1996, *ApJ* , 462, 563
- Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1997, *ApJ* , 490, 493
- Navarro J. F., Steinmetz M., 1997, *ApJ* , 478, 13
- Nelson R. W., Tremaine S., 1995, *MNRAS* , 275, 897
- Ninin S., 1999, PhD thesis, Université Paris XI
- Ostriker E. C., Binney J. J., 1989, *MNRAS* , 237, 785
- Ostriker J. P., 1999, in *Formation of Structure in the Universe Cosmological simulations*. pp 321–+
- Ostriker J. P., Peebles P. J. E., 1973, *ApJ* , 186, 467
- Padmanabhan T., 1996, *Cosmology and astrophysics through problems*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, —c1996
- Palmer P. L., Papaloizou J., 1987, *MNRAS* , 224, 1043
- Peñarrubia J., Kroupa P., Boily C. M., 2002, *MNRAS* , 333, 779
- Peacock J. A., 1999, *Cosmological physics*. *Cosmological physics*. Publisher: Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0521422701
- Peebles P. J. E., 1969, *ApJ* , 155, 393
- Peebles P. J. E., 1980, *The large-scale structure of the universe*. Research supported by the National Science Foundation. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1980. 435 p.
- Peebles P. J. E., 1993, *Principles of physical cosmology*. Princeton Series in Physics, Princeton, NJ: Princeton University Press, —c1993
- Peirani S., Mohayaee R., de Freitas Pacheco J. A., 2004, *MNRAS* , 348, 921
- Pen U., Lee J., Seljak U., 2000, *ApJL* , 543, L107
- Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G., Knop R. A., Nugent P., Castro P. G., Deustua
The Supernova Cosmology Project 1999, *ApJ* , 517, 565
- Pichon C., Aubert D., 2005, *MNRAS* in prep.

- Pichon C., Scannapieco E., Aracil B., Petitjean P., Aubert D., Bergeron J., Colombi S., 2003, *ApJL* , 597, L97
- Plionis M., Basilakos S., 2002, *MNRAS* , 329, L47
- Polyachenko V. L., Shukhman I. G., 1981, *Azh*, 58, 933
- Power C., Navarro J. F., Jenkins A., Frenk C. S., White S. D. M., Springel V., Stadel J., Quinn T., 2003, *MNRAS* , 338, 14
- Press W. H., Schechter P., 1974, *ApJ* , 187, 425
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., 1992, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. Cambridge: University Press, —c1992, 2nd ed.
- Reshetnikov V., Combes F., 1998, *AAP* , 337, 9
- Rood H. J., 1988, *ARAA* , 26, 245
- Roukema B. F., Quinn P. J., Peterson B. A., Rocca-Volmerange B., 1997, *MNRAS* , 292, 835
- Saha P., 1991, *MNRAS* , 248, 494
- Scannapieco E., Barkana R., 2002, *ApJ* , 571, 585
- Seguin P., Dupraz C., 1994, *AAP* , 290, 709
- Somerville R. S., Kolatt T. S., 1999, *MNRAS* , 305, 1
- Sparke L. S., Casertano S., 1988, *MNRAS* , 234, 873
- Spergel D. N., Verde L., Peiris H. V., Komatsu E., Nolte M. R., Bennett C. L., Halpern M., Hinshaw G., 2003, *ApJS* , 148, 175
- Springel V., White S. D. M., Tormen G., Kauffmann G., 2001, *MNRAS* , 328, 726
- Springel V., Yoshida N., White S. D. M., 2001, *New Astronomy*, 6, 79
- Stoehr F., White S. D. M., Tormen G., Springel V., 2002, *MNRAS* , 335, L84
- Teyssier R., 2002, *AAP* , 385, 337
- Toomre A., 1964, *ApJ* , 139, 1217
- Toomre A., Toomre J., 1972, *ApJ* , 178, 623
- Tormen G., 1997, *MNRAS* , 290, 411
- Tormen G., Bouchet F. R., White S. D. M., 1997, *MNRAS* , 286, 865
- Toth G., Ostriker J. P., 1992, *ApJ* , 389, 5
- Tremaine S., Weinberg M. D., 1984, *MNRAS* , 209, 729
- van den Bosch F. C., 2002, *MNRAS* , 331, 98

- van den Bosch F. C., Abel T., Croft R. A. C., Hernquist L., White S. D. M., 2002, *ApJ* , 576, 21
- Van Waerbeke L., Mellier Y., Pelló R., Pen U.-L., McCracken H. J., Jain B., 2002, *AAP* , 393, 369
- Varshalovich D. A., Moskalev A., Khersonskii V. K., 1988, *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific
- Velazquez H., White S. D. M., 1999, *MNRAS* , 304, 254
- Wechsler R. H., Bullock J. S., Primack J. R., Kravtsov A. V., Dekel A., 2002, *ApJ* , 568, 52
- Weinberg M. D., 1989, *MNRAS* , 239, 549
- Weinberg M. D., 1991, *ApJ* , 368, 66
- Weinberg M. D., 1993, *ApJ* , 410, 543
- Weinberg M. D., 1994, *ApJ* , 421, 481
- Weinberg M. D., 2001a, *MNRAS* , 328, 311
- Weinberg M. D., 2001b, *MNRAS* , 328, 321
- White S., 1994, *astro-ph*, 9410043
- White S. D. M., 1984, *ApJ* , 286, 38
- White S. D. M., Rees M. J., 1978, *MNRAS* , 183, 341
- Young P., 1980, *ApJ* , 242, 1232
- Zaritsky D., Smith R., Frenk C. S., White S. D. M., 1997, *ApJL* , 478, L53+
- Zentner A., Kravtsov A., Gnedin O., Klypin A., 2005, *astro-ph*, 0502496